REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat23pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLEANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

E. DESSENON,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

P. LAMAIRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL

CH. RIVIÈRE,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires*.

TOME DOUZIÈME.
Années 1912 à 1914.

23 & 24

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
63, Boulevard Saint-Germain, 63.

291738/33
9
30

QA
1
R486
année 23-
24

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

23e Année. — N° 1. Octobre 1912.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX DROITES

par M. G. Fontené.

1. Soient les deux droites

$$(\Delta)\quad \begin{cases} y + mx = 0, \\ z - h = 0, \end{cases} \qquad (\Delta')\quad \begin{cases} y - mx = 0, \\ z + h = 0. \end{cases}$$

Le lieu des points équidistants de ces deux droites est la surface qui a pour équation

$$\frac{(y+mx)^2}{1+m^2} + (z-h)^2 = \frac{(y-mx)^2}{1+m^2} + (z+h)^2,$$

ou

$$(1)\qquad \frac{m}{1+m^2}\,xy = hz\,;$$

on peut écrire

$$(2)\qquad xy = \frac{2h}{\sin 2\alpha}\,z,$$

$2h$ étant la plus courte distance des deux droites, 2α étant leur angle.

Cette surface est un paraboloïde équilatère (P). Les deux paraboles principales sont situées dans les plans $y - x = 0$, $y + x = 0$, la première ayant sa concavité tournée vers le haut, la seconde ayant sa concavité tournée vers le bas ; le paramètre commun est $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$.

2. Un paraboloïde équilatère dépend de sept paramètres. Comme un système de deux droites dépend de huit paramètres, il existe une simple infinité de systèmes de deux droites Δ et Δ' correspondant à un même paraboloïde équilatère (P) ; et, en effet, le paraboloïde (P) ne dépend que de la valeur du rapport $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$ relatif aux deux droites Δ et Δ'. L'équation du paraboloïde (P) étant

$$(3)\qquad xy = kz,$$

on doit avoir

$$\frac{2h}{\sin 2\alpha} = k,$$

ou encore, d'après (1),

$$k\frac{m}{1+m^2} = h.$$

Le lieu des droites Δ et Δ' qui correspondent à un même paraboloïde (P) est donc le conoïde droit qui a pour équation

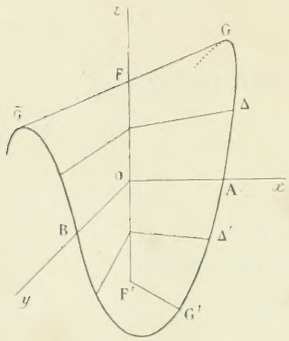
$$(4)\qquad -k\frac{xy}{x^2+y^2} = z.$$

Cette surface est un *cylindroïde* (1). Les plans principaux du paraboloïde (P), plans $y - x = 0$, $y + x = 0$, sont les plans de symétrie du cylindroïde. Les génératrices extrêmes

$$\begin{cases} y + x = 0, \\ z = \dfrac{k}{2} = \dfrac{h}{\sin 2\alpha}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x = 0, \\ z = -\dfrac{k}{2} = -\dfrac{h}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

passent par les foyers des paraboles principales du paraboloïde et sont perpendiculaires aux plans de ces paraboles; soient $\overline{G}FG$ et $\overline{G'}F'G'$ ces deux génératrices.

Un plan sécant parallèle au plan xOy, et dont le point de rencontre avec l'axe zz' descend de F en F', coupe la surface suivant deux droites symétriques l'une de l'autre par rapport aux plans OFG, OF'G', et qui, d'abord confondues avec la droite $\overline{G}FG$, viennent coïncider avec les axes $x'x$, $y'y$ quand le plan sécant passe en O, et finissent par se confondre avec la droite $\overline{G'}F'G'$; le cylindroïde traverse ainsi le paraboloïde (P) suivant les deux droites $x'x$ et $y'y$. On a représenté sur la figure la courbe obtenue en coupant le conoïde par un cylindre de révolution d'axe Oz; X'X et Y'Y étant les bissectrices des angles des axes $x'x$ et $y'y$, l'équation du conoïde par rapport aux axes OX, OY, Oz est



$$z = -\frac{k}{2}\,\frac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2};$$

la section par le cylindre

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

se projette sur le plan $Y = 0$ (plan OF'G') suivant la parabole

$$z = \frac{-k}{2R^2}(2X^2 - R^2),$$

et sur le plan $X = 0$ (plan OFG) suivant la parabole

$$z = \frac{k}{2R^2}(2Y^2 - R^2).$$

Les deux droites $x'x$ et $y'y$ sont des axes de symétrie du cylindroïde; deux génératrices (Δ) et (Δ'), symétriques l'une de l'autre par rapport à ces axes, l'une par exemple entre $x'Ox$ et $\overline{G}FG$, l'autre entre $x'Ox$ et $\overline{G'}F'G'$, admettent le paraboloïde (P) comme lieu des points situés à égale distance de chacune d'elles.

3. Le cylindroïde se rencontre dans la question suivante :

Etant donné un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a > b) \tag{5}$$

le conoïde formé par les perpendiculaires communes à l'axe zz' et aux génératrices d'un même système

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi, \\ \dfrac{y}{b} = -\dfrac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi, \end{cases} \tag{6}$$

est un cylindroïde.

(1) Le *cylindroïde* est une surface réglée telle que le lieu des projections d'un point quelconque sur les génératrices est une courbe plane (une conique). Cf. *Revue*, mai 1909, question 1780. Voir également les notes de M. Appell, n° 9 et de M. Roubaudi, n° 11, 5e année.

La projection de la génératrice sur le plan xOy étant

$$\frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}=1,$$

les équations de la perpendiculaire commune sont de la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} z=\lambda, \\ \dfrac{x\sin\varphi}{b}-\dfrac{y\cos\varphi}{a}=0; \end{cases}$$

en écrivant que les équations (6) et (7) en x, y, z sont compatibles, on obtient entre λ et φ la relation

$$(8)\qquad \frac{\dfrac{\cos\varphi}{a^2}}{\dfrac{\sin\varphi}{b^2}}=\frac{\dfrac{\lambda}{c}\sin\varphi+\cos\varphi}{-\dfrac{\lambda}{c}\cos\varphi+\sin\varphi};$$

l'équation du conoïde, obtenue en éliminant λ et φ, entre les relations (7) et (8), est alors

$$\frac{\dfrac{x}{a}}{\dfrac{y}{b}}=\frac{-\dfrac{z}{c}\dfrac{y}{a}+\dfrac{x}{b}}{-\dfrac{z}{c}\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}},$$

ou

$$\frac{x}{y}=\frac{\dfrac{z}{c}y+\dfrac{a}{b}x}{-\dfrac{z}{c}x+\dfrac{b}{a}y},$$

ou

$$\frac{z}{c}(x^2+y^2)=\frac{a^2-b^2}{ab}xy.$$

ou enfin

$$(9)\qquad z=\frac{-c(a^2-b^2)}{ab}\frac{xy}{x^2+y^2};$$

c'est l'équation d'un cylindroïde.

Ainsi : *Étant donné un hyperboloïde à une nappe représenté par l'équation* (5), *on considère le conoïde formé par les perpendiculaires communes à l'axe zz' et aux génératrices d'un même système, l'une de ces génératrices étant par exemple* $y=b$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$. *Ce conoïde admet comme axes de symétrie les droites $x'x$ et $y'y$. Si Δ et Δ' sont deux génératrices du conoïde symétriques par rapport aux droites $x'x$ et $y'y$, le paraboloïde équilatère* (P) *qui est le lieu des points équidistants des deux droites Δ et Δ' est indépendant du couple de génératrices considéré.*

L'équation de ce paraboloïde (P) est

$$xy=\frac{c(a^2-b^2)}{ab}z.$$

GÉOMÉTRIE

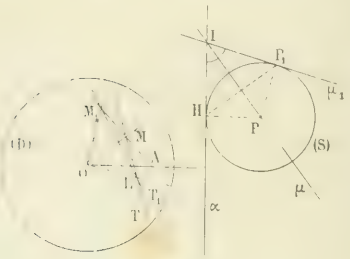
2000. — *On donne dans un plan les deux points fixes* O *et* A. *A tout point* M *on fait correspondre le point* M_1, *intersection de* AM *et de la droite symétrique de* OA *par rapport à* OM. M *décrivant une ligne* C, M_1 *décrit une ligne* C_1.

1° *Démontrer que les tangentes à ces deux lignes en deux points correspondants se coupent sur la perpendiculaire à* OM_1 *au point* O.

2° *Lorsque C est une droite Δ, C_1 est une conique de foyer O et passant par A. Quelle est la directrice associée au foyer O ?*

3 *L'enveloppe des droites Δ pour lesquelles C_1 est une parabole est le cercle de centre A passant par O.*

On transforme la figure par pôles et polaires réciproques en prenant pour cercle directeur un cercle (D) de centre O et de rayon arbitrairement choisi. Le point M a pour polaire la droite μ tangente à la ligne γ, polaire de la ligne C. μ touche γ au point P, pôle de la tangente MT. De même M_1 a pour polaire la droite μ_1 tangente à la ligne γ_1, polaire de C_1. μ_1 touche son enveloppe au point P_1, pôle de la tangente M_1T_1 à C_1. Soit α la polaire du point A. α est une droite fixe. Puisque M et M_1 sont en ligne droite avec A, les droites μ et μ_1 se coupent au point I situé sur α. μ, μ_1 et α étant trois perpendiculaires menées de I aux trois droites OM, OM_1, OA, forment une figure égale à la figure formée par ces trois droites, et comme OA et OM_1 sont symétriques par rapport à OM, α et μ_1 sont symétriques par rapport à μ. Il existe donc un cercle (S) de centre P, tangent aux deux droites α et μ_1, en H à α et en P'_1 à μ_1.

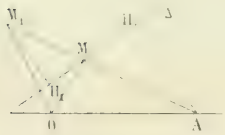


1. On sait qu'un cercle variable (S) dont le centre P décrit une ligne γ touche son enveloppe en deux points symétriques par rapport à la tangente en P à γ. Le point P'_1, étant symétrique, par rapport à μ, du point H où le cercle (S) touche la droite α, qui est la première partie de son enveloppe, est donc le second point de contact. Ce point P'_1 n'est donc autre, puisque μ_1 est tangente à (S) en P_1, que le point de contact de μ_1 avec son enveloppe. C'est donc le pôle P_1 de la tangente M_1T_1. MT et M_1T_1 se coupent en L, pôle de la droite PP_1. PP_1 et μ_1 sont rectangulaires, donc leurs pôles L et M_1 sont vus de O sous un angle droit; la première partie est donc établie.

2. Le cercle (S) a pour polaire une conique (Γ) de foyer O et ayant pour directrice associée la polaire du centre P de (S), donc la tangente MT. (S) étant tangent à α et μ_1, (Γ) passe par A et M_1. Si la ligne C est une droite fixe Δ, MT n'est autre que Δ et alors la conique (Γ) est une conique invariable bien déterminée. M décrivant la droite Δ, M_1 décrit la conique (Γ) de foyer O et de directrice Δ et passant par A.

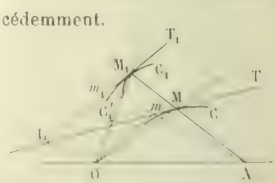
3 Pour que cette conique soit une parabole, il faut et il suffit que A soit équidistant de O et Δ, donc que la droite Δ soit tangente au cercle de centre A et de rayon AO.

On peut d'ailleurs donner de ces deux parties la démonstration extrêmement simple suivante :



Soient H et H_1 les projections orthogonales de A et M_1 sur Δ. OM étant bissectrice de $\widehat{AOM_1}$, on a $\frac{M_1O}{OA} = \frac{MM_1}{MA}$. Or $\frac{MM_1}{MA} = \frac{M_1H_1}{AH}$, donc $\frac{M_1O}{OA} = \frac{M_1H_1}{AH}$ et $\frac{M_1O}{M_1H_1} = \frac{AO}{AH}$, ce qui démontre la seconde partie ; la troisième s'en déduit comme précédemment.

M. A. Sainte-Lagüe me fait remarquer que l'on peut encore traiter la question de la façon suivante :

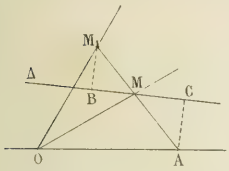


La transformation qui fait correspondre M_1 à M est une transformation de contact, puisque la position de M_1 dépend uniquement de la position de M. Soient M un point donné sur C et M_1 son homologue sur C_1, m un point quelconque du plan et m_1 son homologue dans la transformation considérée. m partant de M et décrivant C, m_1 part de M_1 et décrit C_1 ; mais si m partant de M décrit la tangente MT, m_1 partant de M_1 décrit une ligne C'_1 ayant

en M_1 la même tangente M_1T_1 que C_1. Il suffit donc de démontrer que m décrivant une droite donnée MT, m_1 décrit une ligne C_1 telle que M_1 désignant une position de m_1 et L le point où la tangente en M_1 à C_1 coupe MT, le point M_1 et le point L sont vus de O sous un angle droit. Cette solution exige comme on le voit que l'on traite la deuxième partie avant la première. Il suffit de prendre la démonstration élémentaire donnée à la fin de la solution précédente. Mais alors dès qu'on a établi que le lieu de m_1 est une conique de foyer O et de directrice MT, la propriété à établir apparaît comme étant une propriété bien connue des coniques.

M. CARETTE.

Autre solution. — Au point M correspond par cette transformation un seul point M_1, au point M_1 un seul point M. La transformation est donc une transformation de contact : or quel est le lieu de M_1 quand M décrit une droite Δ ?



Abaissons les perpendiculaires M_1B, AC des points M_1 et A sur Δ : comme OM bissecte l'angle M_1OA, nous avons

$$\frac{M_1O}{M_1M} = \frac{AO}{AM},$$

et par suite,

$$\frac{M_1O}{M_1B} = \frac{AO}{AC}.$$

Le lieu du point M_1 est donc une conique de foyer O, de directrice Δ et passant par A : la tangente en M_1 coupe donc Δ au même point que la perpendiculaire en O à OM_1.

Donc la tangente en M et la tangente en M_1 en deux points correspondants se coupent sur la perpendiculaire en O à OM_1.

L'enveloppe des droites Δ pour lesquelles le lieu de M_1 est une parabole, est un cercle de rayon OA et de centre A.

R. DONTOT, élève à l'École normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. P. Vergnes, à Toulouse ; F. Margand, école des Anglais ; E. Sautreau ; M. Fourniol, école des Anglais ; L. Nucelle, à La Châtre ; A. Bouge, lycée de Nancy ; A. Courtois ; P. Dagott, à Nancy ; G. Estében ; A. Furet ; R. Boyer, à Nice ; Ch. Mouzat, 63e d'Infanterie ; J. Simon, à Fourmies ; A. Rousseau ; N. Savary, 61e d'Artillerie ; J. Mourret, à Saumur ; R. Vaillant ; L. Montaut, École Centrale.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2008. — 1° *Trouver les courbes intégrales de l'équation différentielle*

$$x(x - yy') + 2y^2 = 0,$$

les tangentes en leurs points d'inflexion et le lieu de ces points. Quels sont les points qui leur correspondent dans les inverses de ces courbes par rapport à l'origine des coordonnées ?

2° *On considère la courbe intégrale qui rencontre Ox en un point A tel que* $OA = a$, *et on la fait rouler sur la parabole* $y^2 = a(x - a)$. *Montrer que tout point de la droite OA décrit une conchoïde.*

3° *Les paraboles ayant pour sommet le point A et pour foyers les divers points de la parabole précédente représentent chacune à un certain instant l'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points d'une droite. En déduire l'enveloppe de ces paraboles.*

Passons en coordonnées polaires, $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$.

L'équation différentielle s'écrit

$$2(x^2 + y^2) - x(x + yy') = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2\rho^2 dx - \rho x d\rho = 0.$$

$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega d\omega$; on a donc

$$\rho^2(\cos\omega d\rho - 2\rho\sin\omega d\omega) = 0.$$

La solution $\rho^2 = 0$ montre que l'origine est un point double. En supprimant ce facteur il reste

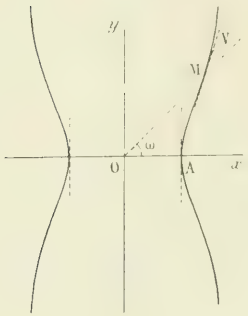
$$\cos\omega d\rho - 2\rho\sin\omega d\omega = 0, \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -2\frac{d(\cos\omega)}{\cos\omega},$$

d'où
$$\mathrm{L}\,\frac{\rho}{c} = \mathrm{L}\,\frac{1}{\cos^2\omega}.$$

L'équation des courbes intégrales est donc
$$\rho = \frac{c}{\cos^2\omega}.$$

Construisons ces courbes.

Il suffit de faire varier ω dans un intervalle d'amplitude 2π. Le changement de ω en $-\omega$ ou en $-\omega+\pi$ ne change pas la valeur de ρ. Il y a donc symétrie par rapport aux deux axes, et il suffira de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.



Supposons $c > 0$ par exemple. Pour $\omega = 0$, $\rho = c$.

Quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\cos\omega$ décroît constamment de 1 à 0. ρ croît constamment et augmente indéfiniment quand ω tend vers $\frac{\pi}{2}$. Il y a une branche infinie dans la direction Oy. $x = \rho\cos\omega = \frac{c}{\cos\omega}$ croît indéfiniment; il n'y a pas d'asymptote. Le point O est un point double isolé.

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\dfrac{c}{\cos^2\omega}}{\dfrac{2\sin\omega\cdot c}{\cos^3\omega}} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\omega}.$$

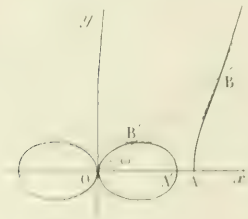
Pour $\omega = 0$, $V = \frac{\pi}{2}$. La tangente au point A est perpendiculaire à Ox. V décroît constamment et tend vers 0 quand ω croît et tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Points d'inflexion. — Dérivons l'équation différentielle proposée
$$2x - yy' - xy'^2 + 4yy' - xyy'' = 0.$$

Pour un point d'inflexion, on aura $y'' = 0$. Le lieu des points d'inflexion s'obtiendra en éliminant y' entre les deux équations
$$\begin{cases} x(x - yy') + 2y^2 = 0, \\ 2x + 3yy' - xy'^2 = 0. \end{cases}$$

Tirons y' de la première,
$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}.$$
et portons dans la deuxième. Il vient en simplifiant
$$2y^4 + x^2y^2 - x^4 = 0.$$

C'est un système de droites passant par l'origine. Leurs pentes sont données par l'équation
$$2m^4 + m^2 - 1 = 0,$$
$$m^2 = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$



Nous avons les deux droites isotropes et les deux droites de pentes $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour ces points on a $\operatorname{tg} V = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $V = \omega$.

Il était évident que les points d'inflexion seraient en ligne droite, car ces courbes sont homothétiques par rapport à l'origine.

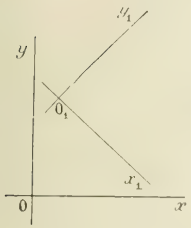
Les courbes inverses par rapport à l'origine avec la puissance

d'inversion a ont pour équation polaire

$$\rho = a^2 \frac{\cos^2 \omega}{c}.$$

Le changement de ω en $-\omega$ ou en $\pi - \omega$ n'altère pas la valeur de ρ. La courbe est donc symétrique par rapport aux deux axes. ω croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ décroît de $\frac{a^2}{c}$ à 0.

$\operatorname{tg} V_1 = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \omega}$. La tangente en A′ est parallèle à Oy. Les tangentes en deux points correspondants forment avec le rayon vecteur un triangle isocèle. Pour les points d'inflexion, $V = \omega$. Les tangentes aux points correspondants sont donc parallèles à Ox.



2. Supposons Γ liée à un plan mobile rapporté à deux axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1, coïncidant avec Oxy au début du roulement. Nous allons chercher les coordonnées d'un point du plan mobile par rapport aux axes fixes à une époque quelconque.

Si nous appelons α et β les coordonnées de l'origine O_1 et θ l'angle de Ox_1 avec Ox, on a

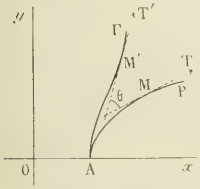
$$x = \alpha + x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta. \qquad y = \beta + x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta.$$

Il nous faut exprimer α et β en fonction de θ.

Soit M′ le point de la courbe Γ qui vient sur le point M de la parabole pendant le roulement. On a

$$\text{arc AM} = \text{arc AM}'.$$

Calculons les arcs des deux courbes.



On a, pour la courbe Γ,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = \frac{a^2}{\cos^6 \omega}(1 + 3\sin^2 \omega) d\omega^2$$

Si nous orientons la courbe dans le sens des ω croissants,

$$ds = \frac{a}{\cos^3 \omega}\sqrt{1 + 3\sin^2 \omega}\, d\omega,$$

$$s = a \int \frac{\sqrt{1 + 3\sin^2 \omega}}{\cos \omega} \cdot \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} + \text{Cte}.$$

Posons $\operatorname{tg} \omega = t$, d'où $(1 + t^2) d\omega = dt$,

$$s = a \int \sqrt{1 + 4t^2}\, dt + \text{Cte}.$$

Calculons $I = \int \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$.

$$I = t\sqrt{1 + 4t^2} - \int \frac{4t^2 dt}{\sqrt{1 + 4t^2}} = t\sqrt{1 + 4t^2} - I + \int \frac{dt}{\sqrt{1 + 4t^2}};$$

$$2I = t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{2} \mathrm{L}(2t + \sqrt{1 + 4t^2}),$$

$$s = \frac{a}{2}\left[t\sqrt{1 + 4t^2} + \frac{1}{2}\mathrm{L}(2t + \sqrt{1 + 4t^2})\right] + \text{Cte}.$$

Si nous prenons comme origine des arcs le point A, la constante est nulle.

Calculons l'arc de la parabole orientée dans le sens des y croissants.

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\left(1 + \frac{4y^2}{a^2}\right), \qquad ds_1 = \sqrt{1 + \frac{4y^2}{a^2}}\, dy.$$

Posons $\frac{y}{a} = t'$, $dy = a\,dt'$, $ds_1 = a\sqrt{1 + 4t'^2}\, dt'$,

d'où
$$s_1 = \frac{a}{2}\left[t'\sqrt{1 + 4t'^2} + \frac{1}{2}\mathrm{L}(2t' + \sqrt{1 + 4t'^2})\right].$$

Pour que les deux arcs soient égaux, il suffit que $t = t'$. Comme nous ne considérons que la branche de droite de la courbe Γ, la condition est nécessaire, car à une valeur de t correspond un seul point de la courbe.

Nous exprimerons les coordonnées x et y de M en fonction de t ainsi que les coordonnées x_1, y_1 du point M'. D'autre part θ est l'angle de la tangente en M avec la tangente en M'. Il s'exprimera en fonction de t. En remplaçant dans les formules de transformation, nous aurons α et β en fonction de t.

L'équation cartésienne de la courbe Γ s'obtient de la manière suivante :

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \omega}, \qquad t_1^2 = a\rho, \qquad x_1^4 = a^2(x_1^2 + y_1^2).$$

$y_1 = tx_1$. En remplaçant on a

$$\begin{cases} x_1 = a\sqrt{1+t^2}, \\ y_1 = at\sqrt{1+t^2}. \end{cases}$$

Pour la parabole $\qquad y^2 = a_0 x - a_1$,

en faisant $y = at$,

$$\begin{cases} x = a(1+t^2), \\ y = at. \end{cases}$$

Calculons θ.

$$\theta = (Ox, MT) - (Ox, MT').$$

$$\cos\theta = \frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{dy_1}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}, \qquad \sin\theta = \frac{dx_1}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy_1}{ds}.$$

$$\begin{cases} dx_1 = a\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt, \\ dy_1 = a\dfrac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt. \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = 2at\,dt, \\ dy = a\,dt. \end{cases}$$

et

$$ds = a\sqrt{1+4t^2}dt.$$

$$\cos\theta = \frac{2t^2}{(1+4t^2)\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+2t^2}{(1+4t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

et

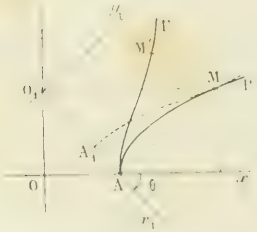
$$\sin\theta = \frac{t}{(1+4t^2)\sqrt{1+t^2}} - \frac{2t(1+2t^2)}{(1+4t^2)\sqrt{1+t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Nous avons alors

$$\begin{cases} x = \alpha + x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \\ y = \beta + x_1\sin\theta + y_1\cos\theta; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a(1+t^2) = \alpha + a + at^2, \\ at = \beta. \end{cases}$$



Nous avons

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = at = -a\,\mathrm{tg}\,\theta. \end{cases}$$

L'origine décrit l'axe des y.

D'autre part $\beta = -a\,\mathrm{tg}\,\theta$. Donc O_1x_1 passe constamment par le point A, ce qu'il est facile de voir en faisant dans les formules de transformation $y = y_1 = 0$.

$$x = x_1\cos\theta, \qquad 0 = -a\,\mathrm{tg}\,\theta + x_1\sin\theta, \qquad x = a, \qquad x_1 = \frac{a}{\cos\theta}.$$

Le point de rencontre de Ox avec O_1x_1 est bien le point A.

Tous les points de Ox décrivent des conchoïdes de Nicomède, de directrice Oy et de centre A.

3. Donnons-nous une droite D quelconque du plan mobile. M étant le centre instantané de rotation, MN est la normale au lieu du point N. Les tangentes aux trajectoires des différents points de la droite D enveloppent donc une parabole de foyer M et de tangente au sommet D.

Pour que cette parabole ait toujours son sommet en A, il faut que D passe constamment par A et soit en outre perpendiculaire à MA. Nous voyons que O_1x_1 est la seule droite qui puisse satisfaire à cette condition, car elle est la seule à passer toujours au point A.

Vérifions qu'elle est perpendiculaire à AM.

En effet $$x_1 = a\sqrt{1+t^2} = \frac{a}{\cos\theta} = O_1A,$$

par suite la perpendiculaire menée par M sur O_1x_1 tombe au point A.

L'enveloppe des tangentes aux trajectoires des points de O_1x_1 est à chaque instant une parabole dont le foyer est sur P et dont le sommet est A.

MO_1 est perpendiculaire à Oy car $\beta = y$. Les paraboles sont donc tangentes à Oy. Leur enveloppe se compose de Oy, du point A et de la droite de l'infini.

Bonnes solutions de MM. F. Margand, école des Anglais, à Lyon; R. Boyer, lycée de Nice.

2016. — *Soit* O *un point fixe d'un plan. A tout point* M *du plan on fait correspondre un point* M′ *de la droite* OM, *tel qu'entre les rayons vecteurs* OM *et* OM′ *de ces deux points on ait la relation*

$$OM + \frac{a^2}{OM'} = b.$$

1° *Etudier cette transformation en supposant* a *et* b *positifs, et plus spécialement quand* $b = 2a$.

2° *Montrer ce qu'est la transformée d'une courbe quelconque. Dire quelles relations existent entre les angles* V, *les sous-tangentes et les sous-normales en deux points correspondants de ces courbes.*

3° *Appliquer à un cercle passant en* O, *à un limaçon ayant son point double au point* O, *à la spirale d'Archimède.*

1. Nous poserons pour abréger l'écriture, $OM = \rho$, $OM' = \rho_1$. La relation s'écrit alors $\rho + \frac{a^2}{\rho_1} = b$. On peut aussi lui donner la forme

$$\rho\rho_1 + a^2 = b\rho_1 ; \tag{1}$$

c'est une relation homographique. Ce fait se traduit par le résultat suivant : considérons toutes les courbes possibles (C) et leurs transformées (C_1); coupons ces deux familles par une droite Δ passant à l'origine ; les courbes (C) et (C_1) déterminent sur Δ une homographie. Les points doubles de cette homographie sont donnés par $\rho^2 - b\rho + a^2 = 0$. Ils sont réels ou imaginaires suivant que la quantité $b^2 - 4a^2$ est positive ou négative. Considérons l'un de ces points doubles, D ; quand la droite Δ tourne autour du point O, le point D décrit un cercle de centre O et dont le rayon est $\rho = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$.

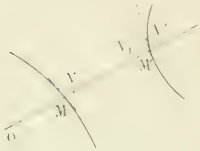
Ce cercle est tel que, dans la transformation envisagée, il est à lui-même sa propre transformée : c'est ce que nous pourrons appeler une courbe double. — Ainsi donc dans la transformation il y a deux courbes doubles qui sont des cercles centrés à l'origine.

Dans le cas particulier indiqué, $b = 2a$, les courbes doubles sont confondues avec le cercle de rayon a. Dans le cas de l'inversion, $b = 0$, les courbes doubles se confondent avec le cercle d'inversion.

2. De la relation $b\rho_1 + a^2 = b\rho_1$ qui définit la transformation, nous tirons $\rho_1 = \dfrac{a^2}{b-\rho}$.

Ceci nous montre que les points à l'infini de la courbe (C_1), transformée de la courbe (C), sont donnés par la considération des points d'intersection de la courbe (C) et du cercle de rayon b centré au point O.

Cherchons la relation qui existe entre les angles formés par les tangentes en des points correspondants et les rayons vecteurs de ces points.



On a $\qquad \operatorname{tg} V = \dfrac{\rho}{\rho'}, \qquad \operatorname{tg} V' = \dfrac{\rho_1}{\rho_1'}.$

Or $\qquad \rho_1 = \dfrac{a^2}{b-\rho}, \qquad$ donc $\qquad \rho_1' = \dfrac{a^2\rho'}{(b-\rho)^2}.$

Il vient alors

$$\operatorname{tg} V' = \frac{b-\rho}{\rho} = \frac{b}{\rho} - \operatorname{tg} V = \operatorname{tg} V\left(\frac{b}{\rho} - 1\right).$$

La relation cherchée est donc

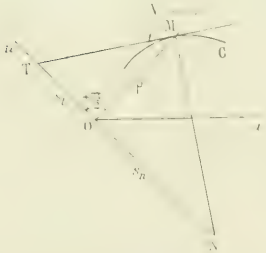
$$\operatorname{tg} V' = \operatorname{tg} V\left(\frac{b}{\rho} - 1\right)$$

Si nous nous plaçons dans le cas de l'inversion, $b = 0$; on voit que la relation précédente devient

$$\operatorname{tg} V' = -\operatorname{tg} V, \qquad \text{d'où} \qquad V' = \pi - V.$$

Mais l'on a $V_1 = \pi - V$, donc $V_1 = V$. C'est un résultat de l'inversion bien connu.

Occupons-nous des relations qui peuvent exister entre les sous-tangentes et les sous-normales en des points correspondants. Rappelons d'abord la définition de la sous-tangente et de la sous-normale en coordonnées polaires. Soient M un point quelconque d'une courbe (C), OM le rayon vecteur de ce point, Ou la droite orientée qui fait l'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ avec OM; menons la tangente MT et la normale MN à la courbe (C) au point M. Le vecteur $\overline{OT}$ est la sous-tangente, et le vecteur $\overline{ON}$ la sous-normale.



De cette définition résultent immédiatement les relations

$$s_t = -\rho \operatorname{tg} V = -\frac{\rho^2}{\rho'}, \qquad s_n = \frac{\rho}{\operatorname{tg} V} = \rho'.$$

Si nous calculons les mêmes éléments pour le point M′ qui correspond au point M, nous aurons de même

$$s_t' = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1'}, \qquad s_n' = \rho_1'.$$

En tenant compte de la relation $\rho_1' = \dfrac{a^2\rho}{(b-\rho)^2}$, il vient

$$s_t' = -\frac{a^4}{(b-\rho)^2}\,\frac{(b-\rho)^2}{a^2\rho'} = -\frac{a^2}{\rho'}.$$

$$s_n' = \frac{a^2\rho'}{(b-\rho)^2}.$$

Nous obtenons ainsi $\qquad \dfrac{s_t'}{s_t} = \dfrac{a^2}{\rho^2}, \qquad \dfrac{s_n'}{s_n} = \dfrac{a^2}{(b-\rho)^2}.$

3. Appliquons les résultats que nous avons obtenus à quelques exemples.

1° La courbe (C_1) est un cercle qui passe au point O. Son équation en coordonnées polaires est alors

$\rho = 2R\cos\omega$. L'équation polaire de la transformée sera donc

$$\rho_1 = \frac{a^2}{b - 2R\cos\omega} = \frac{\frac{a^2}{b}}{1 - \frac{2R}{b}\cos\omega}.$$

Cette équation représente une conique qui admet l'origine pour foyer, dont le paramètre est $\frac{a^2}{b}$ et l'excentricité $e = \frac{2R}{b}$. Si $2R > b$, on a une hyperbole, si $2R < b$, une ellipse, si $2R = b$, une parabole. Ce résultat est bien d'accord avec ce que nous avions trouvé précédemment : en effet, $2R > b$ exprime que le cercle considéré coupe le cercle de centre O et de rayon b en deux points réels, c'est-à-dire que la transformée a deux points réels à l'infini.

2° La courbe (C) est un limaçon de Pascal qui a son point double à l'origine. Son équation est donc $\rho = 2R\cos\omega + d$; l'équation de la transformée se trouve être

$$\rho_1 = \frac{a^2}{b - 2R\cos\omega - d} = \frac{\frac{a^2}{b-d}}{1 - \frac{2R}{b-d}\cos\omega}.$$

C'est encore une conique qui a son foyer à l'origine. Pour que ce soit une hyperbole, il faut que l'on ait $2R + d > b$, ce qui exprime que le cercle de centre O et de rayon b coupe le limaçon.

3° La courbe (C) est une spirale d'Archimède. Son équation est $\rho = k\omega$.

L'équation de la transformée est dans ce cas $\rho_1 = \frac{a^2}{b - k\omega}$. Faisons tourner l'axe polaire de l'angle $\omega = \frac{b}{k}$, et changeons le sens de rotation. Nous avons finalement $\rho_1 = \frac{a^2}{k\omega}$, qui représente une spirale hyperbolique.

JACQUIER, élève au lycée Louis-le-Grand.

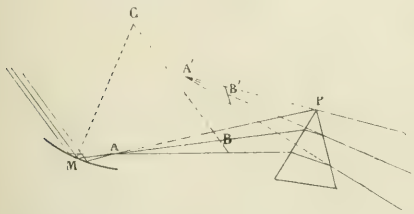
Bonne solution : M. A. Courtois, à Sedan.

PHYSIQUE

2001. — *Un faisceau de lumière monochromatique de petite section, issu d'un point lumineux très éloigné, tombe et se réfléchit sous un angle de 60° sur un miroir sphérique* M *de rayon* R, *puis rencontre un petit prisme* P *dont la section principale se confond avec le plan d'incidence moyen en* M.

a. En supposant la distance MP *notablement supérieure à* R, *étudier la forme du faisceau entre les points* M *et* P, *puis au delà du prisme.*

b. En supposant la distance MP *peu supérieure à* R, *quelle incidence faut-il donner sur le prisme pour que l'image obtenue sur le faisceau émergent soit aussi nette que possible ?*



Angle du prisme : $\alpha = 45°$. *Indice du prisme :* $n = \sqrt{2}$.

a. Prenons pour plan de la figure le plan d'incidence moyen. Le faisceau réfléchi sur le miroir présentera deux régions d'amincissement, les droites de Sturm ou focales ; l'une, A, est perpendiculaire au plan de la figure ; l'autre, B, est située dans le plan d'incidence sur la parallèle au faisceau incident menée par le centre C du miroir.

On démontre dans les cours de physique qu'en appelant x la distance du point lumineux au point d'incidence M, x' la distance MA, x'' la distance MB, i l'angle d'incidence et R le rayon du miroir, on a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{R\cos i} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x''} = \frac{2\cos i}{R}.$$

Dans le cas présent, $x = \infty$, $i = 60^\circ$ et $\cos i = \frac{1}{2}$, d'où l'on déduit

$$x' = \frac{1}{4}\,R \qquad \text{et} \qquad x'' = R.$$

Pour étudier ensuite la réfraction par le prisme, décomposons le faisceau réfléchi par le miroir en éléments plans perpendiculaires au plan de la figure et ayant leurs sommets aux divers points de B. On sait que ces faisceaux plans élémentaires sont transformés en d'autres faisceaux plans ayant leurs sommets distribués sur un élément de ligne B′, et que B′ est situé à la même distance du prisme que B.

D'autre part, les traces, sur le plan de la figure, des faisceaux élémentaires incidents se rencontrant en A, les traces des faisceaux réfractés se rencontreront en un certain point A′ où le faisceau émergent total s'appuie sur une petite droite perpendiculaire au plan de la figure. La position de cette droite A′ est donnée par la formule suivante, où l'on a employé les notations habituelles des cours de physique,

$$PA' = PA\,\frac{\cos^2 r\,\cos^2 i}{\cos^2 i\,\cos^2 r'}.$$

La première partie de la question se trouve ainsi résolue.

b. Pour résoudre la seconde partie, remarquons que l'image devant être aussi nette que possible, A′ et B′ doivent se former au même endroit et, par conséquent, à la même distance du prisme. Or MB étant égal à R et la distance MP peu supérieure à R, B est près du prisme ; B′ est donc aussi très voisin du prisme et PA′, pour être confondu avec PB′, doit être très petit. D'après la formule qui donne PA′, on voit que l'angle i' doit être voisin de $\frac{\pi}{2}$ et, par conséquent, l'angle i voisin de sa valeur minimum. Celle-ci est donnée, d'une manière générale, par la formule

$$\sin i = n \sin(\alpha - l),$$

l désignant l'angle limite. Or $\sin l = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $l = 45^\circ$. L'angle α est aussi égal à 45°, donc $\alpha - l$ est nul et l'incidence minimum aussi. En définitive, l'angle d'incidence sur le prisme doit être très petit.

R. BOYER, lycée de Nice.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse

8594. — Division d'un polynome ordonné par rapport aux puissances ascendantes par $a - x$. Loi du quotient.

8595. — Condition pour qu'un polynome soit divisible par $(x - a)^n$.

8596. — Déterminer une suite de nombres $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ tels que l'on ait $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 3n^2$.

8597. — Calculer $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$.

8598. — Dans une urne se trouvent cinq boules noires, quatre jaunes et trois rouges. De combien de façons peut-on tirer six de ces boules de manière que chaque couleur soit représentée ?

8599. — On donne n points dans un plan, on les joint deux à deux de toutes les manières possibles. Trouver le nombre des points d'intersection de toutes les droites ainsi obtenues.

8600. — Mettre le polynome $10x(x^2+1)^2$ sous forme de la somme des puissances cinquièmes de trois fonctions linéaires de x.

8601. — Résultat de la substitution des racines du système $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ dans le polynome $a''x+b''y+c''$. Généraliser.

8602. — Etudier les séries dont les termes généraux sont :

$$\frac{n^{2n}}{x^n+\mathrm{L}n},\quad \frac{1}{a+bx^n},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n},\quad \mathrm{L}\cos\frac{x}{n},\quad \frac{1}{e^n x^{2n}},\quad \frac{1}{n^2\,\mathrm{L}n},\quad \frac{x^n}{n-\sqrt{n}},\quad \frac{\mathrm{L}n}{n^2},\quad \mathrm{L}(1+a_n x^n),\quad nx^n\mathrm{L}\left(a+\frac{1}{n}\right),$$

$$nx^n\mathrm{L}\left(a+\frac{1}{n^2}\right),\quad \frac{1}{n}\,\mathrm{L}\frac{n}{n-1},\quad \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots 2n},\quad \sin\left(n-\frac{a}{n}\right)\pi,\quad \mathrm{L}\left(a+\frac{1}{n^2}\right),\quad \mathrm{L}\left(a+\sin^2\frac{x}{n}\right),\quad \frac{n}{\sqrt{n^4+1}},$$

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)},\quad \mathrm{L}\frac{\cos\frac{x}{n}}{\cos\frac{x}{a+n}},\quad x^n e^{-\sqrt{n}},\quad ne^{-\sqrt{n}},\quad \mathrm{L}\frac{1}{\cos\frac{x}{n}},\quad e^{an^3+bn^2+cn+d},\quad \mathrm{L}\frac{an^3+bn^2+cn+d}{(n+1)^4},\quad \frac{2n}{(n+1)!},$$

$$\frac{1^3.3^3.5^3\ldots(2n-1)^3}{2^3.4^3.6^3\ldots 2n)^3},\quad \frac{n^3}{n!}x^n,\quad \frac{(-1)^n}{n}\sin n\theta,\quad \sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+2},\quad e^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}.$$

8603. — Calculer les sommes des séries qui ont pour termes généraux

$$\frac{1}{n(n+1)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{x^n}{n(n-1)},\quad n^n\cos n\theta,\quad e^n\cos n\theta,\quad \frac{2n+3}{2n+1}x^n,\quad \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

8604. — Etudier les séries

$$\frac{3}{1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}-\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^2}{4}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{x^3}{5}+\ldots$$

et calculer leurs sommes quand elles sont convergentes.

8605. — On considère la suite des nombres u_0, u_1, ..., u_n, ... définie par la relation de récurrence $u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n=k$, u_0 et u_1 étant arbitraires. Démontrer que la série qui a pour terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente.

8606. — Chercher une limite supérieure du reste de la série qui a pour terme général $\frac{1}{n^4}$. Comparer ce reste à une intégrale.

8607. — Calculer les dérivées des fonctions $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax}$, $\arcsin(3x-4x^3)$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Expliquer les résultats.

8608. — Dérivée d'ordre n des fonctions $\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$, e^{ax^2}, $\frac{a}{x^2+a}$.

8609. — Etudier les variations des fonctions $x\log x$, $\frac{\log x}{x}$, xe^x, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

8610. — On donne deux sphères et un point A sur la ligne des centres entre les deux sphères. Déterminer le point A de façon que la somme des zônes vues de ce point soit la plus grande possible.

8611. — Parmi les troncs de cône de révolution d'angle au sommet et de volume constants, quel est celui qui a la plus grande surface totale ?

8612. — On considère la fonction $y=[x(x-1)]^3$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$. Séparer les racines de cette dérivée.

8613. — Développer en série les fonctions $(\arcsin x)^2$, $\frac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}$.

8614. — Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que la fonction se réduit au terme complémentaire.

8615. — Calculer l'ordre infinitésimal des fonctions $(1+x)^{\frac{1}{x}}-e$, $\operatorname{tg}x-x$, $\operatorname{tg}x-x-\frac{x^3}{3}$, $x\sin(\sin x)-\sin^2 x$.

8616. — Démontrer que si x est compris entre 0 et 1, $\mathrm{L}(1+x)$ est compris entre $x-\frac{x^2}{2}$ et $x-\frac{x^2}{2(1+x)}$.

8617. — Si x est positif, on a $e^x>1+x>e^{\frac{x}{1+x}}$.

8618. — Trouver pour $x=0$ les limites des fonctions suivantes :

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+2\mathrm{L}\cos x}{x^4},\quad \frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x},\quad \left(\frac{\cos x+x+\sin x}{1+\sin x}\right)^{\cot x},\quad x^{\sin x},\quad \cot^2 x-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\operatorname{arc\,tg}x-\mathrm{L}(1+x^2)}{x},\quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{L(1+x)}-\frac{1}{x},\quad (\cos x)^{\frac{1}{x^2}},\quad \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\cot^2 x},\quad \frac{x-\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x}{(\text{arc}\sin x)^5},\quad xL\frac{1+x^2}{x^2}.$$

8619. — Trouver pour n infini les limites des fonctions suivantes :

$$\left(1+\frac{3x}{n}+\frac{2x^2}{n^2}\right)^n,\quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},\quad \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}},\quad \sqrt[n]{\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}}.$$

8620. — Limites de $\frac{\cos x}{L\frac{\pi}{2x}}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$, de $\left(\frac{\pi}{2x}-1\right)\text{tg}\,x$ pour $x=\frac{\pi}{2}$, de $(\text{arc cot}\,e^x)^{\frac{1}{x}}$ pour x infini, de $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)$ pour x infini, de $e^{\frac{1}{x}+\cos x}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$.

8621. — Etablir la relation $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}$. En déduire la limite du premier membre quand n augmente indéfiniment.

8622. — On pose $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+x_1}$, $x_3=\sqrt{2+x_2}$, ... $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$. Démontrer que pour x infini x_n a une limite et calculer cette limite.

8623. — Soient a_0 et A deux nombres positifs. On pose $a_1=\frac{1}{2}\left(a_0+\frac{A}{a_0}\right)$, $a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{A}{a_1}\right)$, ... $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{A}{a_{n-1}}\right)$. Démontrer que pour n infini, a_n a une limite et calculer cette limite.

8624. — Calculer la limite pour $h=0$ du rapport $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^\alpha}$. Déterminer α pour que la limite soit finie et différente de zéro.

8625. — Etablir la formule $f(x)-2f(x+h)+f(x+2h)=h^2f''(x+2\theta h)$, θ étant compris entre 0 et 1.

8626. — On considère la formule connue $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$. Déterminer $f(x)$ de façon que θ soit indépendant de h.

8627. — Que devient l'expression $\frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{hk}$, lorsque h et k tendent vers zéro d'une manière quelconque ?

8628. — Trouver une fonction $f(x)$ telle que l'on ait pour toutes les valeurs de x et y $[f(x)]^y=f(xy)$.

8629. — Calculer la différentielle totale de la fonction $u=\text{arc}\cos\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$. On trouve $du=-\frac{dx}{1+x^2}-\frac{dy}{1+y^2}$. C'est aussi la différentielle totale de $v=-\text{arc tg}\,x-\text{arc tg}\,y$. Montrer directement que les fonctions u et v ne diffèrent que par une constante.

8630. — Soient u et v deux fonctions de x et y telles que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}$. Démontrer que si l'on exprime x et y en fonction de u et v, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$$

8631. — Dans la fonction homogène $f(x, y, z, t)$ on remplace x, y, z, t par des fonctions linéaires et homogènes de X, Y, Z, T. La fonction $f(x, y, z, t)$ se transforme en une fonction $F(X, Y, Z, T)$. Que devient l'expression

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}+t_0\frac{\partial f}{\partial t}?$$

8632. — Déterminer α de façon que l'expression $\frac{(x-\alpha y)dx+(\alpha x+y)dy}{(x^2+y^2)^2}$ soit une différentielle totale.

8633. — Dans la fonction $V(x, y)$ on fait le changement de variable $x^2=2(au+bv)$, $y^2=2(au-bv)$. Calculer $\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de V par rapport à u et v.

8634. — Déterminer une fonction u de x et y de telle sorte que l'expression $(3x^4+3x^2y-y)u\,dx+(3x^3-2x+y)u\,dy$ soit une différentielle totale.

8635. — Résoudre les équations $\text{ch}\,x=\frac{5}{3}$, $\text{sh}\,x=\frac{3}{4}$.

8636. — Montrer que $\text{ch}\,nx-\text{ch}\,na$ est divisible par $\text{ch}\,x-\text{ch}\,a$.

8637. — Résoudre les équations $\cos z=a+bi$, $\sin z=4$, $\text{tg}\,z=\frac{3i}{5}$, $\text{tg}\,z=\frac{4+3i}{5}$.

8638. — Comment peut-on définir $(a+bi)^{c+di}$? Calculer i^i, $\sqrt{i}$ et mettre ces quantités sous la forme $A+Bi$.

8639. — Discuter les équations :
$x^3+px+q=0$, $x^4+px^3+q=0$, $(x^2+1)^2-\lambda(x-1)^2(x+2)=0$, $x^6-16x^4-13x^3+36x^2+32x+48=0$ (racines entières), $x^6-3x^4+mx^3-3x+1=0$, $x^4-4x^3+5x^2-2(x-1)=0$, $x^3-3ax+3b=0$, $x^4+ax+b=0$, $2x^3-3(x-1)^2=0$, $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$, $x^5+5ax^4+10bx^3+1=0$, $x^3-(1+a)x^2+2a-1=x+1-a=0$;

$L(1+x)-Lx=\frac{a}{x}$, $(x-1)e^{x}=(x+1)e^{-x}$, $Lx=a\operatorname{arc\,tg}x$, $x-\sin x+a=0$, $a\operatorname{arc\,tg}x-x=\frac{\pi}{10}$,

$x^2-2\sin^2 x=0$, $\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}+ax=0$ (résolution graphique), $\sin 2x-2\cos x+1=0$, $\cos 3x-3a\cos x+1=0$,

$a\operatorname{tg}x-L(1+x)+x=0$, $x-e\sin x-k=0$ $(e<1)$, $\operatorname{cotg}x+ax-\frac{1}{2}=0$

8640. — Résoudre le système

$$x+y+z=6,$$
$$x^3+y^3+z^3=50,$$
$$x+y+z^3=-50.$$

8641. — Déterminer un polynome connaissant le reste de la division de ce polynome par sa dérivée.

8642. — Etant donnée l'équation $x^3+px+q=0$, calculer la fonction symétrique $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$, a, b, c étant les trois racines.

8643. — Calculer la fonction symétrique $\Sigma\frac{1}{a^2+1}$ pour l'équation $x^3-3x+1=0$.

8644. — Former l'équation aux carrés des racines de l'équation $x^4-2x^3+4x^2+1=0$

8645. — Soient u et v deux polynomes premiers entre eux. Montrer que si l'équation $u^2-3uv+2v^2=0$ admet p fois la racine a, l'équation $u^2-3uv^2+2v^3=0$ admet $p-1$ fois cette racine.

8646. — Etant donnée l'équation $f(x)=0$, former l'équation qui admet comme racines les rapports $\frac{a}{b}$ de deux racines quelconques de $f(x)$. Application à l'équation $x^3+px+q=0$.

8647. — On porte sur Ox trois points A, B, C, ayant pour abscisses les racines de l'équation $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Former l'équation qui admet pour racines les quantités $y^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

8648. — Soient x_1, x_2, x_3 les racines de l'équation $x^3+px+q=0$. Démontrer qu'on peut déterminer a, b, c de façon que l'on ait $x_1=a+\frac{b}{c+x_2}$, $x_2=a+\frac{b}{c+x_3}$, $x_3=a+\frac{b}{c+x_1}$.

8649. — Etant donné le polynome $f(x)\equiv ax^3+bx^2+cx+d$, déterminer un trinome x^2+px+q dont les racines x' et x'' satisfont à la condition $f(x')=f(x'')$. En écartant la solution $x'=x''$, étudier comment varient les racines x' et x''.

8650. — Si le polynome $f(x)$ a toutes ses racines réelles et distinctes, l'équation $f(x)+af'(x)=0$, où a désigne une constante réelle, a aussi toutes ses racines réelles et distinctes.

8651. — Etant donnée l'équation $x^3+3x+2i=0$, vérifier que $-i$ est racine, puis calculer les deux autres racines.

8652. — On donne l'équation $x^4+x^2-3x+7=0$. Etudier ses racines. Former l'équation qui admet comme racines $a+\frac{1}{a}$, $b+\frac{1}{b}$, $c+\frac{1}{c}$, $d+\frac{1}{d}$, a, b, c, d étant les racines de l'équation donnée. Généraliser.

8653. — On donne l'équation du troisième degré $x^3+px+q=0$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix},$$

S_p désignant la somme des puissances p des racines. En déduire la condition de réalité des racines.

8654. — Soit $\varphi(x)$ une fonction dont la dérivée $\varphi'(x)$ est en valeur absolue inférieure à un nombre positif k plus petit que 1. Démontrer que l'équation $x-\varphi(x)=0$ a une seule racine a. Etant donné un nombre quelconque x_0, on pose $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, ..., $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Démontrer que lorsque n augmente indéfiniment, x_n a pour limite a.

8655. — Résoudre une équation algébrique $f(x)=0$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique. Examiner les cas particuliers où l'équation est du troisième et du quatrième degré.

8656. — Etant donnée l'équation $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p^n=0$, former l'équation aux carrés des racines. En déduire la fonction symétrique $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2\dots\alpha_{n-2}^2$, α_p désignant une racine de l'équation proposée.

8657. — On donne l'équation $x^3+px+q=0$; calculer la fonction symétrique $\Sigma(a-b)(a-c)$.

8658. — Condition pour que les racines de l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$ soient en progression arithmétique.

8659. — On considère une équation $f(x)=0$ ayant toutes ses racines réelles et distinctes. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{f(x)}$. Calculer la fonction symétrique $\Sigma\frac{1}{xf'(x)}$.

8660. — Soient a, b, c, d les racines de l'équation $x^4-x^3-4x^2+4x+1=0$. Former l'équation qui a pour racines $2-a^2$, $2-b^2$, $2-c^2$ et $2-d^2$.

8661. — Trouver un polynome du septième degré $f(x)$ tel que $f(x)+1$ soit divisible par $(x+1)^4$ et $f(x)-1$ par $(x-1)^4$.

8662. — Calculer Σx^2bc pour l'équation $x^3 - 1 = 0$.

8663. — Éliminer x entre les deux équations $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + ax + b = 0$.

8664. — Condition pour que les racines x_1, x_2, x_3 de l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ satisfassent à la condition

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}.$$

8665. — Étant donnée l'équation $f(x) = x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n} = 0$, calculer la fonction symétrique

$$\Sigma \alpha f'(\alpha), \Sigma \frac{1}{\alpha f'(\alpha)}.$$

8666. — Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les racines du polynome du quatrième degré $f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$. Condition pour que $f(x)$ puisse se mettre sous la forme $A(x-\alpha)^4 + B(x-\beta)^4 + C(x-\gamma)^4 + D(x-\delta)^4$.

8667. — Calculer la fonction symétrique $(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$ pour l'équation $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

8668. — Décomposer le polynome $x^4 + px + q$ en facteurs du deuxième degré. Discussion.

8669. — Étant donnée l'équation $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$, calculer le produit des sommes des racines deux à deux.

8670. — Calculer $(b-c)(c-a)(a-b)$, a, b, c étant les racines de l'équation $x^3 + x^2 + x + 1$. Donner plusieurs méthodes et comparer les résultats.

8671. — Décomposer en éléments simples $\dfrac{x^2+2}{(x-1)^3(x+2)^2}$.

8672. — On considère la fonction rationnelle $\dfrac{f(x)}{[F(x)]^2}$: on suppose que le degré de $f(x)$ est inférieur à celui de $F(x)$, que $F(x)$ n'a que des racines simples et que $f'(x)F'(x) - f(x)F''(x)$ est divisible par $F(x)$. Décomposer en éléments simples.

8673. — Calculer les intégrales

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, \quad \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+1}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^n},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx, \quad \int \frac{dx}{1+x+x^2}, \quad \int \frac{xdx}{x^4+a^4}, \quad \int \frac{x^2dx}{x^2+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^n},$$

$$\int \frac{dx}{x^3-1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{(x^2+1)^n}, \quad \int \frac{xdx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}dx, \quad \int \frac{1-5x+4x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \quad \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx, \quad \int \frac{1-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{(x-a^2)(b^2-x^2)}}, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2-a\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{(x+a)dx}{x\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{2+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}, \quad \int \frac{t^2(3-2t^2)dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}};$$

$$\int_0^{\pi} 4\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx, \quad \int \sin^n x\cos^3 x\,dx, \quad \int \cos^n x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x + \cos^3 x\,dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{1-r\cos x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^3 dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}, \quad \int \operatorname{tg}^4 x\,dx;$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{L}x\,dx, \quad \int x\sin^2 x\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}, \quad \int \frac{\mathrm{L}(1+x^2)}{x^2}dx,$$

$$\int \frac{dx}{x\mathrm{L}x}, \quad \int \frac{\operatorname{arc\,sin} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int x^2\operatorname{ch} x\,dx,$$

$$\int x\mathrm{L}\frac{1+x^2}{x}dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos x}}.$$

8674. — On donne un cercle et un point A dans son plan. On divise la circonférence en n parties égales par les points $M_1, M_2, \dots, M_n$. Calculer la limite de la moyenne arithmétique des quantités $\dfrac{1}{\overline{AM}^2}$.

8675. — Trouver une formule de récurrence pour calculer l'intégrale $\int x^n \cos \pi x\,dx$, n étant entier.

8676. — On pose $I_{m,p} = \int \sin^m x \sin px\,dx$. Trouver une relation entre $I_{m,p}$ et $I_{m-2,p}$.

8677. — Moment d'inertie d'un triangle équilatéral par rapport à son centre.

8678. — Etant donnée l'intégrale $I = \int \frac{dx}{x^2+a}$, calculer $\frac{dI}{da}$.

8679. — Soit F le foyer d'une parabole, M un point de la courbe, calculer la valeur moyenne de $\frac{1}{\overline{FM}^2}$ étendu à tous les points de la parabole, la variable indépendante étant l'angle de FM avec l'axe.

8680. — Donner une formule de récurrence pour calculer $\int \mathrm{sh}^n x\,dx$.

8681. — Moment d'inertie d'un cône de révolution par rapport à son axe, d'un cylindre de révolution par rapport à une génératrice.

8682. — Intégrer les équations différentielles

$$2y\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2 - 1, \quad x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = ax^3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+y^2}{x+x^2}, \quad xy' - 2y = x^2, \quad \sqrt{1+x^2}\,y' - y + x = 0,$$

$$y^2 + y^2 + 2ay' + 2by = 0, \quad \frac{dy}{dx} - xy = x + x^3, \quad \frac{dy}{dx} = y + x, \quad \frac{dy}{dx}\sin x\cos x - y = \sin^2 x, \quad x - yy' = y'^2,$$

$$5xy' - y\sin x + y^5\cos x = 0, \quad 2x^2y' + xy = x^2 + 1, \quad (1-x^2)y' - xy - xy^2 = 0, \quad \frac{dy}{dx} - ay = e^{mx}\cos px,$$

$$\frac{dy}{dx}\cos x + 2y\sin x + 2\sin 2x - \sin 4x = 0, \quad \frac{dy}{dx} - y\frac{1-3x^2}{x-x^3} = \frac{x(1+x^2)}{1-x^2};$$

$$xy'' + 2y' = (x^2+6)\sin x, \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{dy}{dx} = (x^2+b)\sin x, \quad xLx\frac{d^2y}{dx^2} + (1+Lx)\frac{dy}{dx} = x(1+2Lx);$$

$$y'' - 5y' + 6y = x^2e^{2x}, \quad y'' + 4y = \sin ax, \quad y'' + 2y' + y = \sin x\sin 2x, \quad y'' + \frac{2}{a}y' + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 3e^{2x},$$

$$y'' - 2y' + y = x^3e^x, \quad yy'' = 2y'^2 + y^2, \quad y'' + \frac{2}{a}y' + \frac{y}{a^2} = e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \text{ (cas où } a = b), \quad y'' - 2y' + 2y = 2e^x\sin x,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} - 2m\frac{dx}{dy} + m^2x = \sin ny, \quad x^2y'' + axy' + by = x^m, \quad 3(y'')^3 - 3y''y^3, \quad y'' - 6y' + 21y' - 26y = e^{2x}\cos 3x.$$

8683. — Intégrer les systèmes

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + m^2y = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + m^2x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} + y - 3x = 0, \\ \frac{dy}{dt} + y - x = 0. \end{cases}$$

8684. — On considère l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Peut-on trouver une solution particulière de la forme $u = f(r)\cos n\theta$, en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$?

8685. — On pose $u = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$, et on demande de calculer une fonction $f(u)$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0.$$

8686. — Reconnaître si l'équation différentielle $(x - xy)y' + y + 2y^2 + x^3 = 0$ a pour courbe intégrale une conique.

8687. — On donne l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, a et b étant des fonctions de x. On pose $y = uv$, et on demande s'il est possible de déterminer u de façon que l'équation différentielle en v ne contienne pas de terme en v'. Appliquer à l'équation $x^2y'' + 2mxy' + [m(m-1) - k^2x^2]y = 0$.

II. — Trigonométrie.

8688. — Etablir la formule $\frac{\pi}{4} = \text{arc cot. } 7 + 2\text{ arc cot. } 3$.

8689. — Remplacer la somme $2\text{ arc tg } x + \text{arc tg }(2x - \sqrt{3}) + \text{arc tg }(2x + \sqrt{3})$ par un seul arc tangente.

8690. — On pose $\text{tg }(a + \lambda i) = x + yi$, calculer $x^2 + y^2 + 2xy\cot. 2a$.

8691. — Calculer $\sqrt[5]{1+i}$, $\sqrt[3]{1-i}$.

8692. — Simplifier les sommes

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na,$$

$$\sin\frac{2\pi}{m} + 2\sin\frac{4\pi}{m} + 3\sin\frac{6\pi}{m} + \dots + (n-1)\sin\frac{2(n-1)\pi}{m},$$

$$\cos\frac{2\pi}{m} + 2\cos\frac{4\pi}{m} + 3\cos\frac{6\pi}{m} + \dots + (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{m}.$$

8693. — On donne $\sin a = b$, calculer $\operatorname{tg} \frac{a}{7} = x$.

8694. — On donne $\sin a = b$, calculer $\sin \frac{a}{m} = x$.

8695. — Montrer que $\cos^2 \frac{\pi}{7}$ est racine d'une équation du troisième degré à coefficients entiers. Former cette équation et calculer les autres racines.

8696. — Calculer $\sin 7x$ en fonction de $\sin x$. En déduire la relation $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{4}$.

8697. — Calculer $\operatorname{tg} 12x$ en fonction de $\operatorname{tg} x$. En déduire la formule $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = 15$.

8698. — Trouver pour n infini la limite de l'expression

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2 \sin \frac{\pi}{n} + 2^2 \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + (n-1)^2 \sin \frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

8699. — Si $A + B + C = \pi$ on a

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C - 1).$$

8700. — On donne un triangle ABC dont les trois angles sont aigus, et on mène les hauteurs AA′, BB′, CC′. Calculer les éléments du triangle A′B′C′ en fonction de ceux du triangle ABC.

8701. — Résoudre un triangle connaissant r_a, r_b, r_c.

8702. — Déterminer les angles d'un triangle sachant que l'on a $1 + \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$.

8703. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Cas où le triangle est équilatéral.

8704. — Dans un triangle rectangle sphérique on a $C = \frac{\pi}{2}$. Calculer c en fonction de a et b, puis en fonction de A et B.

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

8705. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$$2y = +\sqrt{6x - x^2} + \sqrt{6x + x^2}, \quad x = \sqrt[3]{9y - 6} - \sqrt[3]{27y^2 + 9}, \quad 2y^2 - 1 = 4x^3 - 3x, \quad y = 2x \pm \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x+2}};$$

$$y = (x - a)e^{-x} + e^{-x}\sqrt{x^2 - 1}, \quad a(1 - \cos x) + x - \sin x = y - \sin y, \quad y = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad y^2 = aLx + \sqrt{1 - x^2}, \quad y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 1}},$$

$$y = e^{-1} - e^{-\frac{1}{x}}, \quad y = L\frac{x-1}{x+2}, \quad y = \frac{1}{x} - L\frac{1+2x}{x}, \quad x = \left(y + \frac{1}{y}\right)^y, \quad x = \left(y - \frac{1}{y}\right)^y, \quad x^{2y} = y,$$

$$\sin y = \frac{x}{1 - 3x^2}, \quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad y = x \sin \frac{1}{x}, \quad y = \frac{L|x|}{x - 1};$$

$$(x^2 + y^2)(ax + by) + 2xy = 0, \quad x^3 - y^3 + x^2 + y^2 - 5x + y + 2 = 0, \quad xy^3 - 3(x + y)y^2 + 2x^2 = 0, \quad xy^2 + x^3 - x^2 + y = 0,$$

$$xy^2 + y(x + y) + 1 = 0, \quad y^2(x^2 + 3a^2) + 4ay(x^2 - a^2) + (x^2 - a^2)^2 = 0, \quad 4x^3 + (y - 3x)^2 = 0, \quad x^3 + y^3 + ax^2y = 0,$$

$$4x^2y^2 - 3xy^3 + 1 = 0, \quad x^2(x^2 + y^2) + 2mx - y = 0, \quad 2x(y - 3)^2 - 3y(x - 1)^2 = 0, \quad (a - y)(x^2 + y^2) = b^2y^2, \quad xy^2 - a(x + y)^2 = 0:$$

$$\begin{cases} x = 2t^2(t - 1)^2, \\ y = t^2 - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{t(t-1)}, \\ y = \dfrac{2at}{t^2 - 1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(t^2 - t), \\ y = a\left(t - \dfrac{1}{t}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} x = ab(t + 1)^2, \\ y = a(2t + 1)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\left(t + \dfrac{1}{t}\right), \\ y = \dfrac{2a(1 + t)}{t(t - 1)}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \sin t, \\ y = \dfrac{a \cos^2 t}{2 - \cos t} \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(1 + \cos^2 t) \sin t, \\ y = a \sin^2 t \cos t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t + \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t + \sin 2t), \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$$

8706. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées polaires :

$$\rho = a(2 \cos \omega - \cos 2\omega), \quad \rho = \cos \omega - \frac{1}{\cos 2\omega}, \quad \rho = a\left(\cos \omega - \frac{1}{\cos \omega}\right), \quad \rho = a\left(\cos \omega - \frac{1}{4 \cos \omega}\right) \text{ (aire de la boucle)},$$

$$\rho = \frac{a}{\cos \omega} + b, \quad \rho = \frac{2 \cos \omega + 1}{2 \sin \omega + 1}, \quad \rho = a(\sin \omega + \cos \omega)\cos^2 \omega, \quad \rho = a \cos \omega \cos 2\omega, \quad \rho = a \sin \omega \sin 2\omega;$$

$$\omega = \rho(\rho + 1)\rho + 2, \quad \rho\omega = \frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a}, \quad \rho = \omega(2\omega^2 - 9\omega + 12), \quad \rho = \frac{a}{\cos(\omega + 2)}, \quad 2\rho^2 - \rho \cos \frac{\omega}{2} - \sin \omega = 0.$$

8707. — On considère trois droites formant un triangle $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$, et un point $P(x_0, y_0)$ situé dans le plan de ces droites. Étudier la position du point P par rapport au triangle. Conditions pour que ce point soit à l'intérieur du triangle, ou dans l'une des régions limitées par les trois droites.

8708. — Etant données deux droites D et D′, trois points A, B, C sur D, trois points A′, B′, C′ sur D′, à tout point M de D on fait correspondre le point M′ de D′ tel que l'on ait (ABCM) = (A′B′C′M′). Montrer que les points M et M′ tracent sur D et D′ des divisions homographiques.

8709. — Calculer l'aire commune à deux cercles.

8710. — Equation générale des cercles coupant orthogonalement deux cercles donnés.

8711. — On considère une cycloïde, deux points M et M′ de cette courbe (appartenant au même arceau) et où les tangentes sont rectangulaires. Lieu du point de rencontre de ces tangentes. Ces tangentes se coupent en un point P, et les normales en M et M′ rencontrent la base en A et A′. Calculer la somme des carrés des côtés du pentagone PMABM′.

8712. — Construire la courbe définie par les équations $x = \frac{t(a^2 - t^2)}{a^2 + t^2}$, $y = \frac{2a^2t^2}{a^2 + t^2}$. Equation de la courbe en coordonnées polaires.

8713. — Une courbe plane est définie comme enveloppe de la droite $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, p étant une fonction donnée de α. Calculer le rayon de courbure.

8714. — Trajectoires orthogonales des tangentes à une chaînette.

8715. — Etudier la développante d'une parabole.

8716. — Trouver la développée de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Calculer d'abord les équations paramétriques ; puis éliminer le paramètre.

8717. — Construire la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Calculer sa longueur. Même question pour la courbe $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

8718. — On considère les deux courbes $y = f(x)$, $y = [f(x)]^n$; de la tangente à la première déduire la tangente à la seconde. Comme application, construire les tangentes aux paraboles $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

8719. — Construire la courbe $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = b \operatorname{tg} t$. On considère deux points de cette courbe tels que $t_1 + t_2 = \alpha$. Trouver l'enveloppe de la droite joignant ces deux points.

8720. — Si les trois courbes définies par les équations homogènes $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ ont des points communs, la courbe jacobienne

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} = 0$$

passe par ces points. Cas où les courbes sont des cercles.

8721. — Construire les courbes intégrales de l'équation différentielle $\frac{yy'^3}{1 + y'^2} = k$.

8722. — Construire la courbe $y^4 - x^4 = a^2(4y^2 - x^2)$. On coupe cette courbe par des parallèles à Oy. Lieu des milieux des points de rencontre.

8723. — Etudier la courbe $x = a\left[\cos t + \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right]$, $y = a \sin t$. Construire la développée de cette courbe.

8724. — La transformation $X = e^x \cos y$, $Y = e^x \sin y$ conserve les angles.

8725. — Du centre O d'une ellipse on mène la perpendiculaire OP à la tangente au point M. On pose $OM = r$, $OP = p$; démontrer que le rayon de courbure au point M est de la forme $\frac{k^2 - r^2}{p}$. Inversement, trouver toutes les courbes pour lesquelles le rayon de courbure est de cette forme.

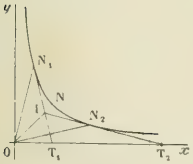
8726. — Trouver les asymptotes de la cubique $xy(x + y - a - b) + k(x + y - a)(x + y - b) - kxy = 0$. Equation générale des cubiques admettant les mêmes asymptotes comme asymptotes d'inflexion.

8727. — On considère la courbe définie par l'équation $y = a \mathrm{L} \cos \frac{x}{a}$. Construire cette courbe. Calculer la longueur d'un arc. Trouver l'abscisse de l'extrémité de l'arc de longueur $\frac{1}{2}$, ayant pour origine l'origine des coordonnées.

8728. — Construire la courbe $x = \frac{2at}{1 + t}$, $y = \frac{a(1 - 2t)}{1 - t}$. Calculer l'aire comprise entre les axes Ox, Oy et la branche de gauche.

8729. — Construire la courbe $b^2y^2 = x^3(a - x)$. Trouver les points d'inflexion. Calculer l'aire intérieure à la courbe.

8730. — Etant donnée l'hyperbole équilatère $xy = 1$, on mène les tangentes aux points N_1 et N_2 qui rencontrent l'axe des x aux points T_1 et T_2, et on désigne par I le point de rencontre de ces tangentes. Démontrer que l'aire limitée par ON_1, ON_2 et l'arc N_1NN_2 est équivalente à l'aire limitée par l'arc N_1NN_2, les droites N_2T_2, T_2T_1 et T_1N_1. Montrer que les triangles OIN_1 et OIN_2 ont même aire



8731. — Déterminer les asymptotes de la courbe

$$(2y - x)(x^2 + 2xy - 7y^2) + y^2 - xy + 2x - 1 = 0.$$

Position de la courbe par rapport aux asymptotes.

8732. — Etudier l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux axes rectangulaires. Calculer la longueur de cette courbe et l'aire limitée.

8733. — Construire la courbe $\rho^2 = \frac{a^2\omega}{\pi - \omega}$, et calculer l'aire limitée par la courbe et deux rayons vecteurs.

8734. — On considère la courbe $x^2 - y^2 + 2x^3 + x^2y + y^4 = 0$. Que présente-t-elle à l'origine ? Calculer les deux rayons de courbure à l'origine.

8735. — On considère une famille de courbes (1) $f(x, y, a, b) = 0$, a et b étant liés par la relation (2) $\varphi(a, b) = 0$. Cette famille de courbes a une enveloppe (3) $\psi(x, y) = 0$. Dans l'équation (1) on considère a et b comme des coordonnées courantes, et x, y comme des paramètres liés par la relation (3). Déterminer l'enveloppe. Application à l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$.

8736. — Soient A et B deux points de la courbe $\rho = f(\omega)$ correspondant aux angles polaires α et β. Calculer le volume engendré par le secteur OAB tournant autour de l'axe polaire.

8737. — Trouver la loi de succession des ordonnées des points d'inflexion de la courbe $y = e^{-ax} \sin bx$.

8738. — Etant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, on considère une courbe tangente à l'origine à l'axe des x. On prend sur la courbe un point M, voisin de l'origine, puis sur Ox un point T tel que OT = arc OM. La droite MT rencontre Oy au point N. Trouver la limite de ce point quand M se rapproche indéfiniment du point O.

8739. — Etudier analytiquement la transformation par inversion.

8740. — Calculer la longueur d'un arc de chaînette.

8741. — Construire la courbe $ay^2 = x(x - a)^2$. Une parallèle à la droite $y = x$ rencontre cette courbe en trois points. Trouver le lieu des milieux de ces points deux à deux, quand la sécante se déplace en restant parallèle à elle-même.

8742. — D'un point M, on peut mener trois tangentes à la courbe $x = t^2$, $y = t^3$. Quel lieu doit décrire le point M pour que ces trois tangentes forment un faisceau harmonique avec la parallèle à Ox (ou à Oy) menée par le point M ?

8743. — On pose $z = x + iy$, $z_0 = x - iy$; que représente l'équation $\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z_0}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 0$, a désignant une constante positive donnée ?

8744. — Courbes à tangente constante. Courbure.

8745. — Construire la courbe $y = x^3 + \frac{8}{x^3}$. Peut-on utiliser cette courbe pour étudier les racines de l'équation

$$x^8 - 3x^6 - 6x^5 - 4x^3 + 8 = 0 ?$$

8746. — On considère la courbe $x^2 - y^2 = 6x^3 + x^2y + y^3$. Calculer les rayons de courbure à l'origine.

8747. — Lieu des points d'inflexion des courbes $y^2 = 1 - \lambda \sin^2 x$, lorsque λ varie.

CONCOURS DE 1912 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs des mines et admission des étrangers aux cours spéciaux.

Algèbre et Analyse.

I. — On considère la fonction $\varphi(x)$, égale à h pour $-a < x < 0$ et à l pour $0 < x < a$. Développer cette fonction en série de Fourier.

II. — **2092.** Un point matériel est lancé en O suivant Ox à l'instant $t = 0$ avec la vitesse v_0. Il se déplace dans un milieu résistant dont la résistance est proportionnelle à la puissance $m^{ème}$ de la vitesse (m positif, mais non forcément entier). On sait que son mouvement est régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K\left(\frac{dx}{dt}\right)^m.$$

Intégrer cette équation. Discuter le moment où le point s'arrêtera.

III. — **2093.** Intégrer l'équation différentielle

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 2x.$$

Discuter la forme des solutions suivant la valeur du paramètre réel λ.

(*21 juin, de 8 h. à midi.*)

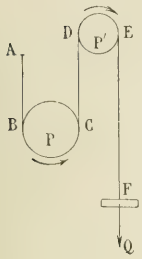
Géométrie et Mécanique.

I. — **2094**. Trouver la développée de la chaînette représentée par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

où a désigne une longueur donnée.

Exprimer l'arc de cette développée en fonction de l'arc correspondant de la chaînette.



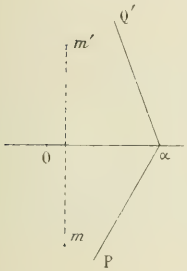
II. — Un fil ABCDEF, de poids négligeable, est disposé, ainsi que l'indique la figure, sur deux poulies P et P′ mobiles autour de leurs centres. L'extrémité A est fixe. L'extrémité libre F supporte un poids donné Q. Les parties rectilignes AB, DC, EF sont verticales. A l'instant où commence l'expérience, la poulie P tourne en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre avec une vitesse ω et la poulie P′ tourne dans le sens du mouvement de ces aiguilles, avec une vitesse ω'.

On suppose que les deux poulies, ainsi lancées, s'arrêtent ensemble au bout d'un temps T, que l'on mesure. Connaissant les rayons et les moments d'inertie des deux poulies ainsi que le coefficient de frottement du fil sur ces poulies, on propose de calculer les vitesses initiales ω, ω'.

(*25 juin, de 8 h. à midi.*)

Géométrie descriptive.

On considère un plan PαQ′ coupant la ligne de terre au point α : $x = 12$, $y = 0$, $z = 0$.



La trace verticale de ce plan fait avec la ligne de terre prise vers la gauche un angle de 70°. La trace horizontale fait avec la même direction un angle de 60°.

On demande de placer dans ce plan un point M tel que $x = 2$, $y = z$. Par le point M on élève une perpendiculaire au plan PαQ′ dirigée vers la gauche, et sur cette perpendiculaire on porte une longueur MC = 6.

Le point C est pris pour centre d'une sphère dont le rayon est 8.

Déterminer l'intersection de cette sphère par le plan PαQ′. Représenter cette intersection en supposant la sphère pleine et opaque.

Observation. — Dans les données ci-dessus, les points sont supposés rapportés à trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'origine est le centre de la feuille. L'axe des x est la ligne de terre prise vers la droite. L'axe des y est la perpendiculaire au plan vertical menée en avant de ce plan. L'axe des z est la perpendiculaire au plan horizontal menée vers le haut.

Toutes les longueurs sont données *en centimètres.*

(*26 juin, de 9 h. à midi.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2095. — On considère une courbe Γ du troisième degré et un de ses points d'inflexion O. Par ce point on mène une sécante quelconque OAB.

1° Lieu du point d'intersection des tangentes en A et B à Γ.

2° On fait une transformation homographique de façon que O et la tangente en ce point aillent à l'infini. Montrer qu'avec des axes convenables l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

3° Se servir de cette forme pour démontrer ce théorème dû à Salmon :

Si d'un point quelconque M *pris sur une courbe du troisième degré on mène les quatre tangentes à la courbe autres que celle ayant son point de contact en* M, *leur rapport anharmonique est constant.*

A. Darmon.

2096. — On considère le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ et un point M, ayant pour coordonnées x et y.

1° Trouver le conjugué M′ du point M, dont l'abscisse x' est égale à $-x$. Calculer x et y en fonction de x' et y' et inversement. Quel est le lieu du point M′, quand le point M décrit le cercle donné ? Quand le point M décrit une droite ?

2° Dans ce dernier cas, le lieu est une hyperbole, dont une asymptote est parallèle à Oy. Trouver le lieu de son centre et l'enveloppe de sa seconde asymptote, quand la droite donnée enveloppe la parabole qui a pour foyer l'origine et pour sommet le point symétrique du centre du cercle par rapport au point O.

3° On suppose que le point M soit sollicité par une force représentée par le vecteur MM'. Trouver les lignes de force et les lignes de niveau du champ ainsi créé. On ajoute à cette force une force égale à l'ordonnée du point M' changée de signe. Etudier le mouvement que prend le point M, ayant pour masse l'unité et soumis à ces deux forces. Pour $t = 0$, $x = 2a$, $y = 0$, la vitesse est parallèle à Oy et égale aussi à $2a$. Faire varier t de 0 à 2π seulement. E. H.

DEUXIÈME PARTIE

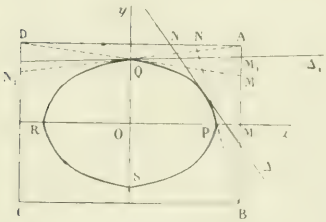
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2006. — *Etant donné un rectangle* ABCD, *on considère l'enveloppe des droites qui partagent l'aire de ce rectangle dans le rapport k, et l'on demande d'étudier les formes prises par cette enveloppe quand k varie de 0 à $+\infty$.*

Evaluer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée qui forme l'enveloppe cherchée.

Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire minima circonscrit à cette courbe et celles du rectangle d'aire maxima?

1. Les axes de coordonnées étant les axes de symétrie du rectangle et les coordonnées des sommets $\pm a$, $\pm b$ $(a > b)$, l'aire du rectangle est $4ab$. Supposons d'abord k inférieur à 1.



Une droite Δ répondant à la question découpe dans le cas de la figure un triangle AMN tel que

$$\frac{\text{aire AMN}}{\text{aire MBCDN}} = k.$$

La somme de ces aires étant d'autre part $4ab$, on a

$$\text{aire AMN} = 4ab\,\frac{k}{k+1}.$$

Cette aire est constante comme il est facile de le prévoir. L'enveloppe de Δ est donc une hyperbole équilatère H d'asymptotes AB et AD, résultat que l'on retrouverait aisément par le calcul.

Elle a comme équation

$$(x-a)(y-b) = 2ab\,\frac{k}{k+1},$$

ou

$$xy - ay - bx + ab\,\frac{1-k}{1+k} = 0.$$

On voit que l'arc utile de cette hyperbole est l'arc PQ qui correspond aux deux positions limites BN' et DM' de Δ. L'abscisse de P est d'ailleurs $a\,\dfrac{1-k}{1+k}$ et l'ordonnée de Q, $b\,\dfrac{1-k}{1+k}$.

Il y a d'autres droites telles que Δ_1 qui partagent le rectangle en deux trapèzes AM_1N_1D et M_1BCN_1. Le trapèze AM_1N_1D ayant une aire constante, la somme des segments AM_1 et DN_1 est constante et égale à $4b\,\dfrac{k}{k+1}$. Leur demi-somme est donc $2b\,\dfrac{k}{k+1}$. On en déduit que Δ_1 passe par le point Q. Les positions limites des droites Δ_1 sont QD et QA.

En définitive, si k est compris, comme nous l'avons supposé, entre 0 et 1, l'enveloppe des droites Δ est une courbe PQRS formée de quatre arcs d'hyperbole équilatère symétriques deux à deux par

rapport aux axes de coordonnées. La droite Δ reste tangente à un arc H de cette courbe de P en Q, puis pivote autour de Q, reste tangente à l'arc QR, pivote autour de R et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle soit revenue à sa position primitive.

Enfin il est inutile de supposer k supérieur à 1, car à deux valeurs de k inverses l'une de l'autre correspondent évidemment la même enveloppe.

Nous nous bornerons donc à supposer k allant de 0 à 1. On voit alors que l'enveloppe Γ de Δ a comme positions limites le rectangle ABCD pour $k = 0$ et le point O pour $k = 1$.

2. Calculons l'aire A comprise à l'intérieur de cette courbe Γ.

C'est quatre fois l'aire OPQ limitée à l'hyperbole

$$y = b + 2ab\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{x-a}.$$

Posons pour simplifier le calcul $\frac{2k}{k+1} = \lambda$, ce qui revient à prendre $k = \frac{\lambda}{2-\lambda}$.

On a pour l'aire cherchée

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^{a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\left(b + \frac{ab\lambda}{x-a}\right)dx = 4\int_0^{a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\left(b + \frac{ab\lambda}{x-a}\right)dx \\ &= 4ba(1-\lambda) + 4ab\lambda \mathrm{L}\frac{a - a(1-\lambda)}{a} \\ &= 4ab(1-\lambda) + 4ab\lambda\mathrm{L}\lambda \\ &= 4ab(1-\lambda+\lambda\mathrm{L}\lambda). \end{aligned}$$

En reprenant les notations primitives, on a

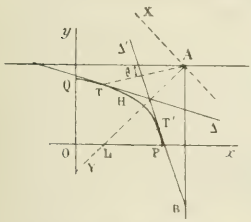
$$A = \frac{4ab}{1+k}\left(1 - k + 2k\mathrm{L}\frac{2k}{1+k}\right).$$

L'étude des variations de cette aire est immédiate. λ varie dans le même sens que k et va de 0 à 1, quand k va de 0 à 1.

D'autre part la dérivée de A par rapport à λ est $4ab\mathrm{L}\lambda$ et est toujours négative. Donc A décroît quand k va de 0 à 1, résultat d'ailleurs évident géométriquement.

3. Considérons un rectangle circonscrit à la courbe Γ. Les côtés de ce rectangle peuvent être, soit des tangentes à des branches hyperboliques, droites que nous appellerons Δ, soit des droites passant par un des points P, Q, R, S, droites que nous appellerons Δ_1. Trois cas peuvent se présenter. Le rectangle peut être formé de quatre droites Δ, nous l'appellerons un rectangle de première espèce ; ou bien de deux droites Δ et deux droites Δ_1, nous l'appellerons rectangle de deuxième espèce. Enfin le rectangle peut être de troisième espèce, ses côtés étant des droites Δ_1.

Il faut chercher pour chacune de ces catégories, quand elle existe, le rectangle d'aire maximum ou minimum et ensuite comparer les valeurs obtenues.



a) Prenons d'abord les rectangles de première espèce formés de quatre droites Δ deux à deux symétriques par rapport à O. La droite Δ étant tangente à l'hyperbole H comprise dans l'angle A, prenons la symétrique Δ' par rapport à Ox du côté suivant du rectangle circonscrit, côté qui est perpendiculaire à Δ. La droite Δ' ainsi définie est tangente à la même hyperbole H et, de plus, si l'on remarque que l'angle de Δ avec Ox est égal à l'angle de Δ' avec Oy, on voit que ces deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice AY de l'angle A. D'ailleurs le rectangle considéré ne sera à conserver que si les deux points de contact T et T' sont sur l'arc PQ de l'hyperbole H.

L'aire du rectangle correspondant est égale à quatre fois le produit des distances de O à deux côtés consécutifs, donc à quatre fois le produit des distances de O aux deux tangentes Δ et Δ'. Evaluons cette aire S.

Il est commode d'effectuer un changement d'axes de coordonnées en prenant AX comme nouvel axe des x et AY comme nouvel axe des y. X, Y, étant les coordonnées d'un point dans le nouveau système, on a $X = \frac{(x-a)-(y-b)}{-\sqrt{2}}$, $Y = \frac{(x-a)+(y-b)}{-\sqrt{2}}$.

L'équation de l'hyperbole H devient

$$Y^2 - X^2 = 4ab\,\frac{k}{1+k} = p^2,$$

en posant $p = \sqrt{4ab\,\frac{k}{1+k}}$. Les coordonnées de O deviennent

$$\alpha = \frac{a-b}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Désignons par X, Y et $-X$, Y les coordonnées de T et T'. Les distances de O aux tangentes en T et T' se calculent immédiatement et l'on trouve ainsi

$$S = \frac{4(Y\beta - X\alpha - p^2)(Y\beta + X\alpha - p^2)}{X^2 + Y^2} = \frac{4(Y\beta - p^2)^2 - X^2\alpha^2}{X^2 + Y^2}.$$

En remplaçant X^2 par $Y^2 - p^2$, on a

$$S = \frac{4(Y^2(\beta^2 - \alpha^2) - 2p^2Y\beta + p^2(\alpha^2 + p^2))}{2Y^2 - p^2}.$$

expression d'ailleurs toujours positive d'après la position de O par rapport à H.

Sa dérivée par rapport à Y est

$$S' = \frac{8p^2}{(2Y^2 - p^2)^2}\,[2\beta Y^2 - Y(\alpha^2 + \beta^2 + 2p^2) + p^2\beta].$$

Les racines sont toujours réelles, car $(\alpha^2 + \beta^2 + 2p^2)^2 - 8\beta^2p^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2(\beta^2 + 2p^2) + (\beta^2 - 2p^2)^2$, quantité toujours positive. Donc S' a deux racines positives puisque ici β est toujours positif. D'ailleurs en substituant p dans S', on a un résultat toujours négatif. Une seule des racines de S' est supérieure à p et acceptable ; nous la désignerons par Y_1.

Cette racine Y_1 doit correspondre à un point situé sur l'arc utile PQ. Son ordonnée Y doit être inférieure à l'ordonnée de P, ordonnée qui est égale à $\frac{2b^2 + p^2}{2b\sqrt{2}}$, comme il est facile de le voir en remarquant que l'équation de OP est $X = Y - b\sqrt{2}$.

Si l'on substitue cette valeur dans S' on trouve un résultat de substitution qui doit être positif si Y_1 est acceptable, ce qui donne la condition

$$p^2(a - 3b) - 2bp^2(a^2 - 4ab + b^2) - 4ab^3(a - b) > 0.$$

Remplaçons p^2 par sa valeur $4ab\,\frac{k}{1+k}$, cette condition devient

$$k^2(2a^2 - 5ab - b^2) - 2ka(a - 3b) - b(a - b) > 0,$$

ou

$$(k - 1)^2k(2a^2 - 5ab - b^2) - b(a - b) > 0.$$

k étant compris entre 0 et 1, on a

$$k(2a^2 - 5ab - b^2) - b(a - b) > 0.$$

Les résultats de la discussion sont faciles à obtenir. La condition est toujours vérifiée si $a < 3b$. Si a est supérieur à $3b$, il faut avoir $k < k'$ avec

$$k' = \frac{b(a - b)}{2a^2 - 5ab - b^2},$$

nombre compris entre 0 et 1.

Enfin, on voit qu'il faut encore écrire que le sommet de l'hyperbole H est bien dans l'angle xOy des axes, sans quoi les rectangles de première espèce ne peuvent pas exister, condition obtenue en écrivant $p < AL$ ou $4ab\dfrac{k}{1+k} < 2b^2$ ou encore $k < \dfrac{b}{2a-b}$, valeur k_0 toujours inférieure à k.

En résumé :

Les rectangles de première espèce n'existent que pour $k < \dfrac{b}{2a-b}$, et, dans ce cas, il y a une aire maximum pour S, donnée par $S(p)$, et une aire minimum donnée par $S(Y_1)$.

L'aire maximum correspond à un carré et est égale à $4(p-\beta)^2$. L'aire minimum correspond à un rectangle défini par la racine supérieure Y_1 de

$$f(Y) = 2\beta Y^2 - Y(\alpha^2+\beta^2+2p^2) + p^2\beta = 0.$$

On a pour cette valeur Y_1

$$S(Y_1) = \frac{4[Y_1^2(\beta^2-\alpha^2) - 2p^2Y_1\beta + p^2(\alpha^2+p^2)]}{2Y_1^2 - p^2} = \frac{4(2Y_1\beta^2 - \alpha^2 - 2p^2\beta)}{4Y_1},$$

puisque Y_1 annule $S'(Y)$. Calculons cette valeur en remarquant que

$$Y_1 = \frac{\alpha^2+\beta^2+2p^2+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+2p^2)^2-8p^2\beta^2}}{4\beta} = \frac{\alpha^2-\beta^2+2p^2+\lambda}{4\beta}.$$

On a

$$S(Y_1) = 2(\beta^2-\alpha^2) - 2p^2\beta\frac{4\beta}{\alpha^2-\beta^2-2p^2+\lambda} = 2(\beta^2-\alpha^2) - 8p^2\beta^2\frac{\alpha^2-\beta^2+2p^2-\lambda}{(\alpha^2+\beta^2+2p^2)^2-\lambda^2}.$$

Mais $(\alpha^2+\beta^2+2p^2)^2-\lambda^2 = 8p^2\beta^2$. Donc

$$S(Y_1) = 2(\beta^2-\alpha^2) - \alpha^2+\beta^2+2p^2-\lambda$$
$$= \beta^2 - 3\alpha^2 - 2p^2 + \sqrt{(\alpha^2+\beta^2+2p^2)^2 - 8p^2\beta^2}.$$

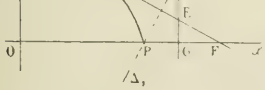
Rappelons que $\alpha = \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$; $\beta = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$; $p^2 = 4ab\dfrac{k}{1+k}$.

b) On aurait pu appliquer les coordonnées polaires à l'étude du cas précédent. Nous allons montrer par exemple comment on peut les introduire pour l'étude des rectangles de deuxième espèce.

Si θ désigne l'angle de Δ avec Ox et par suite l'angle de AT avec AD, on a $AT = \dfrac{p}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ et par suite $AE = 2AT\sin\theta$. Le calcul de EG, puis de GF et enfin OF s'en déduit immédiatement.

$$OF = a - \frac{b - 2\dfrac{p\sin\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}}{\operatorname{tg}\theta} = a + \frac{b - p\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}{\operatorname{tg}\theta}.$$

La distance de O à Δ est $OF\sin\theta$ La distance de O à la perpendiculaire Δ_1 à Δ est $OP\cos\theta$. On en déduit pour l'aire du rectangle de seconde espèce



$$S = 4OF.OP.\sin\theta\cos\theta.$$

Posons $\operatorname{tg}\theta = z^2$, on a

$$OF = a + \frac{b - pz\sqrt{2}}{z^2} \quad \text{et} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

Donc

$$S = 4a\frac{1-k}{1+k}\left(a + \frac{b - pz\sqrt{2}}{z^2}\right)\frac{z^2}{1+z^4} = 4a\frac{1-k}{1+k}\,\frac{az^2 - p\sqrt{2}z + b}{1+z^4}.$$

La dérivée est, par rapport à z,

$$S' = 4a\frac{1-k}{1+k}\,\frac{-2az^3 + 3p\sqrt{2}z^2 - 4bz + 2az - p\sqrt{2}}{(1+z^4)^2}.$$

L'angle θ considéré est aigu et l'on peut supposer que z est essentiellement positif.

Le signe de S' est alors le même que celui de

$$f(z) = -2a\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + p\sqrt{2}\left(3z - \frac{1}{z^3}\right) - 4b.$$

La dérivée est

$$f'(z) = -4a\,\frac{z^4+1}{z^3} + 3p\sqrt{2}\,\frac{z^4+1}{z^4} = \frac{z^4+1}{z^4}(3p\sqrt{2} - 4az).$$

L'application du théorème de Rolle est alors immédiate. On trouve ainsi que si

$$243p^4 - 432abp^2 + 64a^4$$

est positif, il y a deux racines z_1, z_2 positives pour $f(z)$ et par suite pour $S'(z)$. Il n'y en a aucune dans le cas contraire. En remplaçant p^2 par sa valeur on est ramené au signe de

$$k^2(4a^2 + 135b^2) + 4k(2a^2 - 27b^2) + 4a^2.$$

Ce trinome en k n'a de racines réelles que si

$$4(2a^2 - 27b^2)^2 - 4a^2(4a^2 + 135b^2) = 972b^2(3b^2 - a^2)$$

est positif, c'est-à-dire si $a < b\sqrt{3}$.

En cherchant le signe des racines et les classant par rapport à 0 et 1, on en conclut que les racines z_1 et z_2 de $S'(z)$ existent si $a > b\sqrt{3}$. Mais que si $a < b\sqrt{3}$ elles n'existent que si k est compris entre 0 et k_1, ou entre k_2 et 1 en désignant par k_1 et k_2 les deux racines du trinome en k.

Une valeur z_1 ou z_2 de z n'est pas d'ailleurs toujours acceptable. Il faut que le point T soit compris entre P et Q et de plus que Δ_1 ne coupe pas le contour de Γ. Si l'on désigne par θ_1 et θ_2 les angles aigus que font avec Ox les tangentes à H en P et Q, on voit que pour un rectangle de seconde espèce acceptable on doit avoir

$$\operatorname{tg}\theta_1 < \operatorname{tg}\theta < \operatorname{tg}\theta_2,$$

et de plus $\operatorname{tg}\theta < \operatorname{cotg}\theta_2$. Le calcul de $\operatorname{tg}\theta_1$, $\operatorname{tg}\theta_2$ ne présente aucune difficulté et l'on trouve aisément

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{b}{a}\,\frac{2k}{1+k} = \frac{p^2}{4a^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{b}{a}\,\frac{1+k}{2k} = \frac{4b^2}{p^2}.$$

D'ailleurs on a $\operatorname{tg}\theta_2 < \operatorname{cotg}\theta_2$ si $k > k_0$ et $\operatorname{tg}\theta_2 > \operatorname{cotg}\theta_2$ si $k < k_0$, la valeur de k_0 ayant déjà été définie, $k_0 = \dfrac{b}{2a-b}$.

En remarquant que $\operatorname{tg}\theta = z^2$, on voit que si $k > k_0$ on doit avoir

$$\frac{p}{2a} < z < \frac{2b}{p}.$$

Si $k < k_0$ on doit avoir

$$\frac{p}{2a} < z < \frac{p}{2b}.$$

$S'(z)$ est du signe de $F(z) = -2az^4 + 3p\sqrt{2}z^3 - 4bz + 2az - p\sqrt{2}$. Les résultats de substitution montrent que

$F\left(\dfrac{p}{2a}\right)$ est du signe de $k^2(3b^2 - a^2)(\sqrt{2}-1) - 2k[a^2(\sqrt{2}-1) + b^2] - a^2(\sqrt{2}-1)$,

$F\left(\dfrac{p}{2b}\right)$ est du signe de $k^2 b\sqrt{2}(3a^2 - b^2) - a(a^2 + b^2) + 2kb^2\sqrt{2} + b^2 a - b\sqrt{2})$,

$F\left(\dfrac{2b}{p}\right)$ est du signe de $k^2(3b^2 - a^2)(\sqrt{2}-1) - k^2(6\sqrt{2} - 7)b^2 + a^2 + k(3\sqrt{2} - 5)b^2 - b^2$.

k ne pouvant varier que de 0 à 1, on en déduira que $F\left(\dfrac{p}{2a}\right)$ est toujours négatif, quel que soit le signe de $a - b\sqrt{3}$. Comme d'autre part $\dfrac{3p\sqrt{2}}{4a}$ est compris entre z_1 et z_2 et que cette valeur est supérieure à $\dfrac{p}{2a}$, on voit que $\dfrac{p}{2a}$ est toujours inférieur aux deux racines z_1 et z_2 qui sont acceptables.

Quant aux conditions $z < \frac{2b}{p}$ ou $z < \frac{p}{2b}$ leur étude est compliquée. Il faudra chercher pour chaque valeur numérique de k et de $\frac{a}{b}$ quels sont les résultats qu'elle donne.

c) L'étude des rectangles de troisième espèce montre immédiatement que l'aire d'un tel rectangle est maxima pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Elle est alors égale à $ab\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$. Elle est minima quand θ a la plus petite valeur possible, c'est-à-dire quand θ est égal au plus grand des deux angles $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ et θ_2, soit $\frac{\pi}{2} - \theta_1$. L'aire est alors égale à

$$ab\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \cos^2\theta_1 = ab\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \frac{16a^2}{p^2 + 16a^2} = \frac{a^3b(1-k)^2}{a^2(1+k)^2 + b^2k^2}.$$

Il resterait maintenant à classer les diverses valeurs de S ainsi obtenues. Il faudrait pour cela classer d'abord les diverses valeurs de a : k_0, k_1, k_2 et les racines de $F\left(\frac{p}{2b}\right)$, $F\left(\frac{2b}{p}\right)$. Chacun de ces classements conduit à classer des valeurs du rapport $\frac{a}{b}$. Enfin dans chacun des cas ainsi obtenus, il faudrait comparer les diverses valeurs de S obtenues pour chacune des trois espèces de rectangles. Il est facile de voir que certains de ces classements sont à peu près impossibles si l'on garde les deux paramètres $\frac{a}{b}$ et k. En pratique il faut, et c'est la seule méthode, pour chaque valeur de $\frac{a}{b}$ et de k, calculer ces diverses aires pour les classer ; d'ailleurs certains de ces calculs comme celui de $S(z_1)$ et $S(z_2)$ ne peuvent se faire que par approximations. Les calculs qui précèdent ont servi simplement à préparer un tel classement. A. S.-L.

Solutions satisfaisantes : MM. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône ; R. Malaise, à Denain ; R. Boyer, lycée de Nice.

2013. — *On considère une parabole et le triangle normal circonscrit qui correspond à un point* M *du plan de cette parabole.*

1° *Trouver le lieu des points* M *pour lesquels ce triangle est isocèle, ainsi que le lieu du sommet* N *où se coupent les côtés égaux. Trouver aussi le lieu des deux autres sommets.*

2° *Le lieu du point* M *est une cubique* R. *Trouver les parties de cette cubique qui correspondent aux points* M *pour lesquels le triangle indiqué est réel et dire quelles sont les positions correspondantes du point* N.

3° *Voir ce qui arrive quand le point* M *est un des points réels d'intersection de la cubique* R *avec la parabole ou avec la développée de cette parabole. Où est le point* M *qui correspond à un triangle équilatéral ?*

1. La parabole donnée est représentée par $y^2 - 2px = 0$.

Désignons par α et β les coordonnées du sommet N adjacent aux deux côtés égaux, par (α', β') celles du sommet N', par (α'', β'') celles du sommet N''. α' et α'', β' et β'' s'expriment en fonction de α et β au moyen des équations connues qui donnent les coordonnées des points communs aux deux courbes représentées par les relations

$$(a) \qquad x_1 = \frac{2\beta^2 - p\alpha + p^2}{p}, \qquad y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p},$$

dans lesquelles on considère α et β comme coordonnées courantes. On trouve ainsi ces coordonnées

des points communs étant α, α', α'' et β, β', β'',

$$(a') \qquad \alpha = \frac{\beta}{p}(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}), \qquad \beta = -\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}),$$

$$\alpha = -\frac{\beta}{p}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}), \qquad \beta = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}}{2}.$$

Exprimons que les distances du sommet $N(\alpha, \beta)$ aux deux sommets $N'(\alpha', \beta')$ et $N''(\alpha'', \beta'')$ sont égales :

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2} = \sqrt{(\alpha - \alpha'')^2 + (\beta - \beta'')^2}.$$

Après avoir élevé les deux membres de cette équation au carré et après avoir substitué à (α', β'), (α'', β'') leurs valeurs données par les relations (a'), on trouve l'équation

$$(1) \qquad 4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2 = 0,$$

qui est celle du lieu cherché du sommet N.

En remarquant qu'en vertu des relations (a'), α' et α'' sont les racines de l'équation

$$px^2 + 2\beta^2 x + 2\alpha\beta^2 = 0,$$

on peut désigner α' et α'' par x.

De même, désignons β' et β'' par y : car en vertu de ces relations (a'), β' et β'' sont les racines de l'équation $2y^2 + 2\beta y + p\alpha = 0$. On trouve alors

$$(a'') \qquad \alpha = \frac{y}{p}(-y + \sqrt{y^2 - 2px}),$$

$$\beta = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 2px}}{2}.$$

Il suffit de porter ces valeurs de α et de β dans l'équation (1), pour obtenir immédiatement l'équation du lieu décrit par N′ et par N″,

$$(2) \qquad 32y^4 - 4p(20x + 3p)y^2 - p^2(2x + 3p)^2 = 0.$$

Si on élimine α et β entre les relations (a) et l'équation (1), on trouve l'équation demandée du lieu décrit par (x_1, y_1), c'est-à-dire l'équation de la cubique R :

$$(3) \qquad 27py_1^2 - (2x_1 - 5p)^2\left(x_1 - \frac{p}{4}\right) = 0.$$

Deuxième méthode pour obtenir le lieu des sommets N′ et N″. — On peut, sans recourir aux relations (a'') et en se servant uniquement des formules connues (a), déduire le lieu des sommets N′ et N″ des équations (1) et (3). En effet, à un point (x_1, y_1) (point d'émission des normales) correspond non seulement le sommet $N(\alpha, \beta)$ du triangle normal circonscrit, mais également le sommet N′ et le sommet N″. Si donc, dans l'équation (3) qui donne le lieu du point (x_1, y_1) on remplace les coordonnées x_1 et y_1 par les valeurs $x_1 = \frac{2\beta^2 - p\alpha + p^2}{p}$ et $y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$, l'équation ainsi obtenue représentera le lieu des trois sommets N, N′, N″. Son premier membre devra donc se décomposer en deux facteurs. Le premier facteur, égalé à zéro, sera l'équation déjà connue, $4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2 = 0$, du lieu du point N. Donc, en divisant ce premier membre par $4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2$, on trouvera le second facteur qui est le premier membre de l'équation du lieu des points N′ et N″. Effectuons donc dans l'équation (3) le remplacement indiqué de x_1 et de y_1 par leur valeur en fonction de α et de β; nous aurons

$$128\beta^6 - 192p\alpha\beta^4 + 144p^2\beta^4 - (336p^2\alpha^2 - 44p^3\alpha)\beta^2 - 16p^3\alpha^3 - 36p^4\alpha^2 + 27p^6 = 0.$$

Divisons le premier membre de cette équation par $4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2$; nous trouverons le second facteur, lequel, égalé à zéro, sera l'équation cherchée du lieu des sommets N′ et N″ :

$$(2) \qquad 32\beta^4 - 4p(20\alpha + 3p)\beta^2 - p^2(2\alpha + 3p)^2 = 0.$$

Pour obtenir les coordonnées des points communs à la cubique R et à la parabole donnée, éliminons y^2 entre l'équation $y^2 - 2p\alpha = 0$ de cette parabole et l'équation (3) de cette cubique. Le résultat de l'élimination est

$$16x^3 - 84px^2 - 96p^2x + 25p^3 - (2x + p)^2(4x - 25p) = 0.$$

L'abscisse double $x = -\frac{p}{2}$ correspond dans les deux courbes à deux coordonnées imaginaires, $\pm pi$. L'abscisse $\frac{25p}{4}$ correspond aux ordonnées $\pm\frac{5p\sqrt{2}}{2}$ des deux points d'intersection réels A et A', symétriques par rapport à l'axe des x. Cherchons maintenant les coordonnées des points communs à la cubique R et à la développée $27py^2 - 8(x-p)^3 = 0$ de la parabole donnée. Le résultat de l'élimination de y^2 entre cette dernière équation et celle de la cubique R est

$$16x^3 - 12px^2 - 24p^2x - 7p^3 = (2x+p)^2(4x-7p) = 0.$$

On voit, comme précédemment, que l'abscisse $x = \frac{7p}{4}$ correspond seule à des points réels B et B', dont les ordonnées sont $\pm\frac{p\sqrt{2}}{4}$, et que ces points sont également symétriques par rapport à l'axe des x.

Pour trouver les coordonnées du point (x_1, y_1) lorsqu'il occupera sur la cubique R une position telle que le triangle normal circonscrit correspondant à ce point soit équilatéral, nous emploierons deux méthodes.

1re méthode. — Les points communs aux deux courbes représentées par les équations (1) et (2) sont tels qu'on a simultanément $NN' = NN''$ et $NN' = N'N''$, puisque pour ces points communs le lieu du point N est le même que le lieu du point N' ou du point N''. Il en résulte que lorsque le point N se trouvera à un des points d'intersection des courbes (1) et (2), on aura $NN' = NN'' = N'N''$, c'est-à-dire un triangle équilatéral. Pour trouver les coordonnées des points communs aux deux courbes (1) et (2), éliminons β^2 entre ces deux équations. Le résultat de l'élimination est

$$\alpha(p-\alpha)^2 = 0.$$

L'abscisse $\alpha = p$ ne convient pas ; car à cette abscisse correspondent les deux ordonnées imaginaires conjuguées données par l'équation $4\beta^2 + p^2 = 0$. A l'abscisse $\alpha = 0$ correspondent les deux ordonnées réelles $\beta = \pm\frac{p\sqrt{3}}{2}$. Le système $\left(\alpha = 0,\ \beta = +\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$ donne un triangle équilatéral. A ces coordonnées de N correspondent les coordonnées de N' et N'' $\left(0,\ -\frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3p}{2},\ 0\right)$. En prenant $\beta = -\frac{p\sqrt{3}}{2}$, on retomberait sur le même triangle équilatéral. Si on introduit ces valeurs dans les formules (a), on trouve que les coordonnées du point d'émission (x_1, y_1) des trois normales, dans le cas du triangle équilatéral sont $\frac{5p}{2}$ et 0. Ce sont celles du point double C de la cubique R.

2e méthode. — Les relations (a') donnent

$$\overline{N'N''}^2 = (\alpha' - \alpha'')^2 + (\beta' - \beta'')^2 = \frac{(4\beta^2 + p^2)(\beta^2 - 2p\alpha)}{p^2}.$$

Si le triangle normal circonscrit est équilatéral, le sommet $N(\alpha, \beta)$ est à une distance de la base N'N'' égale à $\frac{\overline{N'N''} \times \sqrt{3}}{2}$. Le côté N'N'' est représenté par l'équation $px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0$. Une deuxième expression de la distance du point α, β à ce côté est donc $\frac{p\alpha + 4\beta^2}{\sqrt{4\beta^2 + p^2}}$. En égalant les deux expressions du carré de cette distance, il vient

$$(4) \qquad 4p^2(4\beta^2 + p\alpha)^2 - 3(4\beta^2 + p^2)^2(\beta^2 - 2p\alpha) = 0.$$

Ainsi, dans le cas du triangle équilatéral, les coordonnées α et β satisfont à la fois aux deux équations (1) et (4). En éliminant β^2 entre ces deux équations, on obtient comme précédemment

$$\alpha(p-\alpha)^2 = 0.$$

Cherchons maintenant les coordonnées des sommets du triangle et la longueur de ses côtés égaux, lorsque le point (x_1, y_1) occupe les diverses positions de l'énoncé.

Supposons d'abord ce point en A. Les coordonnées de ce point A ont été trouvées précédemment : elles sont $\frac{25p}{4}$ et $+\frac{5p\sqrt{2}}{2}$.

En portant $x_1 = \frac{25p}{4}$ dans la relation $x_1 = \frac{2\beta^2 - p\alpha + p^2}{p}$, il vient

$$8\beta^2 - 4p\alpha = 24p^2.$$

L'équation (1) donne $4\beta^2 + 4p\alpha = 3p^2$. En résolvant ce système, on trouve $\alpha = -\frac{5p}{4}$, $\beta = +p\sqrt{2}$.

En employant la formule connue $y_1 = -\frac{2\alpha\beta}{p}$, on voit que le signe + convient seul pour l'expression de β.

Les relations a' font connaître les coordonnées (α, β'), (α', β') des sommets N et N' :

$$\alpha' = p, \quad \beta' = -\frac{5p\sqrt{2}}{4}.$$

$$\alpha'' = -5p, \quad \beta'' = \frac{p\sqrt{2}}{4}.$$

On calcule $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\alpha - \alpha''$ et $\beta - \beta''$, et on trouve

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2} = \sqrt{(\alpha - \alpha'')^2 + (\beta - \beta'')^2} = \frac{9p\sqrt{3}}{4}, \text{ longueur des côtés égaux.}$$

Lorsque le point (x_1, y_1) vient en A', on obtient un triangle symétrique par rapport à l'axe des x de celui qui correspond à la position A du point (x_1, y_1).

Pour que d'un point donné (x_1, y_1) on puisse mener trois normales réelles à la parabole donnée, il faut que ce point soit situé à l'intérieur de la développée de cette parabole. Or on sait que cette développée rencontre la parabole en deux points symétriques par rapport à l'axe des x $(4p, \pm 2p\sqrt{2})$.

On construit la cubique R, la parabole donnée, la développée de cette parabole et la parabole lieu du point N. Les coordonnées des deux points réels B et B' communs à la cubique R et à la développée de la parabole donnée sont, ainsi qu'on a vu, $x = \frac{7p}{4}$, $y = \pm\frac{p\sqrt{2}}{4}$.

Tous les points (x_1, y_1) de la boucle MBB' étant extérieurs à la développée sont les points d'émission d'une normale unique. A ces points correspondent sur le lieu du point N les parties DO'D' de la parabole

$$4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2 = 0,$$

qui se trouvent à l'intérieur de la parabole donnée. Lorsque le point (x_1, y_1) est en B ou B', on a deux normales confondues ; en ce cas le triangle normal circonscrit correspondant à (x_1, y_1) se réduit à un seul côté, car les deux sommets N' et N'' sont confondus en un seul point. On a alors

$$\beta^2 - 2p\alpha = 0,$$

le point N se trouve en un des points (D, D')

$$\left(\alpha = -\frac{p}{4}, \quad \beta = \pm\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$$

d'intersection de la parabole donnée et de la parabole (1) lieu du point N. Les coordonnées des points N' et N'' en ce cas seront

$$\alpha' = \alpha'' = -\frac{p}{2}, \quad \beta' = \beta'' = +\frac{p\sqrt{2}}{4}, \qquad NN' = NN'' = \frac{3p\sqrt{3}}{4}$$

Lorsque le point (x_1, y_1) dépasse les positions B et B′ sur la cubique R, pour se diriger vers les branches infinies de cette cubique, il reste intérieur à la développée. Le point N se déplace alors sur la parabole (1), à partir des points d'intersection (D, D′) de cette parabole et de la parabole donnée et se dirige dans le sens de la partie négative de l'axe des x. En ce cas le triangle normal reste toujours réel, parce que le point (x_1, y_1) sera le point d'émission de trois normales réelles. Au moment où le point (x_1, y_1) se trouve en C, au point double de la cubique R, le point N sera en un des points d'intersection (E, E′) de l'axe des y et de la parabole $4\beta^2 + 4p\alpha - 3p^2 = 0$ (ses coordonnées seront, ainsi qu'on a vu, $\alpha = 0$, $\beta = \pm \frac{p\sqrt{3}}{2}$). Ce sont les positions du point (x_1, y_1) et du point N, [C, pour (x_1, y_1) ; E et E′ pour N] correspondant à un triangle équilatéral. La longueur du côté de ce triangle s'obtient en portant dans la valeur de N′N″, trouvée précédemment, $\alpha = 0$ et $\beta^2 = \frac{3p^2}{4}$. On aura

$$NN' = NN'' = NN''' = p\sqrt{3}.$$

Remarque. — La cubique R jouit de la propriété d'être *le lieu des centres des cercles tangents à la parabole et passant par son foyer*. L'étude de ce dernier lieu se trouve développée longuement dans les *Nouvelles Annales;* c'est pourquoi on a jugé inutile de la reprendre ici. (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, page 93.)

CAMILLE MASSING.

TRIGONOMÉTRIE

2007. — *Résoudre l'équation*

$$\cos 2x + \cos x - 1 = \sin \frac{3x}{2}.$$

En formant l'équation en $\sin\frac{x}{2}$, *constater que cette équation du 4e degré a pour racine* $\sin\frac{x}{2} = 1$ $(x = 180°)$, *et calculer les trois autres racines.*

Posons $\sin\frac{x}{2} = u$; nous aurons successivement

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos 2x = 1 - 8u^2(1 - u^2);$$

$$\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2} = -2u^2,$$

et

$$\sin\frac{3x}{2} = 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2},$$

$$\sin\frac{3x}{2} = 3u - 4u^3.$$

L'équation proposée devient donc

$$8u^4 + 4u^3 - 10u^2 - 3u + 1 = 0.$$

Elle admet visiblement la racine $u = 1$, et, une fois le facteur $u - 1$ supprimé, elle se réduit à

$$8u^3 + 12u^2 + 2u - 1 = 0.$$

Cette nouvelle équation admet la racine $-\frac{1}{2}$, et se réduit, quand on supprime le facteur $u + \frac{1}{2}$, à

$$8u^2 + 8u - 2 = 0.$$

Les racines de cette dernière équation sont

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2};$$

la première, $u = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, est plus grande que 1 en valeur absolue et ne convient pas ; la seconde, $u = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, est positive et plus petite que 1 : elle convient.

Les quatre racines de l'équation en u sont donc

$$\sin\frac{x}{2} = 1, \qquad \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{x}{2} = -\frac{1+\sqrt{2}}{2};$$

les arcs correspondants sont

$$x = (2K+1)180^\circ,$$

$$x = 4K.180^\circ \pm 60^\circ \qquad \text{et} \qquad (4K+2)180^\circ - 60^\circ,$$

$$x = 4K.180^\circ \pm 23^\circ 54' \qquad \text{et} \qquad (4K+2)180^\circ - 23^\circ 54'.$$

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions : MM. Rochon, à Laon ; A. Ledoux ; Roux, instituteur-adjoint à Chalon-sur-Saône ; J. Le Bras ; L. Simon, à Fourmies ; R. Prévost, à Laon ; A. Courtois, à Sedan ; R. Dufresne, lycée Charlemagne ; H. Frobert, Paris ; N. Savary, 61e d'Artillerie ; R. Chirol, à Moulins ; R. Boyer, lycée de Nice ; L.-A. Gioan, à Grasse ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Stévenot, 6e d'artillerie, à Toul.

QUESTIONS PROPOSÉES

2097. — On considère une conique (C) et un point quelconque P ; démontrer que les tangentes communes à la conique (C) et à un cercle quelconque de centre P sont tangentes à une conique qui a pour foyers les points de rencontre de (C) avec la polaire de P. R. Bouvaist.

2098. — Soient A et B deux points fixes d'un cercle O ; M un point variable du plan de ce cercle ; T le point de contact d'une des tangentes à O issues de M.

1° Le lieu des points M tels que $MT^2 = \lambda MA + \mu MB$ est une quartique ;

2° Condition pour que cette quartique devienne une cubique ; la construire lorsque $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

3° Cas où $\lambda = 0$, ou bien $\mu = 0$. E.-N. Barisien.

2099. — On considère les cercles qui passent par un point fixe A et qui interceptent sur une droite (D) un segment BC qui est vu de A sous un angle donné α. Trouver :

1° L'enveloppe de ces cercles ;

2° Le lieu de leur centre ;

3° Le lieu du centre du cercle d'Euler du triangle ABC. Dr Werner Gaedecke.

2100. — On considère la courbe définie par les trois équations

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad y = a \operatorname{sh} t, \qquad z = at,$$

dans lesquelles t désigne le temps, et on oriente cette courbe dans le sens du mouvement.

1° Trouver l'arc de cette courbe, les cosinus directeurs de la tangente, et montrer que cette courbe est l'hélice d'un cylindre dont on construira la base. Trouver toutes les hélices de ce cylindre.

2° Trouver l'hodographe du mouvement et le lieu du point obtenu en portant à la suite du vecteur vitesse un vecteur équipollent au vecteur accélération.

3° Former l'équation du plan osculateur et déterminer l'enveloppe de sa trace sur le plan des zx. Construire cette courbe.

4° Une courbe variable, qui dépend d'une constante arbitraire c est donnée paramétriquement par les deux équations $x = f(t, c)$, $y = g(t, c)$; indiquer le moyen d'obtenir les courbes orthogonales à celles de ce faisceau. Appliquer au faisceau formé dans le plan des zx par la projection de la courbe donnée, quand la constante a varie. E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Novembre 1912. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA COURBURE DES CONIQUES

par M. G. Valiron.

1. Je me propose de retrouver par une autre méthode les constructions du centre de courbure en un point d'une conique que j'ai indiquées dans un article précédent (*Revue de Mathématiques spéciales*, février 1911, p. 107). Je m'appuyerai sur le théorème suivant :

Le rapport des rayons de courbure en un point de contact de deux courbes se conserve par projection.

Cette proposition connue résulte immédiatement du fait que l'indicatrice de Dupin en un point d'un cône est formée de deux parallèles à la génératrice, et qu'en deux points d'une même génératrice les indicatrices sont homothétiques par rapport au sommet. On peut également la démontrer par des considérations de géométrie plane : une perspective est une transformation homographique, or si nous considérons la courbe C, $y = f(x)$, et un point $M(x, y)$ de cette courbe, r le rayon de courbure en ce point (compté avec un signe), et si nous effectuons la transformation $X = \frac{ax + by + c}{a_2x + b_2y + c_2}$, $Y = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$, au point M' de la courbe C' transformée de C, le rayon de courbure R est donné par la formule $R = \left(\frac{X'^2 + Y'^2}{X'Y'' - X''Y'}\right)^{\frac{3}{2}}$. Or X' et Y' ne dépendent que de x, y, y', et un calcul immédiat montre qu'il en est de même pour $\frac{X'Y'' - X''Y'}{y''}$, par suite

$$R = \frac{F(x, y, y')}{y''} = G(x, y, y') \times r :$$

$F(x, y, y')$ et $G(x, y, y')$ étant des fonctions rationnelles de x, y, y'. Il résulte de là que, si pour deux courbes, x, y, y' ont les mêmes valeurs, ce qui a lieu lorsqu'elles sont tangentes, on a

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r}.$$

La proposition est donc démontrée.

2. Démontrons maintenant la proposition fondamentale suivante :

Le centre de courbure en un point M *d'une conique est l'intersection de l'hyperbole d'Apollonius qui touche la conique au point* M, *avec la normale au point* M.

On sait que toute hyperbole d'Apollonius Γ coupe la conique en quatre points (trois seulement dans le cas de la parabole), en lesquelles les normales concourent en un point de Γ ; pour l'hyperbole tangente en M, deux des normales sont confondues avec la normale en M ; leur point d'intersection est le centre de courbure correspondant, ce qui démontre la proposition.

Pour déduire de là une construction du centre de courbure, il suffit d'appliquer le théorème de Pascal. On obtient pour les coniques à centre trois constructions distinctes : si O est le centre, Ox, Oy les axes, M le point donné, T, T' les intersections de la tangente en M avec Ox, Oy, N le point d'intersection de la normale en M avec l'axe Ox :

1° La parallèle à MT' menée par N coupe OM en P ; la parallèle à Oy menée par P coupe la normale au centre de courbure C ;

2° La droite NT' coupe la parallèle à Ox menée par M en Q ; la parallèle à Oy menée par Q coupe la normale au centre de courbure C ;

3° La parallèle à MN menée par T' coupe la parallèle à Ox menée par M en R, la droite RO passe par le centre de courbure C.

Ces trois constructions ont déjà été indiquées dans l'article cité, la première qui n'exige que le tracé de deux droites autres que les axes, la tangente et la normale, est bien connue (construction de Mannheim) ; la troisième s'applique à la parabole (O étant à l'infini sur Ox), elle montre immédiatement que : *Dans une parabole le centre de courbure est l'homothétique dans le rapport* -2, *par rapport au point d'incidence de la normale, du point où cette droite coupe la directrice.*

En appliquant la première construction à l'hyperbole équilatère, on obtient le résultat bien connu :

Dans une hyperbole équilatère le centre de courbure est l'homothétique dans le rapport $-\frac{1}{2}$, *par rapport au point d'incidence de la normale, du deuxième point où la normale coupe la courbe.*

En effet (*fig.* 1), comme on a, d'après une propriété bien connue, $\widehat{MON} = \widehat{MNO}$, on a $MC = MP$; or le diamètre conjugué à la direction MN est perpendiculaire à OM ; il coupe donc MN en un point R tel que $MR = MP$, car les deux triangles MNP, MOR sont égaux ; il résulte de là que $MR = MC$, ce qui établit la proposition.

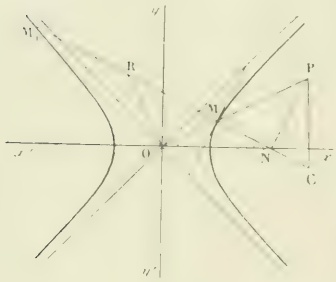


Fig. 1.

3. Cette proposition permet d'énoncer le théorème fondamental sous la forme suivante :

En un point M *d'une conique, le centre de courbure est l'homothétique dans le rapport* -2 *du centre de courbure en* M *de l'hyperbole d'Apollonius qui est tangente à la courbe en ce point, le centre d'homothétie étant le point* M.

Or les hyperboles d'Apollonius d'une conique à centre sont circonscrites au triangle formé par les axes et la droite de l'infini, c'est-à-dire sont harmoniquement circonscrites à la conique, et si l'on considère une conique Γ harmoniquement circonscrite à une conique C, on peut d'une infinité de façons faire une perspective telle que la conique Γ' correspondant à Γ soit hyperbole d'Apollonius de C correspondant à C. Nous obtenons alors, en utilisant le théorème rappelé au début, la proposition suivante :

Si la conique Γ *est harmoniquement circonscrite à* C *et que ces coniques se touchent au point* M, *on a entre les rayons de courbure* R_Γ *et* R_C *au point* M, *la relation*

$$R_C = -2R_\Gamma.$$

4. Comme application, considérons en un point M d'une conique le cercle qui est tangent en M et harmoniquement circonscrit à la conique ; d'après le théorème de Faure, ce cercle est orthogonal au cercle orthoptique, son diamètre est, d'après la proposition précédente, égal et opposé au rayon de courbure de la conique en M. Ainsi :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est égal et opposé au diamètre du cercle tangent en ce point et orthogonal au cercle orthoptique (*Construction de* STEINER).

5. Comme autre application, considérons une conique à centre Γ donnée par deux diamètres conjugués Ox, Oy, un point M et sa tangente T'MT, qui coupe Ox en T, Oy en T'. La parabole π, qui est tangente à Ox, Oy et à la conique Γ au point M, est harmoniquement inscrite dans Γ et lui est tangente ; d'après le théorème du n° 3, son centre de courbure C_1 en M est l'homothétique dans le rapport -2 du centre de courbure C de Γ (par rapport à M) ; ce qui revient à dire que le centre de courbure C de la conique Γ au point M est le point d'intersection de la normale en M avec la directrice de la parabole π. Or cette directrice s'obtient immédiatement par la construction suivante (*fig.* 2) : on prend l'intersection R de la parallèle à la normale MN menée par T' avec la perpendiculaire à Oy menée par M ; l'intersection R' de la parallèle à la normale menée par T avec la perpendiculaire à Ox menée par M ; *la droite* RR' *est la directrice et coupe* MN *au centre de courbure* C. Le fait que le point R est sur la directrice résulte immédiatement de ce que le triangle formé par MT' et Oy est circonscrit à la parabole et que R est le point de concours des hauteurs.

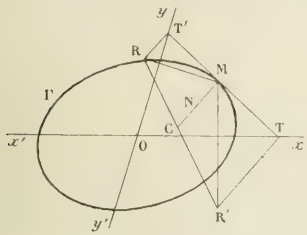


Fig. 2.

La construction ainsi obtenue est la généralisation de la troisième construction du n° 2, elle n'exige que le tracé de parallèles lorsqu'on suppose que les directions perpendiculaires à Ox et Oy ont été déterminées.

6. Considérons maintenant une conique I inscrite dans un triangle ABC, et une conique C circonscrite à ce triangle et tangente à I au point M ; soient R_I, R_C les rayons de courbure de ces deux coniques au point M (comptés dans un sens arbitraire sur la normale), il existe une conique Γ conjuguée au triangle ABC et tangente à I en M, soit R_Γ son rayon de courbure ; comme la conique C est harmoniquement circonscrite à Γ, on a

$$R_C = -\frac{1}{2} R_\Gamma ;$$

et comme Γ est harmoniquement circonscrite à I, $R_\Gamma = -\frac{1}{2} R_I$, donc $R_C = \frac{1}{4} R_I$.

Ainsi :

Lorsqu'une conique C *est circonscrite à un triangle circonscrit à une conique* I, *et lui est tangente en* M, *son rayon de courbure en* M *est le quart de celui de* I.

7. Comme application, on obtient la construction du centre de courbure en un point M d'une hyperbole H dont les asymptotes sont Ox, Oy. Si on prend l'homothétique de cette hyperbole par rapport au point M et dans le rapport $\frac{1}{2}$, on aura une hyperbole H' passant par le point O, les points à l'infini des axes et tangente à l'hyperbole H en M ; son centre de courbure en M est l'homothétique de celui de H. Cette hyperbole H' est circonscrite à un triangle circonscrit à la parabole qui est tangente à Ox, Oy et à l'hyperbole H au point M ; son centre de courbure est l'homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ du centre de courbure de cette parabole (le centre d'homothétie étant le point M). Par suite, le centre de courbure en M à l'hyperbole H est le symétrique du point S où la normale MN coupe la directrice de la parabole tangente à H au point M et tangente à Ox et Oy. On a appris à construire ce point S au n° 5.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2010. — *On considère toutes les coniques* (C) *conjuguées par rapport à un triangle* OAB *rectangle en* O *et qui sont vues sous un angle droit du sommet* C *du rectangle construit sur* OA *et* OB *et opposé à* O.

1° *Former l'équation générale de ces coniques et trouver le lieu de leurs centres.*

2° *Trouver l'enveloppe de la polaire du point* C *et le lieu du point de contact d'une tangente menée de ce point à la conique variable* (C).

3° *Trouver le lieu d'un point* M *tel que les polaires du point* C *par rapport aux deux coniques qui passent en ce point soient rectangulaires.*

1. Prenons pour axe des x la droite OA, et pour axe des y, la droite OB ; posons $OA = a$, $OB = b$, et désignons par $Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + \ldots = 0$ l'équation tangentielle de la conique (C). Les dérivées partielles du premier membre de l'équation de cette conique sont

$$Au + B''v + B'w, \qquad B''u + A'v + Bw, \qquad B'u + Bv + A''w,$$

et donnent les coordonnées homogènes du pôle de la droite (u, v, w) ; pour l'axe des x, les coordonnées sont $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$, et celles du pôle, B'', A', B ; ce point doit être le point B de coordonnées 0, b, 1 ; donc $B'' = 0$, $A' = Bb$; pour l'axe des y, $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$ et le pôle est le point A, B'', B' ; ce point doit coïncider avec le point A de coordonnées a, 0, 1 ; donc $A = B'a$, et l'équation générale des coniques conjuguées par rapport au triangle OAB est

$$B'au^2 + Bbv^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu = 0.$$

Il reste à écrire que cette conique est vue du point C (a, b) sous un angle droit.

A cet effet, désignons par

$$y - b = m(x - a)$$

une droite qui passe au point C ; nous écrivons qu'elle est tangente en remplaçant u par m, v par -1 et w par $b - ma$ dans l'équation tangentielle ; celle-ci devient

$$B'am^2 + Bb - A''(b - ma)^2 - 2B(b - ma) + 2B'm(b - ma) = 0 \ ;$$

c'est une équation du second degré en m, qui donne les deux coefficients angulaires des tangentes issues du point C. En écrivant qu'elles sont rectangulaires, on trouve

$$A''(a^2 + b^2) - B'a - Bb = 0, \qquad \text{ou} \qquad A'' = \frac{B'a + Bb}{a^2 + b^2}$$

et l'équation générale des coniques (C) est

$$au^2 + \lambda bv^2 + 2\lambda vw + 2uw + \frac{a + \lambda b}{a^2 + b^2} w^2 = 0.$$

Ces coniques forment donc un faisceau linéaire tangentiel.

Le centre de cette conique a pour équation $f' = 0$, c'est-à-dire

$$u - \lambda v + \frac{a + \lambda b}{a^2 + b^2} w = 0 \ ;$$

ses coordonnées cartésiennes sont $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a + \lambda b}$, $y = \dfrac{\lambda(a^2 + b^2)}{a + \lambda b}$.

L'élimination de λ entre ces deux équations est immédiate et le lieu des centres est

$$ax + by = a^2 + b^2.$$

C'est une droite menée par le point C perpendiculairement à OC.

2. Appelons u, v, w la polaire du point C ; en écrivant que son pôle est le point (a, b), nous

aurons les relations

$$au + w = \theta a, \qquad \lambda bv + \lambda w = \theta b, \qquad u + \lambda v + \frac{a + \lambda b}{a^2 + b^2} w = \theta,$$

et il n'y a plus qu'à éliminer λ et θ pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe de la polaire du point C.

Le calcul se fait aisément en multipliant les deux premières équations par a et b et les ajoutant ; on trouve ainsi

$$\frac{a^2u + \lambda b^2v + w(a + \lambda b)}{a^2 + b^2} = \theta.$$

Tenant compte alors de la dernière équation, nous obtenons

$$\frac{a^2u + \lambda b^2v}{a^2 + b^2} = u + \lambda v,$$

ou

$$b^2u + \lambda a^2v = 0,$$

de là nous tirons $\lambda = -\dfrac{b^2u}{a^2v}$, et, en portant dans la relation $\lambda \dfrac{bv + w}{au + w} = \dfrac{b}{a}$, qui dérive elle-même des deux premières relations, nous obtenons enfin l'enveloppe cherchée

$$bu(bv + w) + av(au + w) = 0.$$

C'est une parabole inscrite dans le triangle ABO.

Nous remarquerons en passant que le coefficient angulaire de la polaire du point C est $m = -\dfrac{u}{v} = \dfrac{\lambda a^2}{b^2}$. Ceci nous servira dans la dernière partie.

Appelons maintenant (x, y) le point de contact d'une tangente à la conique (C) menée par le point C. Nous aurons à exprimer qu'une droite u, v, w passe aux points C et (x, y), qu'elle a pour pôle le point (x, y) et qu'elle touche la conique (C) ; mais ce dernier point est une conséquence des autres relations. Nous avons ainsi

$$ua + vb + w = 0, \qquad ux + vy + w = 0,$$

$$\theta x = au + w, \qquad \theta y = \lambda bv + \lambda w, \qquad \theta = u + \lambda v + \frac{a + \lambda b}{a^2 + b^2} w;$$

et il faut éliminer u, v, w, θ et λ entre ces cinq équations. La première donne $w = -ua - vb$, et les autres deviennent

$$u(x - a) + v(y - b) = 0,$$

$$\theta x = -bv, \qquad \theta y = -\lambda au, \qquad \theta = \frac{(\lambda a - b)(av - bu)}{a^2 + b^2}.$$

Nous pouvons prendre alors $u = y - b$, $v = a - x$, et nous aurons

$$\theta x = b(a - x), \qquad \theta y = \lambda a(b - y), \qquad \theta = \frac{(\lambda a - b)[a(a - x) - b(y - b)]}{a^2 + b^2}.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer λ et θ. Nous portons alors les axes au point (a, b), nous changeons x en $x + a$, y en $y + b$ et nous avons

$$\theta(x + a) = bx, \qquad \theta(y + b) = -\lambda ay, \qquad \theta = -\frac{(\lambda a - b)(ax + by)}{a^2 + b^2}.$$

Les deux premières nous donnent $\dfrac{b - \lambda a}{\theta} = \dfrac{x + a}{x} + \dfrac{y + b}{y} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + 2$, et le lieu est finalement

$$(a^2 + b^2)xy = (2xy + bx + ay)(ax + by)$$

ou

$$2xy(ax + by) + ab(x^2 + y^2) = 0.$$

C'est une cubique unicursale dont les trois asymptotes sont réelles et distinctes ; l'origine est un point double isolé de cette cubique.

Les asymptotes sont $x = -\dfrac{a}{2}$ et $y = -\dfrac{b}{2}$, puis $ax + by = -\dfrac{a^2 + b^2}{2}$; celle-ci est perpendiculaire à OC et passe par le point I′ symétrique de I par rapport à C. D'autre part, les droites Cx, Cy et CD, perpendiculaire à OC, donnent une séparation en régions, et nous voyons de suite que la courbe n'entre pas dans les régions hachurées. Il suffit ensuite d'observer qu'elle passe au point I, de

coordonnées $-\frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2}$ pour qu'on puisse la tracer sans peine. Il reste cependant une incertitude relative à la position de la courbe par rapport à la troisième asymptote. Pour la lever, je coupe la courbe par cette troisième asymptote, je remplace dans l'équation de la courbe $ax + by$ par $-\frac{a^2+b^2}{2}$, et j'obtiens

$$(a^2+b^2)(xy+ab)(x^2+y^2)=0, \qquad (ax+by)(ay+bx)=0.$$

Ceci nous montre qu'il y a encore un point de rencontre à l'infini et qu'il y en a un troisième situé sur la symétrique de la droite CD par rapport à la bissectrice de l'angle des axes. La forme de la cubique est maintenant fixée.

3. Pour traiter la dernière partie, il faut former l'équation ponctuelle de la conique (C), écrire qu'elle passe en un point donné (x, y), puis que les deux polaires du point C qui correspondent aux valeurs de λ ainsi trouvées sont rectangulaires. Or le coefficient angulaire de cette polaire est $\frac{\lambda a^2}{b^2}$: la condition d'orthogonalité est donc $\frac{\lambda\lambda' a^4}{b^4}=-1$ ou $a^4\lambda\lambda'+b^4=0$.

Pour former l'équation ponctuelle, nous allons écrire le tableau des coefficients de l'équation tangentielle :

$$A=a, \qquad B=\lambda,$$
$$A'=\lambda b, \qquad B'=1,$$
$$A''=\frac{a+\lambda b}{a^2+b^2}, \qquad B''=0.$$

Les mineurs du discriminant sont

$$A'A''-B'^2=\frac{\lambda b(a+\lambda b)}{a^2+b^2}-\lambda^2, \qquad B'B-AB=-a\lambda,$$
$$A''A-B''^2=\frac{a(a+\lambda b)}{a^2+b^2}-1, \qquad B''B-A'B'=-\lambda b,$$
$$AA'-B^2=-\lambda ab, \qquad BB'-A''B''=\lambda.$$

L'équation ponctuelle est donc

$$\frac{\lambda ab-\lambda^2a^2}{a^2+b^2}x^2+\frac{\lambda ab-b^2}{a^2+b^2}y^2+2\lambda xy-2\lambda bx-2\lambda ay+\lambda ab=0,$$

et le produit des deux valeurs de λ qui correspondent au point (x, y) est $\lambda\lambda'=\frac{b^2y^2}{a^2x^2}$. La condition d'orthogonalité demandée est donc

$$a^4b^2y^2+b^4a^2x^2=0, \qquad \text{ou} \qquad a^2y^2+b^2x^2=0.$$

Le lieu du point (x, y) se compose de deux droites imaginaires.

Remarque. — Si on veut traiter le problème en coordonnées ponctuelles, il faut d'abord écrire que la polaire de l'origine coïncide avec la droite AB, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$. Ceci nous permet d'écrire les trois derniers coefficients, et l'équation de la conique est

$$Ax^2+Ay^2+2Bxy-\frac{2x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0.$$

Il faut écrire maintenant que la polaire du point A coïncide avec Oy ; or cette polaire a pour

équation

$$a\left(Ax + By - \frac{1}{a}\right) + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

en annulant le coefficient de y, on trouve $B'' = -\frac{1}{ab}$, et l'équation des coniques conjuguées au triangle OAB est

$$Ax^2 + Ay^2 - \frac{2xy}{ab} + \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - 1 = 0.$$

Il nous reste à écrire maintenant que la conique est vue du point C sous un angle droit. Pour cela, nous formons l'équation quadratique des tangentes issues du point (a, b) et nous écrivons qu'elles sont rectangulaires :

$$(A'Aa^2 + A'b^2 + 1)f(x, y) - (xf'_x + yf'_y + \cdots)^2 = 0,$$

$$(Aa^2 + A'b^2 + 1)\left(Ax^2 + Ay^2 - \frac{2xy}{ab}\right) - (Aax + A'by)^2 = 0,$$

$$(A + A')(Aa^2 + A'b^2 + 1) - A^2a^2 - A'^2b^2 = 0.$$

La relation entre A et A′ est donc finalement $AA'(a^2 + b^2) + A + A' = 0$.

Nous ne pousserons pas le problème plus loin.

R. BOYER, lycée de Nice.

Bonnes solutions : M. Courtois, à Sedan ; A. Rousseau, à Fournes-en Weppe ; G. Lach, à Denain.
Assez bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; A. Bougé, à Nancy.

2015. — *Etant donnés une hyperbole* H *et un point* A *dans son plan, par le point* A *on mène une sécante variable* AR, *et on considère la parabole* P *bitangente à l'hyperbole* H *aux points* M *et* N *où la sécante* AR *la rencontre :*

1° *Trouver l'équation de la parabole* P ; *démontrer que par tout point du plan passent, lorsque la sécante* AR *varie, deux paraboles réelles ou imaginaires ; discussion ;*

2° *Démontrer analytiquement et géométriquement que la tangente à la parabole* P *au point* I, *où elle est rencontrée par celui de ses diamètres qui passe par le point* A, *a une équation indépendante du coefficient angulaire de la sécante* AR ;

3° K *désignant le pôle de* AR *par rapport à l'hyperbole* H, *trouver le lieu du point d'intersection de la droite* KI *avec la sécante* AR *lorsque cette sécante tourne autour du point* A ; *nature du lieu suivant la position du point* A *dans le plan ;*

4° *Lieu de la projection du point* A *sur l'axe de la parabole* P ; *construire le lieu et trouver son aire dans le cas particulier où l'hyperbole* H *est équilatère.*

1. Rapportons l'hyperbole H à ses axes, et soient α, β les coordonnées du point A. L'équation de H étant $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$, et l'équation de la sécante variable $y - \beta = m(x - \alpha)$, l'équation générale des coniques bitangentes à H sera

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 + \lambda(y - \beta - m(x - \alpha))^2 = 0.$$

En exprimant que cette conique doit être une parabole, on obtient la condition $\lambda = \frac{a^2b^2}{a^2m^2 - b^2}$, et l'équation de la parabole P est

$$(1) \qquad (a^2m^2 - b^2)(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2) + a^2b^2(y - \beta - m(x - \alpha))^2 = 0.$$

Cette équation est du second degré en m ; donc si on assujettit la parabole à passer par le point

x, y du plan, on a deux paraboles correspondant aux deux racines de l'équation du second degré en m

$$(2) \qquad a^2 H + [b^2(x-\alpha)^2 m^2 - 2a^2b^2(x-\alpha)(y-\beta)m + b^2 H - a^2(y-\beta)^2] = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger, $\qquad H \equiv a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2$.

Les paraboles seront réelles ou imaginaires suivant la nature des racines de l'équation (2) ; on a donc deux paraboles réelles si le discriminant est positif, c'est-à-dire si l'on a

$$a^2b^2(x-\alpha)^2(y-\beta)^2 + [H + b^2(x-\alpha)^2][H - a^2(y-\beta)^2] > 0$$

ou

$$H H - a^2(y-\beta)^2 + b^2(x-\alpha)^2 > 0,$$

ou enfin

$$(3) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 + [2a^2\beta y - 2b^2\alpha x - a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2] > 0.$$

Les régions où doit se trouver le point M pour que les paraboles soient réelles sont séparées de celles pour lesquelles les paraboles sont imaginaires par les lignes représentées par l'équation

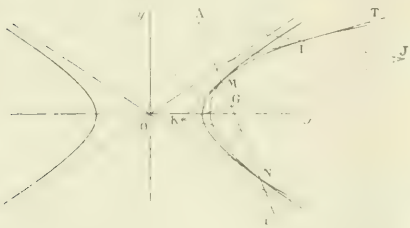
$$(4) \qquad (a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2) + [2a^2\beta y - 2b^2\alpha x - a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2] = 0,$$

c'est à dire par l'hyperbole H et la droite Δ,

$$\Delta \qquad 2a^2\beta y - 2b^2\alpha x - a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2 = 0.$$

Il est bon de remarquer que ces deux lignes H et Δ constituent l'enveloppe des paraboles P.

Ces résultats s'expliquent géométriquement. Remarquons d'abord que le point A a même polaire par rapport à H et à P ; en effet, cette polaire par rapport à H contient le pôle K de la sécante AR et le point G de cette sécante, conjugué harmonique de A par rapport à M et à N ; et ces mêmes points déterminent la polaire de A par rapport à P. Or la polaire de A par rapport à H est fixe ; donc le point A a, par rapport à toutes les paraboles P, une polaire KG fixe.



Ceci posé, soit AJ le diamètre de P qui passe par A ; le point I où ce diamètre rencontre P est le milieu de la portion AJ de ce diamètre comprise entre A et sa polaire KJ, et de plus la tangente IT à la parabole en I est parallèle à KJ ; cette tangente est donc fixe ; elle est parallèle à KJ, à égale distance de A et de KJ ; toutes les paraboles P sont donc tangentes à la même droite IT ; c'est la droite Δ. la vérification est facile. Les paraboles P sont d'ailleurs tangentes à H ; leur enveloppe est donc constituée par H et Δ.

2. Les remarques géométriques précédentes démontrent la seconde partie.

On peut l'établir analytiquement. Il suffit de remarquer que l'équation de la parabole P peut être mise sous la forme

$$a^2m^2(y-\beta) - b^2(x-\alpha)^2 + [a^2m^2 - b^2 - 2a^2\beta y - 2b^2\alpha x - a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2] = 0,$$

équation de la forme $Q^2 + R = 0$, où $Q = 0$ représente le diamètre qui passe en A, $R = 0$ la tangente à l'extrémité I de ce diamètre ; c'est la droite Δ.

La démonstration analytique directe est d'ailleurs facile. Le point I est à l'intersection du diamètre

$$(5) \qquad a^2m(y-\beta) - b^2(x-\alpha) = 0$$

avec la parabole, et l'on obtient le lieu du point I en éliminant m entre les deux équations (1) et (5) ; en tirant m de l'équation (5) et substituant dans l'équation (1), on obtient

$$(6) \qquad (a^2(y-\beta)^2 - b^2(x-\alpha)^2) + [2a^2\beta y - 2b^2\alpha x - a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2] = 0,$$

c'est-à-dire la droite Δ, et les deux parallèles aux asymptotes de H menées par A, qui correspondent aux cas particuliers où la sécante AR est parallèle aux asymptotes de H.

3. Le point I étant déterminé par l'intersection de Δ et du diamètre AI, l'équation de IK est de la forme

$$2a^2\beta y - 2b^2\alpha x + a^2b^2 + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 + [a^2m(y-\beta) - b^2(x-\alpha)] = 0 ;$$

exprimons que cette droite passe par le pôle K de AR dont les coordonnées sont

$$x' = -\frac{a^2m}{\beta - m\alpha}, \qquad y' = -\frac{b^2}{\beta - m\alpha},$$

et nous trouvons

$$\lambda = \frac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2}{a^2m\beta - b^2\alpha}.$$

L'équation de KI est donc

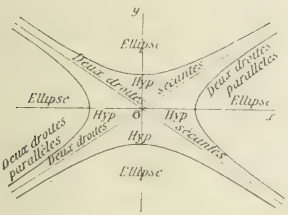
(7) $(a^2m\beta - b^2\alpha)[2a^2\beta y - 2b^2\alpha x + a^2b^2 + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2] + (b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 - a^2b^2)(a^2m(y - \beta) - b^2(x - \alpha)) = 0.$

On obtiendra le lieu cherché en éliminant m entre les équations (5) et (7). Pour cela, transportons les axes au point A ; l'équation (7) de KI devient

$$(a^2\beta y - b^2\alpha x)(2a^2\beta y - 2b^2\alpha x + H_1) - H_1(a^2y^2 - b^2x^2) = 0,$$

où on a posé $H_1 = a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2$, et l'équation (5)

$$y = mx.$$



Eliminant m, on a l'équation d'une conique

(8) $b^2(2b^2\alpha^2 + H_1)x^2 + a^2(a^2\beta^2 - H_1)y^2 - 4a^2b^2\alpha\beta xy$
$- H_1(b^2\alpha x - a^2\beta y) = 0.$

La nature de cette conique et les variétés dépendent des valeurs de δ et de Δ ; or on a facilement

$$\delta = a^2b^2(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2)(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 - a^2b^2),$$
$$\Delta = a^2b^2(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2)(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + a^2b^2)^2.$$

Les courbes des genres sont l'hyperbole H et l'hyperbole conjuguée H' ; les variétés correspondent à H et aux deux asymptotes. La figure ci-contre indique les séparations.

4. La direction générale des diamètres de P ayant pour coefficient angulaire $\frac{b^2}{a^2m}$, l'axe est le diamètre conjugué de la direction perpendiculaire et a pour équation

$$f'_x - \frac{a^2m}{b^2}f'_y = 0,$$

ou

(9) $(a^2m^2 + b^2)(a^2my - b^2x) - a^2b^2(a^2 + b^2)m(\beta - m\alpha) = 0.$

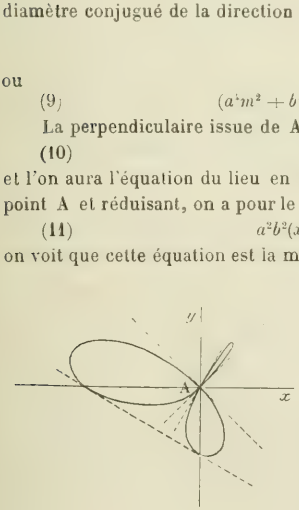
La perpendiculaire issue de A a pour équation

(10) $b^2(y - \beta) + a^2m(x - \alpha) = 0,$

et l'on aura l'équation du lieu en éliminant m entre ces deux équations. En transportant les axes au point A et réduisant, on a pour le lieu la courbe unicursale du quatrième ordre

(11) $a^2b^2(x^2 + y^2)^2 + (a^2x^2 - b^2y^2)(b^2\alpha x - a^2\beta y) = 0$;

on voit que cette équation est la même pour toutes les hyperboles concentriques et homothétiques, ce qu'il est facile d'expliquer.



Dans le cas particulier où l'hyperbole H est équilatère, l'équation (11) devient

(12) $(x^2 + y^2)^2 + (\alpha x - \beta y)(x^2 - y^2) = 0.$

La courbe a la forme ci-contre, les tangentes aux points sur Ox et Oy sont confondues suivant la même droite ; on a supposé sur la figure $\alpha > \beta$.

Pour avoir l'aire de la courbe, passons en coordonnées polaires. L'équation de la courbe devient

$$\rho = (\beta \sin\omega - \alpha\cos\omega)\cos 2\omega.$$

On a

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\omega,$$

$$dS = \frac{1}{2}\cos^2 2\omega\,(\alpha\cos\omega - \beta\sin\omega)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 2\omega\left[\frac{\alpha^2}{2}(1+\cos 2\omega) + \frac{\beta^2}{2}(1-\cos 2\omega) - \alpha\beta\sin 2\omega\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{4}\cos^2 2\omega\,(\alpha^2+\beta^2)\cos 2\omega + (\alpha^2-\beta^2)\sin 2\omega\,d\omega$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\alpha^2-\beta^2)\cos^2 2\omega + 2\alpha\beta\sin 2\omega\cos^2 2\omega + (\alpha^2+\beta^2)\cos^2 2\omega\,d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}(\cos 6\omega + 3\cos 2\omega) - 2\alpha\beta\sin 2\omega\cos^2 2\omega + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}(1+\cos 4\omega)\right]d\omega,$$

et, en intégrant,

$$S = \frac{1}{4}\left[\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\left(\frac{\sin 6\omega}{6} + \frac{3\sin 2\omega}{2}\right) + \frac{\alpha\beta\cos^3 2\omega}{3} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\omega + \frac{\alpha^2+\beta^2}{8}\sin 4\omega\right]_0^{\pi},$$

et enfin

$$S = \frac{\pi}{8}(\alpha^2+\beta^2).$$

A. MACÉ DE LÉPINAY.

Bonnes solutions : MM. F. Margand, école des Anglais, à Lyon ; V. Courtois, à Sedan.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1912

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX *Suite*

8748. — Calculer l'intégrale $\int x^2 y p\,ds$ étendue à tous les points (x, y) de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, s désignant l'arc et p la distance du centre à la tangente.

8749. — Construire la courbe $2y^3 + 3x^3 - 5xy^2 = 0$. Déterminer les tangentes parallèles à Oy. Trouver l'aire de la boucle située au-dessus de la bissectrice $y = x$.

8750. — Trouver la développée de la courbe $z = ae^{\cos(x+y)}$.

8751. — On donne deux axes obliques Ox, Oy, un cercle fixe passant par le point O et ayant son centre sur Ox, et un cercle variable passant par le point O et ayant son centre sur Oy. Lieu des centres d'homothétie des deux cercles.

8752. — Étudier la courbe dont les coordonnées (x, y) d'un point sont données en fonction de t par

$$x + iy = \frac{1}{a + \cos t + i\sin t}.$$

8753. — Trajectoires orthogonales des courbes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2a - b^2} + 2\lambda x + 1 = 0$. Peut-on simplifier le calcul si l'on sait que l'une des trajectoires est l'ellipse $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$?

8754. — Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes $z = a^x L(y)$ tg ω.

8755. — Construire la courbe $x = a\sin 2t$, $y = b\sin t$. Calculer l'aire de la boucle.

8756. — Construire la courbe $axy - (x^2 - y^2)^2$. Calculer l'aire de la boucle.

8757. — Établir analytiquement les propriétés de la droite de Simson. Enveloppe de cette droite.

8758. — On considère une courbe $y = f(0)$ qui passe à l'origine. Trouver le rayon de courbure à l'origine.

8759. — Déterminer le cercle de courbure en un point de la courbe $y = x^2 + x^3$. Intersection du cercle et de la courbe.

8760. — Construire la courbe $x = a(\cos t + \cos 3t)$, $y = a(\sin t + \sin 3t)$. Démontrer que sa longueur est égale à celle de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 16a^2$.

8761. — Construire la courbe $y = (1 - x)^{\frac{1}{2}}$. Tangente au point $x = 0$, $y = 1$. Rayon de courbure en ce point.

8762. — Trouver la développée de la courbe $y(a - x) = x$.

8763. — Trouver l'enveloppe des droites coupant la courbe $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ et l'axe des x en quatre points formant une division harmonique.

8764. — Déterminer l'enveloppe de la droite $ux + vy + w = 0$ sachant qu'on a $3(vu - w) - 2(vu - w)^2 = 0$.

8765. — Soient α et β les angles que font avec Ox les tangentes en deux points de la chaînette $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Calculer la différence des ordonnées de ces deux points.

8766. — On considère la famille de courbes $\left(\mathrm{L}\frac{a}{\rho}\right)^2 + \omega^2 = \alpha$, α désignant un paramètre. Trouver le lieu des points d'inflexion de ces courbes.

8767. — Construire la courbe $x = a(1 - 3t^2)$, $y = a(3t - t^3)$. Rectifier cette courbe. Calculer l'angle des tangentes au point double.

8768. — On considère la famille de courbes $f(x, y, a) = 0$, a étant un paramètre. Les coordonnées d'un point de l'enveloppe sont fonctions de a ; calculer $\frac{ds}{da}$, s étant l'arc de l'enveloppe. Appliquer à l'enveloppe de la droite

$$x \cos a + y \sin a - 2a \sin a = 0.$$

8769. — Soit $M(\rho, \omega)$ un point d'une courbe définie en coordonnées polaires. On prend sur cette courbe un sens positif d'arc, et on désigne par s l'abscisse curviligne. On mène la tangente MT dans le sens positif, et on considère la demi-droite Ou (portée sur OM) qui fait l'angle ω avec Ox. Calculer le cosinus et le sinus de l'angle de la demi-droite MT et de la demi-droite Ou.

8770. — On considère la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = a\left(\cos \alpha - t \sin \alpha - \frac{t^2}{2} \cos \alpha\right), \qquad y = b\left(\sin \alpha + t \cos \alpha - \frac{t^2}{2} \sin \alpha\right),$$

où t est le paramètre. Enveloppe de ces courbes lorsque α varie.

8771. — Déterminer les constantes c et c' de façon que la courbe définie par les équations

$$y = ce^t - (t + 1), \qquad x = -cte^t + c'e^t + 1$$

passe par l'origine pour $t = 0$. Construire la courbe dans ce cas particulier. Montrer que par le point $x = 1$, $y = -1$ on ne peut mener qu'une tangente à cette courbe.

8772. — Déterminer les points d'inflexion et les points doubles des courbes définies par leurs équations paramétriques.

8773. — Calculer l'aire d'un segment parabolique. Montrer que cette aire ne dépend que de la portion du diamètre conjugué de la corde comprise entre la corde et la parabole.

8774. — Construire la courbe $y^2(a - x) = x^3$. La tangente en un point $M(x_0, y_0)$ rencontre la courbe au point M'. Calculer les coordonnées du point M'. Former l'équation du cercle OMM'.

8775. — Construire la courbe définie par les équations $x = \cos 2t$, $y = \cos 3t$. Éliminer t entre ces deux équations.

8776. — Par un point A d'un cercle on mène un vecteur AB de grandeur constante et de direction variable. Peut-on déterminer la loi de cette direction de façon que le lieu du point B soit constamment tangent au vecteur AB.

8777. — On considère la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = \frac{ae^{m\alpha}}{1 + m^2}(m \cos \alpha + \sin \alpha), \qquad y = \frac{ae^{m\alpha}}{1 + m^2}(m \sin \alpha - \cos \alpha),$$

où α est le paramètre, a et m étant des constantes. Trouver l'équation de cette courbe en coordonnées polaires.

8778. — Construire la courbe $2 \operatorname{arc} \sin x = 3 \operatorname{arc} \sin y$. Montrer qu'elle est algébrique et unicursale.

8779. — Soient O et M deux points infiniment voisins d'une courbe plane. On mène les tangentes en ces deux points, et on désigne par T le point de rencontre. Calculer la partie principale de l'infiniment petit OT + TM — arc OM, en prenant arc OM $= s$ pour infiniment petit principal.

8780. — Relations entre les coordonnées rectilignes x, y, et polaires ρ, ω d'un point. Démontrer que $\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho}{\partial x}$. Démonstration géométrique.

8781. — Enveloppe de la droite $x \cos \varphi + y \sin \varphi - (a\varphi + b) \cos \varphi + (c\varphi + d) \sin \varphi + e$. Peut-on supprimer quelques-uns des paramètres ? Rayon de courbure de l'enveloppe.

8782. — Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant les paraboles $y^2 = ax$.

8783. — Sur la tangente en un point M à une courbe C on porte une longueur constante MP ; démontrer que la normale en P au lieu de ce point rencontre la normale en M à la courbe C au centre de courbure de cette courbe. Ne peut-on déduire cette propriété de considérations de cinématique ?

8784. — Intégrer l'équation $\frac{dy}{dx} + xy = x + x^3$. Construire la courbe intégrale qui passe par le point $x = -1$, $y = 0$.

8785. — On considère les droites $y = mx + m^3$, où m désigne un paramètre variable. Trouver les trajectoires orthogonales de ces droites.

8786. — On donne une courbe C et un point fixe O dans son plan. Sur la tangente en un point M de cette courbe on détermine un point T tel que OT = TM. On mène par le point O une perpendiculaire à la tangente en T au lieu de ce point. Démontrer que cette perpendiculaire passe par le centre de courbure de la courbe C au point M.

8787. — Enveloppe de la polaire d'un point de la courbe $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = a^2$.

8788. — Étudier la courbe $x = \frac{a + (d - b)t + ct^2}{1 + t^2}$, $y = \frac{d + (c - a)t + bt^2}{1 + t^2}$. Montrer que c'est un cercle.

8789. — Calculer l'aire de la podaire d'une ellipse par rapport à son centre.

8790. — Soient z et z' les affixes des deux points M et M'. Etudier la transformation $2z' = z + \frac{1}{z}$. Montrer que cette transformation conserve les angles.

8791. — Le point z décrivant une droite, quel lieu décrit le point z^2 ? $(z = x + yi)$.

8792. — Trouver la courbe intégrale de l'équation $y = xy'^2 + y'^3$ qui touche l'axe des x au point $x = -\frac{1}{2}$.

8793. — Rayons de courbure à l'origine de la courbe $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

8794. — Comment sont placés les points dont les affixes z, z_1, z_2, z_3 vérifient la relation $\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = -1$? Montrer que la relation est indépendante des axes de coordonnées.

8795. — Trouver une courbe telle que si on porte sur chaque tangente, à partir du point de contact, une longueur constante, le lieu du point obtenu soit un cercle.

8796. — Déterminer une courbe sachant que l'on a $s = a\cos^3\alpha$, s désignant l'arc et α l'angle de la tangente avec Ox. Nature de la courbe obtenue (hypocycloïde à trois rebroussements).

8797. — Même question si l'on a la relation $s = e^{m\alpha}$ (spirale logarithmique).

8798. — Déterminer une courbe telle que le centre de courbure en un point M se projette sur Ox au point de rencontre de cet axe et de la tangente en M. Développée de la courbe obtenue.

8799. — Déterminer une courbe telle que le rapport des distances d'un point fixe à la tangente et à la normale en un point soit constant.

8800. — On joint un point M d'une courbe à un point fixe O et on projette le centre de courbure relatif au point M sur la droite OM. Déterminer la courbe de façon que cette projection soit symétrique de M par rapport au point O.

8801. — Trouver une courbe telle que le centre de courbure relatif à un point M soit situé sur la polaire de ce point par rapport à un cercle donné.

8802. — Déterminer une courbe telle que la normale limitée à Ox soit égale au double du rayon vecteur.

8803. — Déterminer une courbe, rencontrant Oy au point A, telle que si d'un point M de la courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, le centre de gravité de l'aire OAMP ait pour abscisse $x' = \frac{ax}{a + x}$, x étant l'abscisse de M et a une constante.

8804. — Soient R le rayon de courbure en un point d'une courbe, et α l'angle de la tangente avec Ox. Déterminer la courbe sachant que l'on a $R = \frac{a}{\sin\alpha}$, a étant une constante. Même question en supposant $R = \frac{a}{\sin^3\alpha}$.

8805. — On considère une courbe (C) et un point O dans son plan. On mène la tangente MT et la normale MN en un point M de la courbe, et on projette le point O en P et Q sur ces deux droites. Déterminer la courbe de façon que la droite PQ passe par un point fixe A. Solution géométrique.

8806. — Trouver les courbes telles que la tangente et la normale à ces courbes tracent sur une droite fixe des divisions homographiques. Cas particulier où les divisions sont en involution.

8807. — Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure en un point soit proportionnel à la distance de l'origine à la tangente.

8808. — Soient r le rayon vecteur OM d'un point M d'une courbe, p la distance du pôle à la tangente au point M et n la longueur de la normale polaire. Déterminer la courbe de façon que le rapport $\frac{np}{r}$ soit constant.

8809. — Trouver une courbe telle que l'on ait $\frac{1}{p^2} = ar^2 + b$, r étant le rayon vecteur, p la distance du pôle à la tangente, a et b des constantes. Pourrait-on trouver la nature de la courbe par des considérations de dynamique ?

8810. — D'un point M d'une courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, et du point P on mène PQ perpendiculaire sur la tangente en M. Déterminer la courbe de façon que $MQ = a$.

(A suivre.)

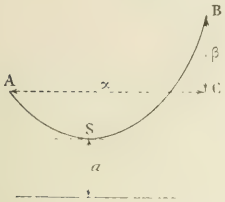
CONCOURS DE 1912 *(Suite.)*

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs des Ponts et Chaussées.

Algèbre et Analyse.

I. — Etant donné un arc AB de chaînette, on a, entre le paramètre a (distance du sommet S à la base) les distances $AC = \alpha$ et $BC = \beta$, horizontale et verticale des extrémités A et B, et la longueur l de cet arc,



la relation

$$\sqrt{l^2 - \xi^2} = a\left(e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}}\right),$$

qui permet de calculer a quand on connaît α, ξ et l.

Soient $\alpha = 400^m$, $\xi = 300^m$ et $l = 600^m$: on demande de déterminer graphiquement *a par similitude*, en opérant par tâtonnement sur une chaînette de paramètre $a = 4$ centimètres, puis d'approcher de la racine en appliquant une fois la formule de Newton.

Le tracé sera fait simplement au crayon sur une des feuilles $\frac{21}{31}$ du texte de la composition.

II. — **2101**. 1° Exprimer au moyen d'une série ordonnée suivant les puissances entières croissantes de x, l'intégrale particulière y de l'équation différentielle

$$y'' = xy,$$

telle que pour $x = 0$ on ait $y = 1$ et $y = 0$.

2° La série obtenue représente-t-elle cette intégrale particulière pour toute valeur de x?

3° Indiquer une limite de l'erreur commise quand on s'arrête au terme en x^9 inclus, en supposant soit $x > 0$ soit $-2 < x < 0$.

4° Calculer, au moyen de cette série, arrêtée au terme en x^9 inclus, les valeurs numériques de y qui correspondent aux quatre valeurs suivantes de x :

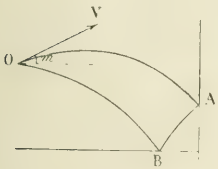
$$2, \quad -1, \quad 1 \quad \text{et} \quad 2,$$

en fixant chaque fois une limite de l'erreur commise.

5° Tracer correctement, entre $x = -2$ et $x = 2$, la courbe qui représente l'intégrale particulière considérée, en prenant 4 centimètres pour unité ; amorcer cette courbe au delà de $x = -2$.

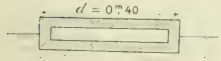
Mécanique et Géométrie.

I. — **2102**. Déterminer à un centième près l'intensité minimum V et la pente m correspondante que doit avoir la vitesse initiale d'une balle élastique pour que, lancée du point O et rebondissant successivement en A sur une paroi verticale et en B sur une paroi horizontale, elle revienne exactement à son point de départ, dont les distances à ces parois sont respectivement $a = 3^m$, $b = 1^m$.



On négligera le diamètre de la balle et le frottement.

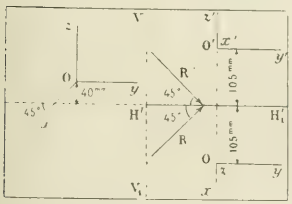
II. — Un disque solide évidé intérieurement, ayant la forme extérieure d'un cylindre de $0^m,40$ de diamètre et un poids de 350 grammes flotte sur une masse liquide indéfinie, et exécute de petites oscillations verticales dont la durée est $\frac{1}{10}$ de seconde (aller et retour compris).



Déterminer le poids spécifique du liquide en négligeant sa résistance et la déformation de la surface libre.

Épure de Géométrie descriptive.

La feuille remise aux candidats étant divisée en deux parties égales dans le sens de la largeur par la droite VV_1, on tire les axes $H'H'_1$ et xz' de la partie de droite et, sur le second de ces axes, on prend le point (o, o') tel que chacune de ses projections soit à 105^{mm} de HH_1.



Ce point (o, o') est le centre d'une sphère de 65^{mm} de rayon surmontant un cylindre de révolution d'axe vertical $(oz, o'z')$ ayant 41^{mm} de rayon, et limité d'autre part au plan horizontal dont la trace verticale est $H'H'_1$.

On demande :

1° De représenter le solide formé par la sphère et le cylindre supposés opaques et limités à leur intersection commune ;

2° D'indiquer les ombres (propres et portées) déterminées sur le solide ainsi constitué par des rayons parallèles à (R, R') ;

3° De construire la perspective cavalière du solide ombré, en prenant comme représentation du trièdre $(oxyz, o'x'y'z')$ défini sur la moitié de droite, le trièdre $Oxyz$ de la moitié de gauche dont l'origine O est sur l'axe de cette seconde moitié à 40^{mm} au-dessus du prolongement de $H'H'_1$, l'axe Ox étant incliné à 45° sur cette droite, et le rapport de réduction sur cet axe étant égal à $\frac{1}{2}$.

N.B. — Les lignes de construction étant tracées en rouge, on figurera en noir les arêtes du solide représenté (celles qui sont cachées étant en pointillé), en bleu les limites des ombres (considérées seulement sur les parties vues), les ombres elles-mêmes étant indiquées par une teinte légère ou des hachures bleues.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2011. — 1° *On demande d'intégrer l'équation différentielle*

$$x^2y' - xy + y^2 = 0$$

et de déterminer celle de ses intégrales qui prend la valeur 1 *pour* $x = 1$. *Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative.*

2° *Trouver la pente maximum des tangentes à cette courbe, le point d'inflexion, et le lieu de ce point quand la constante d'intégration varie.*

Mêmes questions pour l'équation $x^2y' + 2xy - y^2 = 0$, *et, en plus, trouver les trajectoires orthogonales des courbes intégrales.*

1 L'équation proposée est en même temps une équation homogène et une équation de Bernoulli : on peut donc l'intégrer de deux façons.

Divisons le premier membre par y^2 et posons $\frac{1}{y} = z$: nous aurons successivement

$$x^2\frac{y'}{y^2} - x\frac{1}{y} + 1 = 0, \qquad z' = -\frac{y'}{y^2},$$

puis

$$x^2z' + xz = 1, \qquad xz' + z = \frac{1}{x}.$$

Le premier membre est la dérivée de zx, le second de Lx : nous avons donc immédiatement

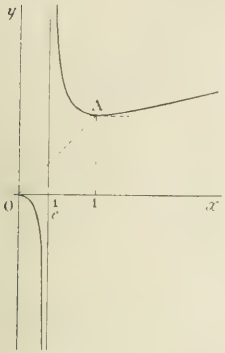
$$zx = LCx, \qquad y = \frac{x}{LCx}.$$

Or, pour $x = 1$, $y = 1$: donc $LC = 1$, $C = e$ et $y = \frac{x}{1 + Lx}$.

Cette fonction est définie de 0 à $+\infty$, elle est nulle, ou plutôt infiniment petite et négative pour $x = +\infty$; le coefficient angulaire de la tangente en ce point, qui est la limite de $\frac{y}{x}$ quand x tend vers 0, est égal à 0 et la courbe part du point O tangentiellement à Ox. Pour $Lx = -1$, $x = \frac{1}{e}$, y devient infini et passe de $-\infty$ à $+\infty$. Pour $x = +\infty$, y est infini et positif, $\frac{y}{x}$ est nul : la courbe a donc une branche parabolique dans la direction Ox.

La dérivée y' est $y' = \frac{Lx}{(Lx + 1)^2}$; elle est négative avant 1, positive après. La fonction décroît

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, passe par un minimum pour $x = 1$, et croît ensuite. Le minimum est d'ailleurs égal à 1 ; la courbe traverse la droite $y = x$ et reste ensuite continuellement au-dessous, comme on le voit sans peine en formant



$$y - x = \frac{-x\mathrm{L}x}{\mathrm{L}x + 1}.$$

Cette forme nous fait prévoir qu'il y a un point d'inflexion, en lequel la pente de la tangente est maximum, et ceci se vérifie en formant la dérivée seconde, $y'' = \frac{1 - \mathrm{L}x}{x(\mathrm{L}x + 1)^3}$. Le point d'inflexion a pour coordonnées $x = e$, $y = \frac{e}{2}$, et la pente de la tangente en ce point, la pente maximum, est $\frac{1}{4}$.

2. Dans le cas général, $y = \frac{x}{\mathrm{L}x + \mathrm{C}}$, $y' = \frac{\mathrm{L}x + \mathrm{C} - 1}{(\mathrm{L}x + \mathrm{C})^2}$; nous aurons donc $y'' = \frac{2 - \mathrm{C} - \mathrm{L}x}{x(\mathrm{L}x + \mathrm{C})^3}$.

Le point de pente maximum, le point d'inflexion, a son abscisse définie par $\mathrm{L}x + \mathrm{C} = 2$, alors $y = \frac{x}{2}$ et $y' = \frac{1}{4}$. La pente maximum est donc toujours égale à $\frac{1}{4}$ et le lieu du point d'inflexion est la droite $y = \frac{x}{2}$.

Si on prend x négatif, la courbe intégrale a pour équation $y = \frac{-x}{\mathrm{L}(-x) + \mathrm{C}}$. Ses points se déduisent de ceux de la précédente en changeant x en $-x$; elle est donc symétrique de la précédente par rapport à l'axe des y, et le lieu des points d'inflexion est symétrique du précédent par rapport au même axe.

Pour intégrer la seconde équation, on peut aussi procéder de deux façons. Nous appliquerons cette fois la méthode employée pour les équations homogènes : nous poserons $y = tx$, et l'équation deviendra

$$tx + t + 2t - t^2 = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2 - 3t} = \frac{1}{3}\left(\frac{dt}{t - 3} - \frac{dt}{t}\right).$$

Nous en déduisons de suite $\mathrm{L}\frac{x^3}{\mathrm{C}} = \mathrm{L}\frac{t - 3}{t}$, $\frac{y - 3x}{y} = \frac{x^3}{\mathrm{C}}$, $y = \frac{3\mathrm{C}x}{\mathrm{C} - x^3}$.

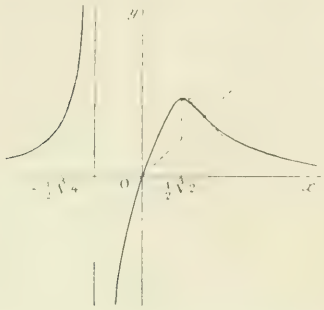
Si l'on veut que $y = 1$ pour $x = 1$, il faut prendre $\mathrm{C} = -\frac{1}{2}$; alors

$$y = \frac{3x}{1 + 2x^3}.$$

Cette fonction est définie pour toute valeur de x, et discontinue pour $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$. Sa dérivée, $y' = 3\frac{1 - 4x^3}{(1 + 2x^3)^2}$, s'annule pour $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ en passant du positif au négatif, et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	croît	$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$	croît	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$	croît	$+\infty$
y'		$+$	|	$+$	0	$-$	
y	0	croît	$+\infty$ | $-\infty$	croît	$\sqrt[3]{2}$ *maximum*	décroît	0

d'où l'on déduit sans difficulté la courbe figurative. Elle est tangente à l'origine à la droite de coefficient angulaire 3 et comme $y' = 72x^2 \frac{x^3 - 1}{(1 + 2x^3)^3}$ s'annule sans changer de signe pour $x = 0$, et de nouveau pour $x = 1$ en passant du négatif au positif, le point de coordonnées $x = 1$, $y = 1$ est un point d'inflexion. La tangente en ce point a la pente minimum -1.



De $y = \frac{3Cx}{C - x^3}$ on tire $y'' = 18C\frac{x^2(2C + x^3)}{(C - x^3)^3}$. Les coordonnées des points d'inflexion des courbes intégrales sont donc, en fonction de C, $x = \sqrt[3]{-2C}$ et $y = \sqrt[3]{-2C}$, d'où, quel que soit C, $x = y$. Le lieu de ces points est donc la droite $y - x = 0$, bissectrice de xOy.

Trajectoires orthogonales. — On obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$ dans l'équation donnée, ce qui donne

$$y'(y^2 - 2xy) + x^2 = 0.$$

Cette équation s'intègre encore en posant $\frac{y}{x} = t$.

On a
$$t + x\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2 - 2t},$$
d'où
$$\frac{dx}{x} = \frac{2t - t^2}{t^3 - 2t^2 + 1}dt.$$

Il faut décomposer en éléments simples $\frac{2t - t^2}{t^3 - 2t^2 + 1}$. Les diviseurs du dénominateur étant $(t - 1)$, $\left(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$, la décomposition est de la forme

$$\frac{2t - t^2}{t^3 - 2t^2 + 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + \frac{C}{t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}},$$

d'où

$$2t - t^2 = A\left(t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + B(t - 1)\left(t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + C(t - 1)\left(t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

En faisant successivement $t = 1$, $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, on trouve

$$A = 1, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad C = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On a donc
$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{dt}{t - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{dt}{t - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}},$$

d'où
$$L\frac{x}{C} = -L(t - 1) + \frac{1}{\sqrt{5}}L\frac{2t - (1 + \sqrt{5})}{2t - (1 - \sqrt{5})} = L\left[\left(\frac{2t - (1 + \sqrt{5})}{2t - (1 - \sqrt{5})}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\frac{1}{t - 1}\right],$$

et, en remplaçant t par $\frac{y}{x}$,

$$\frac{x}{C} = \frac{x}{y - x}\cdot\left(\frac{2y - x(1 + \sqrt{5})}{2y - x(1 - \sqrt{5})}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}},$$

d'où enfin $$y - x = C\left(\frac{2y - x(1+\sqrt{5})}{2y - x(1-\sqrt{5})}\right)^{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Pour $C = 0$, on trouve $y - x = 0$, ou $2y - x(1-\sqrt{5}) = 0$, et pour $C = \infty$, $2y - x(1+\sqrt{5}) = 0$

Parmi les trajectoires orthogonales, il y a donc trois droites qui passent à l'origine, et qu'on peut trouver directement en posant $y = ax$, et cherchant la constante a.

M. ROUX, instituteur-adjoint à Chalon-sur-Saône.

Bonnes solutions : MM. André Graire, lycée Saint-Louis ; L. Simon, à Fourmies ; A. Courtois, 147e d'infanterie à Sedan ; Raymond Chirol, à Moulins ; J. Le Bras ; Wladimir Sturtz ; H. Froberg, à Paris ; Stevenot, 6e d'artillerie, à Toul ; L. A. Gioan ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe ; G. Lach, à Denain ; R. Royer, lycée de Nice.

2017. — *On considère la fonction* $y = \dfrac{x^2 - ax + a^2}{x - a}$, *où* a *désigne une constante arbitraire.*

1° *Trouver la fonction* Y *telle que* $Y - y = a$ *et calculer* Y′ *en fonction de* x *et de* Y.

2° *La courbe* Y *est une hyperbole. Étudier sa déformation et trouver le lieu de son centre quand* a *varie.*

3° *Soit* $Z = \dfrac{aY}{x}$. *Les asymptotes des courbes* Y *et* Z *forment un triangle qui reste semblable à lui-même quand* a *varie. Appelons* $f(a)$ *l'aire de ce triangle. Quel est le lieu du point* $x = a$, $y = f(a)$?

4° *Une des asymptotes rencontre la courbe* Z. *Donner les abscisses de ces points en fonction de* a *et leurs lieux.*

1. On a $$Y = a + y = a + \frac{x^2 - ax + a^2}{x - a} = \frac{x^2}{x - a};$$

on en déduit $(x - a)Y = x^2$, et en prenant les dérivées des deux membres,

$$(x - a)Y' + Y = 2x, \qquad \text{ou} \qquad Y' = \frac{2x - Y}{x - a}.$$

2. On peut écrire $Y = \dfrac{x^2 - a^2 + a^2}{x - a} = x + a + \dfrac{a^2}{x - a}$, et pour construire cette courbe, on peut d'abord construire la droite $Y = x + a$, puis augmenter les ordonnées de cette droite de la quantité $\dfrac{a^2}{x - a}$. On reconnait ainsi que la courbe est une hyperbole admettant pour asymptotes les droites $Y = x + a$, $x - a = 0$.

On a d'ailleurs $Y' = \dfrac{x(x - 2a)}{(x - a)^2}$, et pour étudier les variations de Y, il suffit de distinguer deux cas, suivant que a est positif ou négatif.

1° $a > 0$.

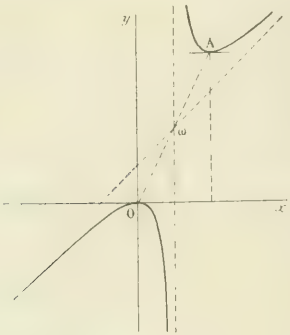
x	$-\infty$		0		a		$2a$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$4a$	↗	$+\infty$

2° $a < 0$.

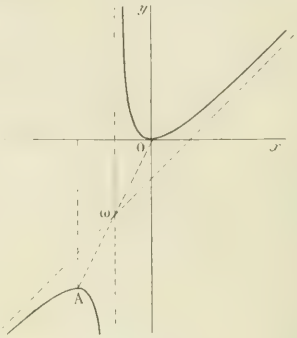
x	$-\infty$		$2a$		a		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$4a$	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

La courbe est tangente à l'origine à l'axe des x.

Le centre est le point de rencontre des deux asymptotes, $y = x + a$, $x - a = 0$; éliminons a



$a > 0$.



$a < 0$.

entre ces deux équations, nous obtenons $Y = 2x$, qui représente une droite passant par le point O et qui est le lieu du centre quand a varie. C'est aussi le lieu du point A où la tangente est parallèle à Ox.

3. Nous avons $Z = \frac{aY}{x} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x^2}{x-a} = \frac{ax}{x-a}$ ou $Z = \frac{a(x-a)+a^2}{x-a} = a + \frac{a^2}{x-a}$.

Nous obtenons encore l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont $y = a$ et $x = a$.

Nous avons ainsi les trois asymptotes $y = x + a$, $y = a$, $x = a$, qui restent parallèles à elles-mêmes quand a varie ; donc, le triangle qu'elles forment reste semblable à lui-même. Ce triangle est rectangle isocèle et les longueurs des côtés de l'angle droit sont égales à $|a|$. Donc, l'aire $f(a)$ de ce triangle est égale à $\frac{a^2}{2}$, et le lieu du point $x = a$, $y = \frac{a^2}{2}$ est la parabole $y = \frac{x^2}{2}$.

4. Les abscisses des points de rencontre de l'asymptote $y = x + a$ et de la courbe Z sont racines de l'équation $\frac{ax}{x-a} = x + a$, ou $x^2 - ax - a^2 = 0$; on a donc

$$x_1 = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, \qquad x_2 = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont $x_1 + a = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}$ $x_2 + a = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$.

On obtient donc les deux points

$$x_1 = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}, \quad y_1 = \frac{a(3+\sqrt{5})}{2}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2}, \quad y_2 = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}.$$

Quand a varie, le premier décrit la droite $\frac{y}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, et le second la droite $\frac{y}{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$.

R. DUFRESNE, lycée Charlemagne.

Bonnes solutions par MM. D. Bellon ; R. Boyer, lycée de Nice ; André Courtois, 147e d'infanterie à Sedan ; Raymond Cattiot à Moulins ; Dagnaux, à Dijon ; H. Froberg, à Paris ; G. Lach, à Denain ; G. M., à Lyon ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; L. Simon, à Fourmies ; Stevenol, 6e d'artillerie à Toul ; Wladimir Stertz.

GÉOMÉTRIE

2019. — *Sur les trois côtés d'un triangle* ABC *comme bases, on construit trois triangles isocèles semblables* $P_A BC$, $P_B AC$, $P_C AB$, *dirigés à la fois vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle* ABC.

1° *Montrer que les droites* AP_A, BP_B, CP_C *se coupent en un même point* P.

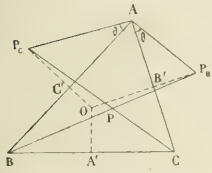
2° *Quand l'angle à la base varie, le point* P *décrit une conique* Γ *qui passe au barycentre* G *du triangle* ABC.

3° *Les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur les côtés correspondants du triangle* $P_A P_B P_C$ *se coupent en un point* Q *de la conique* Γ.

4° *La corde* PQ *de la conique* Γ *passe par un point fixe.*

5° *Les côtés du triangle* $P_A P_B P_C$ *enveloppent trois paraboles qui ont pour directrices les médianes du triangle* ABC.

1 et **2**. Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle, A′, B′, C′ les milieux des côtés BC, CA, AB. Désignons par θ l'angle à la base des triangles isocèles semblables $P_A BC$, $P_B AC$ et $P_C AB$. Lorsque θ varie, les droites AP_B et AP_C sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques ; par suite, les points P_B et P_C tracent sur OB′ et OC′ des divisions homographiques. On en conclut que les droites BP_B et CP_C sont des rayons homologues de faisceaux homographiques, et que le point P commun à ces droites décrit une conique (Γ) passant par les points B et C.



Pour $\theta = 0$, P_B est en B′, P_C en C′, et le point P est le centre de gravité G du triangle; pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, P_B et P_C sont à l'infini respectivement sur OB′ et OC′, donc le point P coïncide avec l'orthocentre H du triangle ABC. Enfin pour $\theta = -A$, P_B est sur AB, P_C sur AC et le point P est au point A.

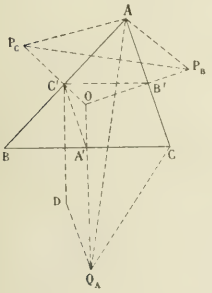
Il en résulte que la conique (Γ) passe par les cinq points A, B, C, G, H.

Et ceci montre que la droite AP_A passe par le point P, car si AP_A rencontrait BP_B et CP_C en des points distincts P′ et P″, ces points seraient sur Γ, et la droite AP_A rencontrerait Γ en trois points, A, P′ et P″.

Donc les trois droites AP_A, BP_B et CP_C sont concourantes.

3. Nous allons démontrer que la perpendiculaire menée du point A à la droite $P_B P_C$ rencontre OA′ en un point Q_A tel que les angles à la base du triangle isocèle $Q_A BC$ soient égaux à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Nous avons
$$\frac{P_C C'}{AC'} = \frac{P_B B'}{AB'} = \operatorname{tg}\theta ;$$
par le point C′ menons une perpendiculaire à C′B′, et sur cette perpendiculaire prenons une longueur C′D telle que l'on ait $\frac{C'D}{C'B'} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$: puis, traçons le vecteur DQ_A équipollent à AB′, ou à C′A′. Je vais montrer que AQ_A est perpendiculaire à $P_B P_C$ et que le point Q_A est sur OA′.



Nous avons en effet
$$\frac{AC'}{P_C C'} = \frac{C'D}{C'B'} = \frac{DQ_A}{B'P_B} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} ;$$
et nous voyons que le contour polygonal $AC'DQ_A$ se déduit du contour $P_C C' B' P_B$ par une homothétie dans le rapport $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$, suivie d'une rotation d'un angle droit. Par suite, les résultantes de ces deux contours AQ_A et $P_B P_C$ sont rectangulaires.

De plus, DQ_A étant équipollent à $C'A'$, $A'Q_A$ est équipollent à $C'D$, ce qui montre que $A'Q_A$ est perpendiculaire à BC, ou que Q_A est sur OA'. Nous avons aussi

$$\frac{A'Q_A}{BC'} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{A'Q_A}{A'C},$$

ce qui montre que l'angle BCQ_A est égal à $\frac{\pi}{2} - \theta$.

On en conclut que les perpendiculaires menées de A, B, C sur les côtés du triangle $P_AP_BP_C$ rencontrent OA', OB', OC' aux sommets Q_A, Q_B, Q_C des triangles isocèles semblables Q_ABC, Q_BCA, Q_CAB. Par suite, ces perpendiculaires passent par un même point Q, situé sur la conique Γ.

4. Les deux points P_A et Q_A tracent sur OA' des divisions en involution, car on a $A'P_A = A'C \operatorname{tg}\theta$, et $A'Q_A = A'C \cot\theta$; on en déduit $\overline{A'P_A}\cdot\overline{A'Q_A} = \overline{A'C}^2$. Le couple de droites AP_A, AQ_A engendre donc un faisceau involutif de sommet A, et les cordes PQ qu'il intercepte sur la conique (Γ) passent par un point fixe.

Or, quand P_A est en O, P_AP_B et P_AP_C se confondent avec OB' et OC'; par suite le point Q est en A, et PQ passe par le point O. Il en est de même quand P_B ou P_C sont en O. Le point fixe où convergent les droites PQ est donc le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

5. La droite P_BP_C, joignant les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur OB' et OC', enveloppe une conique tangente à ces deux droites. Cette conique est d'ailleurs une parabole (Π_A), puisque les points à l'infini des deux divisions se correspondent.

Cette parabole est aussi tangente au côté $B'C'$, qui est la position de P_BP_C correspondant à $\theta = 0$. Par suite la directrice de la courbe passe par le point de concours des hauteurs du triangle circonscrit $OB'C'$, c'est-à-dire par le point A'.

D'autre part, la droite P_BP_C passe par le point A, lorsque les droites AP_B et AP_C se confondent suivant l'une des bissectrices de l'angle A. Il en résulte que ces bissectrices sont tangentes à la parabole Π_A, et, comme elles sont rectangulaires, la directrice passe par le point A.

On en conclut que la directrice de Π_A est la droite AA'.

M. ROUX, instituteur à Chalon-sur-Saône.

Bonnes solutions par MM. R. Bigard, lycée Victor-Hugo, à Besançon; Maresalchi; François Margand, école des Anglais, à Lyon.

ÉCOLE CENTRALE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Algèbre et Trigonométrie (M. Gérard).

5942. — Étudier le système d'équations $ax + by + cz = d$, $a'x + b'y + c'z = d$, $a''x + b''y + c''z = d$.

5943. — Étudier le système $ax + by + cz = 0$, $a'x + b'y + c'z = 0$.

5944. — Étudier le système $ax + by + cz = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$, $x + y + z = 0$.

5945. — Limite de l'expression $\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^{p+1}}$ (p entier) pour n infini.

5946. — Étude de a^x pour $a > 1$. Démontrer que $a^{x+y} = a^x a^y$, pour x et y fractionnaires.

5947. — Étude du nombre e; montrer que $e < 3$; montrer que $2,7 < e < 2,8$.

5948. — Etudier les séries

$$u_n = \frac{3^n + 2}{4^n + 5}; \qquad u_n = \frac{3^n + 5}{4^n + n^2}; \qquad u_n = \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\right)^{n^2}.$$

5949. — Etudier les séries $u_n = \frac{1}{n^2}$; $u_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au second terme.

5950. — Etudier les séries

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + 5}; \qquad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}; \qquad u_n = \frac{n+1}{\sqrt[3]{n}}; \qquad u_n = \sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}; \qquad u_n = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n};$$

$$u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^2}; \qquad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n^3}}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3 + 1}}; \qquad u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}.$$

5951. — Etudier la série $u_n = nx^n$; cas particuliers de $x = \frac{1}{2}$; limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au second terme. Calculer la somme de cette série.

5952. — Etudier les séries

$$u_n = n(n-1)x^n, \qquad u_n = \frac{x^n}{n^2}, \qquad u_n = \frac{n^2 x^n}{1 + n^4}, \qquad u_n = \frac{x^n \sqrt{n}}{n + 1}, \qquad u_n = \frac{x^n \sqrt{n}}{n^2 + 1} \quad (\text{cas de } x = -2),$$

$$u_n = \frac{x^n \sqrt{n}}{n^2 + 4}, \qquad u_n = \frac{n x^n}{n^3 + 1}, \qquad u_n = \frac{n x^n}{\sqrt{n^3 + 1}}, \qquad u_n = \frac{x^n}{n^2 + 3^n}, \qquad u_n = \frac{x^n}{n(1 + 2^n)}, \qquad u_n = \frac{x^n}{n(3^n + 1)} \quad (\text{cas de } x = 3),$$

$$u_n = \frac{x^n}{n(2^n + 3^n)}, \qquad u_n = \frac{x^n}{\mathrm{L}(n+1)}, \qquad u_n = \frac{x^n \mathrm{L}n}{n}, \qquad u_n = \frac{x^n \mathrm{L}n}{3n + 4}, \qquad u_n = \frac{x^n}{n + \mathrm{L}n}.$$

5953. — Dérivées de x^n, a^x, e^x, $e^{\frac{1}{x}}$, arc tg x, arc tg $\frac{1}{x}$, $\mathrm{L}(1 + x - 2x^2)$, $x^{\sin x}$, $x^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}$, $(1 + x)^x$, $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $(1 + x)^{\mathrm{L}x}$, $(1 + \sin x)^{\mathrm{L}x}$.

5954. — Appliquer la formule des accroissements finis aux expressions
$\sin 46^\circ - \sin 45^\circ$, $e^{\sin 41^\circ} - e^{\sin 40^\circ}$, $\mathrm{L}251 - \mathrm{L}250$ (vérifier au moyen de la règle à calculs).

5955. — Variations des fonctions suivantes :

$$y = e^{x - \frac{1}{x}}, \qquad y = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}, \qquad y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 4}}, \qquad y = \frac{e^x}{x}, \qquad y = x e^{-\frac{1}{x}}, \qquad y = (1 + x) e^{\frac{1}{x}}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{x},$$

$$y = x^x, \qquad y = x^{\frac{1}{x}}, \qquad y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

5956. — Variations de la fonction $y = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}$. Montrer que $\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x + 1}$, à l'aide de la formule des accroissements finis.

5957. — Développer en série $(1 + x)^m$; $\frac{1}{(1 + x)^2}$; $(1 + x)^{-3}$ (cas de $x = -\frac{1}{2}$, limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au second terme); $(1 + x)^{\frac{1}{2}}$; application au calcul de $\sqrt{2510}$; $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$; $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\text{cas de } x = \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}$; $\frac{1}{1 - 4x + 3x^2}$; $\frac{1}{1 - 3x + x^2}$.

5958. — Développement en série de $\mathrm{L}(1 - x)$; appliquer à $x = \frac{1}{5}$, limite supérieure de l'erreur commise en ne prenant que le premier terme. — Appliquer au calcul de $\mathrm{L}\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{10}$ près.

5959. — Développement en série de $y = \mathrm{L}(1 - x^2)$. Appliquer à $x = \frac{1}{4}$ et calculer la valeur trouvée à $\frac{1}{100}$ près.

5960. — Développer $\mathrm{L}\frac{1 - x}{1 + x}$ en série. Appliquer au calcul de L2. Limite supérieure de l'erreur commise en ne prenant que le premier terme.

5961. — Développer $\mathrm{L}\frac{1 - 2x}{1 + 3x}$ en série, et étudier directement la série.

5962. — Développer $\mathrm{L}(1 - x) - \mathrm{L}(1 - 2x)$ en série; intervalle de convergence ; nature de la série aux limites de cet intervalle.

5963. — Même question pour $\mathrm{L}(1 - 3x) - \mathrm{L}(1 - x)$.

5964. — Développer en série la fonction $y = \mathrm{L}(1 - x) - \mathrm{L}(1 - ax)$, $0 < a < 1$; étudier la série obtenue.

5965. — Développement de arc tg x en série ; application au calcul de π; limite supérieure de l'erreur commise en ne prenant que les 5 premiers termes.

5966. — Développer en série arc tg $\frac{1 + x}{1 - x}$, arc tg $\frac{2x}{1 - x^2}$.

5967. — Développer $\arcsin x$ en série ; application à $x = \frac{1}{2}$; évaluer la somme à $\frac{1}{10}$ près.

5968. — Calculer $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{1}{10}$ près en partant du développement de $\arcsin x$.

5969. — Développer en séries $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, $\arcsin(3x-4x^3)$.

5970. — Développer en série $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2})$.

5971. — Calculer les deux premiers termes du développement de $\operatorname{tg} x$.

5972. — Développer en série $y = e^x . \cos x$.

5973. — Ordre infinitésimal de $\sqrt[3]{1-\cos x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$, x désignant l'infiniment petit principal.

5974. — Différentielle totale de $z = f(u, v)$, u et v étant des fonctions données de x et y.

5975. — Limite de $\frac{\mathrm{L}\cos x}{\sin 2x}$ pour $x = 0$.

5976. — Limite de $\frac{e^x}{x^m}$, $\frac{x^m}{e^x}$ pour x infini.

5977. — Limite de $x^m \mathrm{L}x$, pour $x = 0$.

5978. — Dérivée de $y = x^x$ et valeur de cette dérivée pour $x = 0$. Même question pour

$$y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad y = (\sin x)^{\mathrm{L}x}, \qquad y = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

5979. — Limite de $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2+1}$ pour n infini ; même question pour $\left(\cos\frac{x}{n+1} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{n}\right)^{n^2}$.

5980. — Limite pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}, \qquad (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}, \qquad (\cos x + \cos 2x - \cos 3x)^{\frac{1}{x}},$$
$$(\cos 3x)^{\mathrm{L}x}, \qquad (2\cos x - e^x)^{\mathrm{L}x}, \qquad (1 + \operatorname{tg} x)^{\mathrm{L}x}.$$

5981. — Dérivée de $y = (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$; limite de cette dérivée quand x tend vers 0.

5982. — Déterminer les constantes a et b, de façon que l'expression

$$\frac{\cos x}{x + x^2} - \frac{a}{x} - b$$

tende vers 0 en même temps que x.

5983. — Même question pour

$$\frac{1}{\sin x + \sin^2 x} - \frac{a}{x} - b, \qquad \frac{\cos x}{\mathrm{L}(1+x)} - \frac{a}{x} - b, \qquad \frac{1}{\mathrm{L}(1+\sin x)} - \frac{a}{x} - b.$$

5984. — Trouver les valeurs de z vérifiant les équations

$$e^z = i, \qquad e^{iz} = 1, \qquad e^{iz} = -1, \qquad e^{iz} = e, \qquad e^{iz} = i - 1, \qquad e^{iz} = 1 + i, \qquad e^{iz} = 4i, \qquad e^{iz} = \frac{i}{e},$$

$$e^{iz} = i + \sqrt{3}, \qquad e^{2iz} = -1, \qquad e^{2iz} = i, \qquad e^{iz} - e^{-iz} = 0, \qquad e^{2iz} - 3ie^{iz} - 2 = 0, \qquad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 6,$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3i, \qquad \cos z = 2, \qquad \sin z = -i, \qquad \operatorname{tg} z = 2i.$$

5985. — Pour quelles valeurs de z, l'expression $e^{iz} + e^{-iz}$ est-elle réelle ?

5986. — Racines quatrièmes de l'unité.

5987. — Racines cinquièmes de l'unité. Somme des carrés de ces racines.

5988. — Racines sixièmes de l'unité.

5989. — Racines de l'équation $x^{10} - 1 = 0$; calculer leur somme, la somme de leurs cubes.

5990. — Racines douzièmes de l'unité. Calculer la somme des cubes de ces racines.

5991. — Calcul de $\sin\frac{a}{3}$ en fonction de $\sin a$. Somme des racines, somme de leurs carrés.

5992. — Calcul de $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$.

5993. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$; les trois racines de l'équation obtenue sont réelles ; calculer la somme de leurs carrés.

5994. — Résoudre l'équation $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

5995. — Étudier l'équation $x - \operatorname{tg} x = 0$.

5996. — Nombre de racines réelles de l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.

5997. — Même question pour $x^4 + x^2 + x - 2 = 0$, $x^3 + x^2 + x - 10 = 0$. Déterminer la racine réelle par la méthode des parties proportionnelles.

5998. — Etudier l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Calculer la racine positive par la méthode des parties proportionnelles. Somme des carrés des racines. Même question pour $x^3 - 4x^2 - 1 = 0$, $x^3 - 4x + 1 = 0$.

5999. — Condition de réalité des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Former l'équation qui admet pour racines les carrés des racines de l'équation proposée.

6000. — Conditions pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine triple. — Somme des carrés des racines de cette équation. — Former l'équation aux carrés des racines de la proposée.

6001. — Equation aux différences des racines de $x^3 + px + q = 0$, puis aux carrés des différences.

6002. — Etudier l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$; calculer la racine positive par la méthode des parties proportionnelles. — Former l'équation qui a pour racines les sommes des racines de la proposée, prises deux à deux.

6003. — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{3+4x^2}, \quad \int \frac{dx}{3+5x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad \int \frac{dx}{1-x^3}, \quad \int \frac{x^2dx}{x^3-1}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2},$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \quad \int \frac{x^2dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}, \quad \int \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x}}, \quad \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}+1}, \quad \int \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{4x-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{1+x-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{1+4x-x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{3-2x^2}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{1+x^2+x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx, \quad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad \int \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

6004. — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1+2\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x},$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(2+\sin x)^2}, \quad \int \cos^4 x\,dx, \quad \int \sin^4 x\,dx, \quad \int \cos^6 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n} x}, \quad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \quad \int \arcsin x\,dx, \quad \int x^2 \arcsin x\,dx, \quad \int \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1-x^2}\,dx, \quad \int e^x \cos x\,dx,$$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx, \quad \int \mathrm{L}x\,dx, \quad \int (\mathrm{L}x-1)^2 dx, \quad \int e^{\sin x}\,dx, \quad \int \frac{e^x dx}{e^x+2}, \quad \int \frac{e^x+1}{e^x+2}\,dx,$$

$$\int \frac{e^x+3}{e^x+2}\,dx, \quad \int \frac{e^x+2}{e^x+3}\,dx, \quad \int \frac{e^x dx}{3+e^2}, \quad \int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx.$$

6005. — Calculer les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^{2n} x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2p} x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}.$$

6006. — Formule de réduction pour le calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$.

6007. — Valeur moyenne d'une fonction ; appliquer à la fonction $\sin x$, prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

6008. — Variation de la fonction $y = x(\mathrm{L}x+1)$. Calculer $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e^2}$ par la règle à calculs. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x, et déterminer le centre de gravité de cette aire.

6009. — Aire limitée par la courbe $y = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}$ et son asymptote.

6010. — Aire limitée par la courbe $y = 2x + 3 \pm \sqrt{3-5x^2}$.

6011. — Longueur d'un arc de parabole.

6012. — Trouver la courbe dont la longueur de la tangente est constante. Longueur de l'arc.

6013. — Longueur de l'arc pour la courbe définie par l'équation $y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

6014. — Longueur de l'arc de la courbe $y^2 = \dfrac{(1-x)^3}{x}$.

6015. — Longueur de l'arc de la courbe $\rho = 1 + \cos\omega$; longueur totale. Centre de gravité de cet arc.

6016. — Volume d'un segment sphérique à deux bases, de hauteur h.

6017. — Aire et volume d'un ellipsoïde de révolution.

6018. — Aire d'une surface de révolution ; application à l'aire de la sphère.

6019. — Aire d'un paraboloïde de révolution limité par deux plans perpendiculaires à l'axe.

6020. — Aire de la surface de révolution engendrée par une parabole que l'on fait tourner autour de la tangente au sommet.

6021. — Moment d'inertie d'un triangle par rapport à sa base ; d'une ellipse par rapport à son grand axe ; d'une sphère par rapport à un de ses diamètres ; d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe ; d'un tore par rapport à son axe ; d'un cône de révolution par rapport à son axe. Centre de gravité du volume et de la surface de ce cône.

6022. — On considère la courbe d'équation $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. — Longueur de l'arc ; centre de gravité de l'arc ; aire limitée par la courbe et deux ordonnées ; centre de gravité de cette aire. Surface engendrée par la courbe en tournant autour de Ox. Moment d'inertie par rapport à l'axe, du solide limité par cette surface et deux plans perpendiculaires à l'axe.

6023. — On considère la courbe définie par les équations $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 < t < 2\pi$.
Longueur de l'arc ; centre de gravité de l'arc. Aire et volume engendrés par rotation autour de l'un des axes de coordonnées.

6024. — Aire limitée par la courbe $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. — Longueur de l'arc ; centre de gravité de l'aire limitée par les deux axes et la courbe. Volume engendré par cette aire en tournant autour de Oy. Aire de la surface engendrée par la courbe.

6025. — Aire limitée par la courbe $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ et les axes de coordonnées. Aire de la surface de révolution engendrée par cette courbe en tournant autour de Ox.

6026. — Centre de gravité d'un arc de parabole ; de l'aire comprise entre l'axe de la parabole, un arc de la courbe et deux perpendiculaires à l'axe.

6027. — Centre de gravité de l'aire d'une demi-ellipse ; d'un quart d'ellipse.

6028. — Centre de gravité de l'aire d'une boucle de lemniscate.

6029. — Centre de gravité du volume d'une demi-sphère.

6030. — Centre de gravité d'un demi-ellipsoïde de révolution.

6031. — Intégrer l'équation $y' = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}}$ et mettre sous forme algébrique la relation entre y et x.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2103. — Soient (C) le cercle ayant son centre en un point M variable d'une ellipse (E) et tangent au grand axe de (E), et (D) le cercle décrit sur le petit axe de (E) comme diamètre. Le lieu des centres de similitude des cercles (C) et (D) se compose de deux paraboles.

E.-N. Barisien.

2104. — Soit MM′ une droite joignant les extrémités de deux demi-diamètres conjugués M, M′ d'une ellipse et F l'un des foyers de l'ellipse. Trouver et construire les courbes :

1° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle FMM′ ;

2° Lieu de l'orthocentre du même triangle.

E.-N. Barisien.

Erratum. — N° de septembre 1912, p. 608. A la deuxième ligne de la question 2090, lire *cercle* au lieu de *sextique*.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Décembre 1912. N° 3.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS RÉCURRENTES DU PREMIER DEGRÉ

par M. **H. Beghin**.

On rencontre souvent, en particulier dans la recherche de certains développements en série, des systèmes d'équations de la forme :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{r} px_0 = a_0, \\ px_1 + qx_0 = a_1, \\ px_2 + qx_1 + rx_0 = a_2, \\ px_3 + qx_2 + rx_1 + sx_0 = a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ px_n + qx_{n-1} + rx_{n-2} + sx_{n-3} = a_n, \end{array}\right.$$

p, q, r, s étant des constantes données, a_n une fonction donnée de l'indice n ; $x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots$, étant des inconnues qu'il s'agit de déterminer. Les valeurs des premières inconnues $x_0, x_1, x_2, \ldots$ s'obtiennent immédiatement de proche en proche ; mais en procédant ainsi, il est rare qu'on aperçoive la loi donnant x_n en fonction de n.

Pour y arriver, je considère l'équation auxiliaire

$$(1)\qquad \varphi(x) = p + qx + rx^2 + sx^3 = 0\,;$$

soient λ, μ, ν ses racines.

Je multiplie la première des équations (I) par 1, la deuxième par λ, etc., la $(n+1)^{me}$ par λ^n, et je les ajoute ; il est évident que dans l'équation obtenue $x_0, x_1, \ldots, x_{n-3}$ ont des coefficients nuls de la forme $\lambda^2\varphi(\lambda)$; cette équation se réduit donc à

$$(2)\qquad p\lambda^n x_n + (p\lambda^{n-1} + q\lambda^n)x_{n-1} + (p\lambda^{n-2} + q\lambda^{n-1} + r\lambda^n)x_{n-2} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n.$$

Première méthode. — J'écris la première des équations (I), puis la somme des deux premières, multipliées respectivement par 1, λ, puis la somme des trois premières, multipliées respectivement par 1, λ, $\lambda^2, \ldots$, enfin la somme des $(n+1)$ premières, multipliées respectivement par 1, λ, $\lambda^2, \ldots, \lambda^n$; je forme ainsi un deuxième système d'équations récurrentes dont l'équation générale est l'équation (2). Si on la divise par λ^{n-2}, on voit que le nouveau système est de même forme que le premier, mais plus simple, puisque cette équation (2) ne contient plus que trois inconnues au lieu de quatre. En opérant de même sur ce nouveau système, on obtient finalement un système d'équations à une inconnue de la forme $px_n = a_n$; le problème est résolu.

Deuxième méthode. — Si les trois racines λ, μ, ν sont distinctes, je puis écrire l'équation (2) et deux autres analogues :

$$(3)\qquad p\mu^n x_n + (p\mu^{n-1} + q\mu^n)x_{n-1} + (p\mu^{n-2} + q\mu^{n-1} + r\mu^n)x_{n-2} = a_0 + a_1\mu + \cdots$$

$$(4)\qquad p\nu^n x_n + (p\nu^{n-1} + q\nu^n)x_{n-1} + (p\nu^{n-2} + q\nu^{n-1} + r\nu^n)x_{n-2} = a_0 + a_1\nu + \cdots$$

Ces trois équations (2), (3), (4) sont du premier degré en x_n, x_{n-1}, x_{n-2} ; leur déterminant est

$$p(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\mu - \nu)^2 ;$$

il est donc différent de zéro, de sorte que ces équations donnent x_n.

Cette méthode est en défaut si $\lambda = \mu$, car il manque une équation ; mais j'en obtiens une nouvelle en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées respectivement par 0, 1, 2λ, ..., $n\lambda^{n-1}$, dérivées des coefficients 1, λ, λ^2, ..., λ^n que j'avais utilisés précédemment. Dans l'équation obtenue, les coefficients de x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-3} sont nuls, comme étant de la forme $\frac{d}{d\lambda}[\lambda^3\varphi(\lambda)]$. Cette nouvelle équation est

$$(5) \quad pn\lambda^{n-1}x_n + p(n-1)\lambda^{n-2}x_{n-1} + [p(n-2)\lambda^{n-3} + q(n-1)\lambda^{n-2} + r(n-1)\lambda^{n-3}]x_{n-2}$$
$$= a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \ldots + na_n\lambda^{n-1}.$$

Le déterminant des équations (2), (4), (5) est différent de zéro ; il se réduit en effet à

$$p(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)^2.$$

Enfin, si $\lambda = \mu = \nu$, on aura une nouvelle équation en ajoutant les équations (1) respectivement multipliées par 0, 0, 2, 6λ, ..., $n(n-1)\lambda^{n-2}$, dérivées secondes des coefficients 1, λ, λ^2, ..., λ^n précédemment utilisés.

La méthode se généralise évidemment pour un nombre quelconque d'inconnues ; les équations obtenues sont toujours distinctes.

Exemple. — Soit à résoudre le système dont l'équation générale est

$$x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} - x_{n-3} = 1.$$

La première méthode conduit successivement à des systèmes dont les équations générales sont

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = n - 1 ; \qquad x_n - x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \qquad x_n = \frac{(n-1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

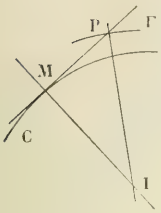
La deuxième méthode, si l'on remarque que 1 est racine triple de l'équation auxiliaire $\varphi(x) = 0$, conduit au système suivant en x_n, x_{n-1}, x_{n-2} :

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = n + 1, \\ nx_n - 2(n-1)x_{n-1} + (n-1)x_{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ n(n-1)x_n - 2(n^2-1)x_{n-1} + n(n+1)x_{n-2} = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}. \end{cases}$$

SUR LA TRAJECTOIRE D'UN POINT DE LA TANGENTE A UNE COURBE PLANE SITUÉE A UNE DISTANCE CONSTANTE DU POINT DE CONTACT

par M. **M. Carette**, professeur au lycée de Valenciennes

Soit M un point quelconque d'une courbe donnée C ; on suppose cette dernière orientée et que sur la tangente en M le sens positif est le même que sur la courbe, et l'on désigne par α l'angle de Ox et de ce sens positif. Au point M on fait correspondre sur la tangente le point P tel que $\overline{MP} = \rho$, ρ étant une fonction inconnue de l'arc s qui sur C détermine M. On se propose de déterminer ρ de telle sorte que la normale en P à la ligne L décrite par ce point passe constamment par le centre de courbure I de C en M. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ρ soit égal à une constante a.



En effet, x et y désignant les coordonnées de M, X, Y celles de P, on a $X = x + \rho\cos\alpha$, $Y = y + \rho\sin\alpha$. Les paramètres directeurs de la tangente à Γ sont dX, dY. D'autre part, en prenant pour sens positif sur la normale en M celui qui fait avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et en posant $\overline{MI} = R$, on obtient, pour projections de IP : $\rho\cos\alpha + R\sin\alpha$, $\rho\sin\alpha - R\cos\alpha$ (avec $ds = Rd\alpha$). Pour exprimer que IP est la normale en P à Γ, on écrit

$$(\rho\cos\alpha + R\sin\alpha)dX + (\rho\sin\alpha - R\cos\alpha)dY = 0.$$

En développant et tenant compte de $dx = \cos\alpha ds$, $dy = \sin\alpha ds$ et $ds = Rd\alpha$, on arrive à $d\rho = 0$, c'est-à-dire $\rho = a$, a étant une constante donnée.

Détermination du centre de courbure L *de* Γ *en* P.

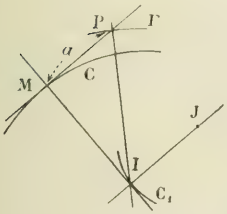
On suppose maintenant $\rho = a$. La normale IP a pour équation

$$(1) \qquad (X - x)(a\sin\alpha - R\cos\alpha) - (Y - y)(a\cos\alpha + R\sin\alpha) + aR = 0.$$

Les coordonnées du point de contact L de cette normale IP avec son enveloppe s'obtiennent en adjoignant à (1) l'équation différentiée qui s'écrit

$$(2) \quad (X - x)[(a\cos\alpha + R\sin\alpha)d\alpha - \cos\alpha dR] + (Y - y)[(a\sin\alpha - R\cos\alpha)d\alpha - \sin\alpha dR] + adR + Rds = 0.$$

On pose $\frac{\overline{LI}}{\overline{LP}} = \lambda$ et, d'après (1), on a

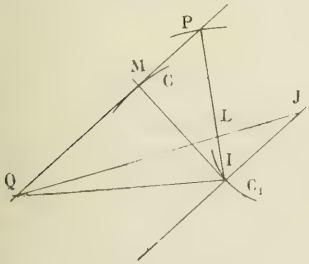


$$X - x = \frac{R\sin\alpha + \lambda a\cos\alpha}{\lambda - 1}, \qquad Y - y = \frac{-R\cos\alpha + \lambda a\sin\alpha}{\lambda - 1}.$$

En substituant dans (2), on obtient

$$\lambda = \frac{a\frac{dR}{d\alpha}}{a^2 + R^2}.$$

Soit C_1 la développée de C. On suppose que le sens positif sur C_1 est le même que sur sa tangente IM en I et que celui-ci est celui déjà choisi qui fait avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2} = \alpha_1$; alors le sens positif sur la normale à C_1 fait avec Ox l'angle $\alpha + \pi$. s_1 désignant l'arc de C_1 et J le centre de courbure de C_1 en I, on a $\overline{IJ} = \frac{ds_1}{d\alpha_1} = \frac{dR}{d\alpha}$, car $s_1 = R + C^{te}$. On change le sens positif sur IJ de façon à avoir le même sens que sur la tangente en M à C et l'on doit écrire $\frac{dR}{d\alpha} = -\overline{IJ}$. Donc $\lambda = -\frac{a\,\overline{IJ}}{a^2 + R^2}$.



Soit Q le point où la perpendiculaire en I à IP coupe MP.

On a $\overline{MQ} = -\frac{R^2}{a}$; donc $\overline{PQ} = -\frac{a^2 + R^2}{a}$ et $\lambda = \frac{\overline{IJ}}{\overline{PQ}}$.

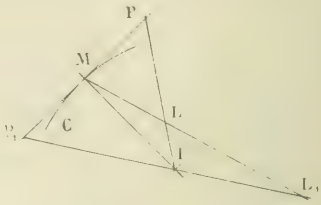
L'égalité $\frac{\overline{LI}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{PQ}}$ montre que le point L, centre de courbure de Γ, est l'intersection de JQ et PI.

(Tout ce qui précède peut se retrouver aisément par le centre instantané de rotation, et la construction de L que l'on vient d'indiquer n'est alors autre que la construction de Savary.)

Soit P_1 le symétrique de P par rapport à M. P_1 décrit une

ligne Γ_1 correspondant à $\overline{MP_1} = a_1 = -a$ et dont le centre de courbure est alors déterminé par

$$\lambda_1 = \frac{\overline{L_1I}}{\overline{L_1P_1}} = \frac{a_1 \frac{dR}{d\alpha}}{a_1^2 + R^2} = \frac{a \frac{dR}{d\alpha}}{a^2 + R^2}.$$



donc $$\lambda_1 = -\lambda, \qquad \frac{\overline{L_1I}}{\overline{L_1P_1}} = -\frac{\overline{LI}}{\overline{LP}}.$$

On a $$\frac{\overline{L_1I}}{\overline{L_1P_1}} \times \frac{\overline{MP_1}}{\overline{MP}} \times \frac{\overline{LP}}{\overline{LI}} = 1,$$

puisque $$\frac{\overline{MP_1}}{\overline{MP}} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{L_1I}}{\overline{L_1P_1}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{LI}} = -1;$$

donc, d'après la réciproque du théorème des transversales, *les trois points* L, L_1, *et* M *sont en ligne droite.*

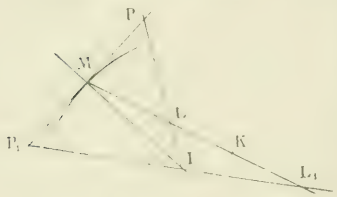
On peut chercher ce que doit être C pour que L soit toujours le milieu de IP. Dans ce cas, L_1 étant toujours à l'infini, le lieu de P_1 est une droite et le lieu de M est une tractrice correspondant à la valeur $|a|$ de la longueur de la tangente. On obtient ainsi relativement au lieu de P une propriété de la tractrice que l'on peut vérifier directement.

Il est intéressant de rechercher les courbes C telles que λ conserve une valeur constante. Soient C′ ces nouvelles courbes. On a trouvé $\frac{a\,dR}{a^2 + R^2} = \lambda\,d\alpha$. λ étant une constante, on peut intégrer et écrire $\lambda\alpha - \alpha_0 = \text{arc tg}\,\frac{R}{a}$; comme on peut supposer $\alpha_0 = 0$, on a $R = a\,\text{tg}\,\lambda\alpha$; puis on arrive à

$$x = a\int \cos\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha\,d\alpha, \qquad y = a\int \sin\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha\,d\alpha.$$

Le calcul de ces deux intégrales se ramène, dans le cas général, à celui des intégrales binomes.

On peut pour ces courbes C′ remarquer la propriété suivante : la droite ML touche son enveloppe en un point K tel que les deux figures de trois points alignés KLM et L_1IP_1 sont semblables. En effet, on a trouvé précédemment pour les coordonnées ξ, η de L



$$\xi = x + \frac{R\sin\alpha + \lambda a\cos\alpha}{\lambda - 1}, \quad \eta = y + \frac{-R\cos\alpha - \lambda a\sin\alpha}{\lambda - 1};$$

on en déduit facilement que l'équation de ML est

$$(X - x)(\lambda a\sin\alpha - R\cos\alpha) - (Y - y)(\lambda a\cos\alpha + R\sin\alpha) = 0$$

On différentie et l'on tient compte de $R = a\,\text{tg}\,\lambda\alpha$, $dR = a(1 + \text{tg}^2\,\alpha)\,d\alpha$. On obtient ainsi

$$(X - x)\sin\alpha - \lambda\cos\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha - (Y - y)(\cos\alpha + \lambda\sin\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha) + R = 0.$$

En adjoignant cette équation à celle de ML où l'on a fait $R = a\,\text{tg}\,\lambda\alpha$, on trouve de suite

$$X - x = \frac{a}{\lambda^2 - 1}(\lambda\cos\alpha + \sin\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha),$$

(X désignant l'abscisse de K, x l'abscisse de M). Or, $\lambda a\cos\alpha + a\sin\alpha\,\text{tg}\,\lambda\alpha$ c'est $(\xi - x)(\lambda - 1)$,

donc $X - x = \frac{(\lambda - 1)(\xi - x)}{\lambda + 1}$ et $\frac{X - x}{\xi - x} = \frac{1}{\lambda + 1} = \frac{\overline{MK}}{\overline{ML}}$. On conclut de là

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{KM}} = \lambda = \frac{\overline{L_1I}}{\overline{L_1P_1}},$$

ce qui démontre la proposition.

ALGÈBRE ET ANALYSE

2020. — *Étant donnée l'équation différentielle*

$$x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0,$$

trouver le développement en série de y suivant les puissances croissantes de x; cela fait, en déduire un changement de variable permettant d'obtenir directement l'intégrale générale. Construire les courbes intégrales.

1. Posons
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots;$$
on en déduit
$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 3.2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots.$$

Substituant dans l'équation différentielle

$$(1) \qquad x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0,$$

puis égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x, on a les relations

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0, \\ 2a_1 - 2a_1 = 0, \\ 2a_2 + a_0 - 4a_2 + 2a_2 = 0, \\ 2a_3 + a_1 - 6a_3 + 6a_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2a_n + a_{n-2} - 2na_n + n(n-1)a_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

On voit immédiatement que la première de ces relations donne $a_0 = 0$, ce qui était évident, que la seconde et la troisième se réduisent à des identités, que la quatrième donne $a_3 = -\frac{a_1}{1.2}$, enfin que la relation générale donne la loi de récurrence

$$(n-2)(n-1)a_n + a_{n-2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-2)(n-1)},$$

qui lie chaque coefficient à celui qui le précède de deux rangs.

Si n est pair, tous les coefficients s'exprimeront en fonction de a_2; si n est impair, ils s'exprimeront tous en fonction de a_1; il restera donc dans l'intégrale générale y deux constantes arbitraires a_1 et a_2, ce qui devait être.

On trouve immédiatement

$$a_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{a_2}{(2n-1)!}, \qquad a_{2n+1} = (-1)^n\frac{a_1}{(2n)!}.$$

Cherchons si la série qui donne y est convergente. Supposons d'abord $a_1a_2 \neq 0$, et formons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x,$$

si n est impair et égal à $2p+1$, ce rapport est égal à $-\frac{a_2}{a_1}\frac{x}{2p+1}$; si n est pair et égal à $2p$, le rapport est égal à $-\frac{a_1}{a_2}\frac{x}{2p}$; dans l'un et l'autre cas, il tend vers zéro, et la série est convergente quel que soit x.

Il en est de même si a_1 ou a_2 est nul; car, dans ce cas, le rapport $\frac{u_n}{u_{n-2}} = -\frac{a_n}{a_{n-2}}x = -\frac{x}{(n-2)(n-1)}$, tend vers zéro si n croît indéfiniment.

La série y étant convergente quel que soit x, l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$(2)\qquad y = a_1\left[x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \cdots\right]$$
$$+ a_2\left[x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} + \cdots\right].$$

2. Si on écrit y sous la forme

$$y = a_1 x\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$
$$+ a_2 x\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots\right],$$

on remarque que l'intégrale générale a pour valeur

$$(3)\qquad y = x(a_1 \cos x + a_2 \sin x).$$

Cette remarque donne le moyen d'obtenir directement l'intégrale générale de l'équation proposée. Posons en effet $y = tx$, d'où $y' = t'x + t$, $y'' = t''x + 2t'$,
et substituons dans l'équation (1); cette équation devient, après simplifications, et divisant par x^3,

$$(4)\qquad t'' + t = 0;$$

c'est une équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégrale générale est

$$t = A\cos x + B\sin x;$$

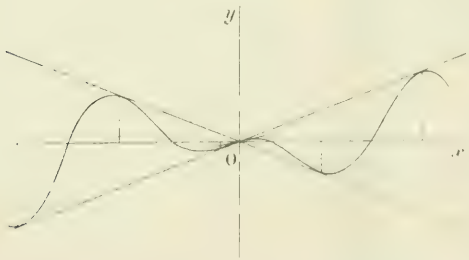
on a donc

$$(5)\qquad y = x(A\cos x + B\sin x);$$

c'est l'intégrale (3) déjà obtenue.

3. La courbe intégrale (3) est facile à construire. Supposons $a_1 a_2 \neq 0$; la courbe passe par l'origine, elle y a pour tangente la droite de coefficient angulaire a_1; elle admet une infinité de sinuosités qui rencontrent l'axe des x à l'origine et aux points pour lesquels $a_1 \cos x + a_2 \sin x = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{tg} x = -\dfrac{a_1}{a_2}$, d'où $x = k\pi + \alpha$, α étant l'un d'eux.

Toutes les sinuosités sont d'ailleurs tangentes aux deux droites issues de l'origine et de pente $m = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Coupons en effet la courbe par la droite $y = mx$ passant par l'origine; nous aurons, pour déterminer les abscisses des points d'intersection, l'équation



$$(6)\qquad m = a_1 \cos x + a_2 \sin x;$$

cette droite sera tangente si l'équation (6) a une racine double, c'est-à-dire si l'on a

$$-a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0,$$

ou $\operatorname{tg} x = \dfrac{a_2}{a_1}$, d'où $x = k\pi + \alpha + \dfrac{\pi}{2}$,

car les deux directions $-\dfrac{a_1}{a_2}$ et $\dfrac{a_2}{a_1}$ sont rectangulaires. Donc la courbe est tangente aux points d'abscisse $x = k\pi + \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ à la droite $y = mx$, m satisfaisant à l'équation $m = a_1 \cos x + a_2 \sin x$, d'où $m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

La courbe intégrale, où on a supposé $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, a donc la forme ci-dessus.

A. MACÉ de LÉPINAY.

Bonnes solutions : MM. Nyegaard; H. Froberg, à Paris, W. Saltz, Belloc; L. Simon, à Fourmies; L. Naugelle, à La Châtre; G. Lach et A. Rousseau.
Assez bonne solution : M. de Lur Saluces.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2021. — *Étant donnés trois axes rectangulaires et deux cercles tangents en O à Oy, l'un dans le plan des xy de rayon a, l'autre dans le plan des yz de rayon 2a, on considère les quadriques contenant ces deux cercles :*

1° *Trouver l'équation générale de ces quadriques et discuter leur nature ;*

2° *Trouver le lieu des centres et séparer sur le lieu les portions qui correspondent aux centres des diverses espèces de quadriques ;*

3° *Trouver l'équation de la sphère de Monge relative à une quelconque de ces quadriques ; démontrer que toutes ces sphères sont orthogonales à une sphère fixe ayant son centre dans le plan des xz, et trouver leur enveloppe.*

1. Les deux cercles donnés

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ax = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 - 4az = 0, \end{cases}$$

appartiennent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 4az = 0.$

Donc l'équation générale des quadriques cherchées est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda xz - 2ax - 4az = 0,$$

et renferme, ce qui devait être, un paramètre arbitraire λ.

Pour discuter la nature de ces surfaces, employons, par exemple, la méthode de l'équation en S. Comme $B = 0$, $B'' = 0$, l'équation en S se réduit à $(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A' - S)B'^2 = 0$, ou

$$(1 - S)[(1 - S)^2 - \lambda^2] = 0,$$

dont les trois racines sont $1 + \lambda, \quad 1, \quad 1 - \lambda.$

Calculons D_1 ; on sait que, x_0, y_0, z_0 désignant les coordonnées du centre, on a $D_1 = \frac{1}{2} f'_{x_0}$; or ici les équations du centre

$$(2) \qquad x + \lambda z - a = 0, \qquad y = 0, \qquad \lambda x + z - 2a = 0$$

donnent

$$(3) \qquad x = \frac{a(2\lambda - 1)}{\lambda^2 - 1}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{a(\lambda - 2)}{\lambda^2 - 1};$$

on en déduit

$$(4) \qquad D_1 = -(ax + 2az) = -\frac{a^2(4\lambda - 5)}{\lambda^2 - 1}.$$

Les valeurs remarquables de λ, rangées par ordre de grandeurs croissantes, sont

$$-1, \qquad 1, \qquad \frac{5}{4},$$

et donnent le tableau ci-après de discussion.

Pour $\lambda = \pm 1$, on voit immédiatement que la quadrique est un paraboloïde elliptique ; pour $\lambda = \frac{5}{4}$, un cône réel ; enfin pour $\lambda = 0$, elle est une sphère.

2. Le lieu des centres s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (2) du centre ; on trouve l'hyperbole équilatère du plan des xz.

$$(5) \qquad y = 0, \qquad xz + a^2 - 2z^2 - 2a = 0.$$

	Signes des racines de l'équation en S	Signe de D_1	Nature des quadriques
$\lambda < -1$	$-\ +\ +$	$+$	H_2
$\lambda = -1$			PE
$-1 < \lambda < 1$	$+\ +\ +$	$-$	E
$\lambda = 1$			PE
$1 < \lambda < \frac{5}{4}$	$+\ +\ -$	$+$	H_2
$\lambda = \frac{5}{4}$			Cône
$\frac{5}{4} < \lambda$	$+\ +\ -$	$-$	H_1

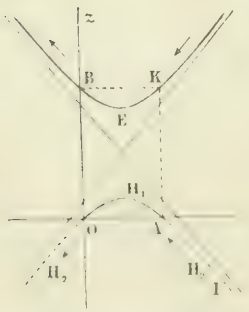
Mais, pour séparer sur le lieu les centres des diverses quadriques, il est préférable d'employer la forme paramétrique, et de se servir des expressions (3) des coordonnées du centre :

$$y = 0, \qquad x = \frac{a(2\lambda - 1)}{\lambda^2 - 1}, \qquad z = \frac{a(\lambda - 2)}{\lambda^2 - 1}.$$

En faisant varier λ de $-\infty$ à $+\infty$, on a le tableau suivant :

λ	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{5}{4}$		2		$+\infty$
x	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$	$+\infty$	$+$	$\frac{8a}{3}$	$+$	a $+$ 0
z	0	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$2a$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	$-\frac{4a}{3}$	$-$	0 $+$ 0
	H_2			E					H_2				H_1

La branche supérieure de l'hyperbole correspond tout entière aux centres d'ellipsoïdes ; dans la branche inférieure, les arcs pointillés sont les centres des hyperboloïdes à deux nappes ; l'arc AO donne les centres des hyperboloïdes à une nappe ; le point I est le sommet du cône; le point K le centre de la sphère.



3. On sait que la sphère de Monge relative à une quadrique a pour centre le centre de la surface, et que le rayon est donné par la formule

$$R^2 = -\frac{(a + a' + a'')D_1}{\Delta}.$$

Or, ici $a + a' + a'' = 3 - \lambda^2$, $D_1 = \frac{a^2(4\lambda - 5)}{\lambda^2 - 1}$, $\Delta = 1 - \lambda^2$.

L'équation de la sphère de Monge est donc

$$\left[x - \frac{a(2\lambda - 1)}{\lambda^2 - 1}\right]^2 + y^2 + \left[z - \frac{a(\lambda - 2)}{\lambda^2 - 1}\right]^2 = \frac{a^2(4\lambda - 5)(\lambda^2 - 3)}{(\lambda^2 - 1)^2},$$

ou, après simplifications,

$$(6) \qquad (\lambda^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(2\lambda - 1)x - 2a(\lambda - 2)z - 2a^2(2\lambda - 5) = 0.$$

L'équation (6) dépend d'un seul paramètre λ : donc l'enveloppe est une surface enveloppe de première espèce, tangente à chaque enveloppée suivant le cercle intersection de la sphère avec la sphère infiniment voisine. On obtient l'équation de cette enveloppe en écrivant que l'équation (6) admet en λ une racine double, ce qui donne

$$(7) \qquad (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-2ax-4az-10a^2)+a^2(2x+z+2a)^2=0.$$

C'est une surface du 4e ordre passant deux fois par le cercle de l'infini et symétrique par rapport au plan des xz. Il est très facile de voir que c'est une surface *anallagmatique* dont la déférente est le lieu des centres des quadriques considérées. Il suffit, d'après la définition des anallagmatiques, de faire voir que les sphères variables sont toutes orthogonales à une sphère fixe.

Ecrivons qu'une sphère fixe, ayant son centre dans le plan des xz,

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2z_0z+\mu=0$$

est orthogonale à la sphère variable (6)

$$(\lambda^2-1)(x^2+y^2+z^2)-2a(2\lambda-1)x-2a(\lambda-2)z-2a^2(2\lambda-5)=0\ ;$$

on a la condition d'orthogonalité

$$(8) \qquad 2ax_0(2\lambda-1)+2a(\lambda-2)z_0=\mu(\lambda^2-1)-2a^2(2\lambda-5).$$

Mais cette relation devant avoir lieu quel que soit λ, les coefficients des différentes puissances de λ doivent être nuls séparément. On a donc, pour déterminer x_0, z_0 et μ, les relations $\mu=0$, et

$$\begin{cases} 2x_0+z_0+2a=0, \\ x_0+2z_0+5a=0. \end{cases}$$

d'où $x_0=\dfrac{a}{3}$, $z_0=-\dfrac{8a}{3}$: la sphère fixe a pour équation

$$(9) \qquad x^2+y^2+z^2-\frac{2a}{3}x+\frac{8a}{3}z=0,$$

et son rayon est $\dfrac{a\sqrt{65}}{3}$.

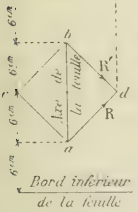
La propriété est donc démontrée.

A. MACÉ de LÉPINAY.

Bonnes solutions : MM. L. Naucelle, à La Châtre; G. Esteben; G. Lach, à Douai; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; A. Courtois, à Sedan.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2039. — *Le carré abcd représente la projection horizontale d'un tétraèdre régulier* ABCD *dont les arêtes ont* 12cm *de longueur, l'arête de bout* AB *étant au-dessus de l'arête horizontale* CD, *projetée verticalement en c'd'.*

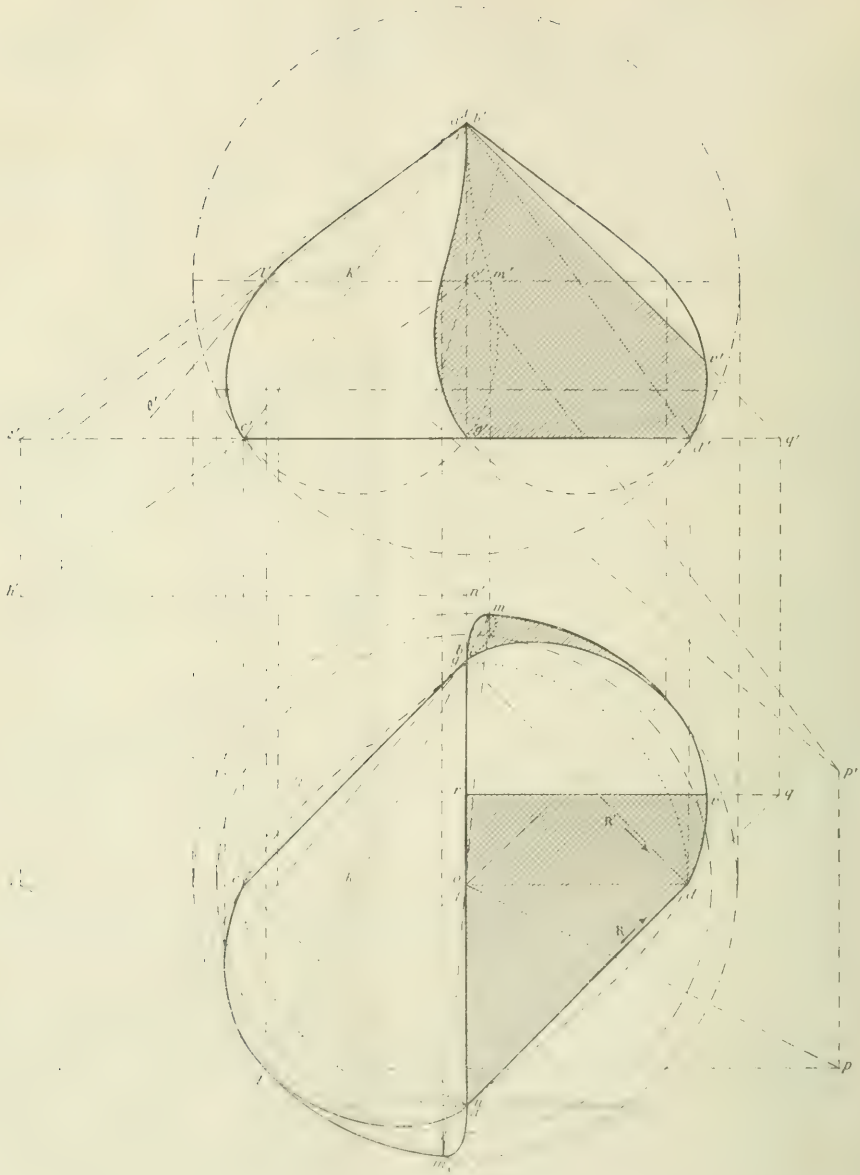


Dans le plan horizontal de l'arête CD, *on considère les deux droites qui ont pour projections horizontales ad et bc. Par ces droites, on fait passer deux paraboloïdes ayant pour génératrice commune* AB *et pour plan directeur commun un plan perpendiculaire à* AB.

1° *Représenter par ses deux projections le solide compris dans la sphère circonscrite au tétraèdre, au-dessus du plan horizontal de l'arête* CD *et au-dessous des deux paraboloïdes.*

2° *Figurer les ombres déterminées sur ce solide par des rayons lumineux dont la direction a pour projections* R *et* R'. (*Ecole polytechnique, Concours de 1912.*)

Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre régulier est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées. Nous obtenons donc immédiatement ses projections o, o' après avoir construit celles du tétraèdre $abcd$, $a'b'c'd'$ d'après les données de l'énoncé. Comme le plan vertical cod est un plan méridien de front, nous avons le rayon de la sphère en joi-



gnant $o'c'$ et nous en déduisons ses deux contours apparents. Chacun des paraboloïdes a une génératrice de bout AB, et par suite le contour apparent vertical se réduit au point $a'b'$ pour tous deux. L'un a pour génératrice verticale la verticale du point B, et l'autre la verticale du point A ; donc les contours apparents horizontaux se réduisent aux points b et a.

Intersection des solides. — Les deux paraboloïdes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la verticale passant par le centre de la sphère. Donc les courbes d'intersection de chacun d'eux avec la sphère seront symétriques par rapport à cette verticale ; par suite les projections horizontales seront symétriques par rapport au point o, et les projections verticales le seront par rapport au diamètre $o'a'$. Nous construirons seulement l'intersection du paraboloïde de gauche avec la sphère et nous obtiendrons l'autre par symétrie.

Points remarquables. — Le point (a', b') est un point double pour la projection verticale de la courbe ; l'une des tangentes, correspondant à l'arc projeté en b, est la verticale $o'b'$ puisque le plan tangent au paraboloïde en (b, b') est de profil ; l'autre est dans le plan tangent en (a, a') qui est de bout, et par suite, puisqu'il contient la génératrice de front passant en A, c'est la projection verticale de cette génératrice $a'e'$ qui donne la tangente.

Le plan horizontal CD coupe la sphère suivant le petit cercle de rayon OC qui coupe la génératrice $(gc, g'c')$ aux points g, g' et c, c', ce dernier donnant un point sur le contour apparent vertical de la sphère ; la tangente au point C est la perpendiculaire au plan des normales en ce point à chaque surface ; nous avons construit la normale $(c'n', cn)$ au paraboloïde dont les projections sont respectivement perpendiculaires à $f'c'$ et à cg et nous avons mené l'horizontale $(hn, h'n')$, d'où la tangente cherchée ct. On obtiendrait la tangente en (g, g') par le même procédé.

Les points sur le contour apparent horizontal de la sphère s'obtiennent en prenant le plan horizontal auxiliaire passant par son centre ; il nous donne sur le paraboloïde la génératrice horizontale projetée en bk d'où les deux points (l, l') et (m, m') ; nous avons construit la tangente au point l' en cherchant la ligne de front $l'p'$ du plan des normales aux deux surfaces en ce point, et pour cela nous avons mené par le centre de la sphère la parallèle $(op, o'p')$ à la normale lm, au paraboloïde. La perpendiculaire $l'\theta'$ à cette ligne de front est la tangente cherchée. Les points sur le contour apparent vertical de la sphère sont sur la génératrice de front $(cf, c'f')$, mais le point c' subsiste seul puisqu'on enlève la partie solide située au-dessus de la génératrice commune AB. On obtient autant de points de la courbe d'intersection que l'on veut en appliquant la construction par lignes de niveau, qui nous a donné les points (l, l') et (m, m'), et on achève de tracer la courbe par symétrie comme nous l'avons indiqué.

Ombres portées. — En raison de la direction des rayons lumineux, le paraboloïde de gauche reçoit la lumière sur toute la surface visible intérieure à la sphère. Quant au paraboloïde de droite, on voit que le plan de bout qui projette la direction R′ et qui passe par la génératrice AB, arête supérieure du solide conservé, coupe sa surface suivant la génératrice de front $(rq, r'q')$. Donc toute la portion de surface située au-dessous de ce plan est dans l'ombre, et l'autre partie est éclairée.

Enfin on voit sans difficulté que les deux portions de surface sphérique qui limitent le solide sont, l'une $bmvdg$ sur l'hémisphère obscur, l'autre symétrique par rapport au centre, sur l'hémisphère éclairé. On en déduit la représentation figurée sur l'épure. Il est à remarquer que la partie inférieure du solide comporte en projection horizontale deux arcs de petits cercles dg et ac qui sont tous deux cachés par le solide.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite*)

8811. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox en T et Oy en T′ ; la normale au même point rencontre Ox en N et Oy en N′ ; NT′ et TN′ se coupent au point P. Déterminer la courbe de façon que OM = OP.

8812. — Soit MT la tangente en un point M d'une courbe, OP la perpendiculaire menée de l'origine O à cette tangente, ω et φ les angles que font OM et OP avec Ox, déterminer la courbe de façon que $\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\varphi = k$.

8813. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Oy au point T. Par ce point on mène une parallèle à Ox qui rencontre en P la normale au point M ; puis, on mène Pz symétrique de PM par rapport à PT. Déterminer la courbe de façon que Pz touche son enveloppe au point P.

8814. — Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure soit égal à $\frac{a}{\cos^2 \alpha}$, a étant une constante et α l'angle de la tangente avec Ox.

8815. — Trouver une courbe telle que si l'on abaisse d'un point fixe O une perpendiculaire OP sur la tangente au point M, l'aire du triangle OMP soit constante.

8816. — On considère une courbe passant par l'origine O ; la tangente en un point M rencontre Ox au point T. Déterminer la courbe de façon que le centre de gravité de l'arc OM ait même abscisse que le point T.

8817. — Déterminer une courbe telle que si par chaque point on mène une droite faisant un angle constant avec la tangente, cette droite enveloppe un cercle.

8818. — On prend sur la tangente en un point M d'une courbe une longueur $MA = a$, et sur la normale une longueur $MB = b$, a et b étant des constantes, puis sur la droite AB un point C tel que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k$. Déterminer la courbe de façon que le point C décrive un cercle.

8819. — Les points A et B étant construits de la même manière, déterminer la courbe de façon que le cercle circonscrit au triangle AMB passe par un point fixe.

8820. — Déterminer une courbe telle que le cercle de rayon constant, passant par un point fixe O et par un point M de la courbe, détermine sur la tangente en M une corde de longueur donnée.

8821. — Trouver une courbe qui coupe sous un angle constant toutes les droites passant par un point fixe.

8822. — Par un point C, situé sur la normale en un point M d'une courbe, on mène une sécante qui rencontre la courbe en B et la tangente en M au point A. On prend MA comme infiniment petit principal. Calculer l'ordre infinitésimal de AB.

8823. — Déterminer l'enveloppe de la droite $x \cos \varphi - y \sin \varphi - p = 0$, sachant que p est une fonction de φ vérifiant la relation $pp'' - 2p'^2 = p^2$.

8824. — D'un point $M(x_0, y_0)$ on mène les tangentes MA et MB à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Former l'équation du cercle circonscrit au triangle MAB.

8825. — Enveloppe des paraboles ayant un foyer fixe et dont la directrice passe par un point fixe.

8826. — Enveloppe des cercles qui ont pour diamètres les cordes d'une parabole passant par le foyer.

8827. — Trouver l'expression du rapport anharmonique de quatre points d'une ellipse dont les anomalies excentriques sont 2α, 2β, 2γ, 2δ.

8828. — Inscrire dans une ellipse un triangle ABC tel que la tangente en chaque sommet soit parallèle au côté opposé. Étant donné un point M de l'ellipse, déterminer le triangle ABC de façon que le rapport anharmonique (MABC) soit égal à -1.

8829. — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les tangentes à la courbe. L'équation du lieu est $x^2 + y^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. Construire cette courbe.

8830. — On donne deux coniques (S) et (S') et un point P. Par ce point on mène deux sécantes PAB et PCD dans la conique (S), ces deux sécantes étant parallèles à deux diamètres conjugués de (S'). Démontrer que la droite joignant les milieux de AB et CD passe par un point fixe. Ne peut-on déduire cette propriété du théorème de Frégier ?

8831. — Équation générale des hyperboles équilatères asymptotes à l'axe des x et tangentes à la droite $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Combien y en a-t-il qui passent par un point donné du plan ? Lieu des points par où passent deux hyperboles se coupant à angle droit.

8832. — La tangente en un point M d'une parabole rencontre l'axe au point T. On prend le symétrique T' de T par rapport au point M, et par le point T' on mène une droite Δ perpendiculaire à MT. Enveloppe de la droite Δ.

8833. — Trouver l'enveloppe des cordes d'une parabole qui sont vues d'un point fixe sous un angle droit.

8834. — Lieu des projections du centre d'une hyperbole sur ses tangentes. Construire ce lieu.

8835. — Combien y a-t-il de coniques ayant un foyer donné et passant par trois points donnés ? Étude analytique et géométrique.

8836. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et deux points A et A' sur Ox. Un point M est variable sur une droite Δ. AM rencontre Oy en P, PA' coupe OM en M'. Lieu de M'. Solution géométrique.

8837. — Quelle relation existe-t-il entre les rayons de deux cercles tangents à la parabole $y^2 - 4px = 0$, et tangents entre eux au foyer ?

8838. — Condition pour que quatre points d'une ellipse soient sur un cercle.

8839. — Trouver l'équation générale des hyperboles équilatères ayant pour asymptote Oy et tangentes à la droite

$$y - mx = 0.$$

8840. — On donne une conique et un point P. Par ce point on mène une sécante quelconque PAB. Lieu du milieu de AB.

8841. — Former l'équation ayant pour racines les coefficients angulaires des normales issues d'un point (α, β) à la parabole $y^2 - 2px = 0$. En déduire le lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont normaux à une parabole.

8842. — Comment peut-on obtenir la développée d'une ellipse ? Calculer l'aire limitée par cette développée.

8843. — On considère une ellipse ayant pour foyer le point O et pour axe focal Ox. Soit M un point de l'ellipse, r la longueur OM, V l'angle de la tangente en M avec OM et ds l'élément d'arc. Calculer l'intégrale $\int \frac{\sin V ds}{r^2}$ étendue au contour de l'ellipse.

8844. — Etant donnée la parabole définie par les équations paramétriques $x = at^2 + bt + c$, $y = a't^2 + b't + c'$, on demande la condition que doivent vérifier les t de quatre points de la courbe pour que ces points soient sur un cercle. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole.

8845. — Par un point $M(\alpha, \beta)$ on mène les tangentes MA et MB à une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Former l'équation du cercle passant par les points A et B et le centre de l'ellipse.

8846. — Construire la parabole $(2x - y)^2 - a(y - x) = 0$. Equation de l'axe ; équation réduite.

8847. — On considère deux paraboles homofocales ayant leurs axes perpendiculaires. Quelle relation doit-il exister entre les paramètres pour que la tangente commune soit parallèle à la droite $y = mx$?

8848. — On donne une hyperbole équilatère, et on considère un cercle C touchant l'hyperbole au point M et la rencontrant en deux autres points A et B. Démontrer que AB est perpendiculaire à OM, O étant le centre de l'hyperbole. On suppose ensuite que le cercle passe par le point O. Trouver le lieu de son centre, lorsque le point M décrit l'hyperbole.

8849. — Former l'équation générale des paraboles passant par l'origine, par le point $x = a$, $y = 0$ et ayant pour direction asymptotique $x + y = 0$. Lieu des points de contact de ces paraboles et des hyperboles équilatères asymptotes à Ox et Oy.

8850. — En un point M d'une parabole on mène la normale MN, la perpendiculaire à l'axe MP et la symétrique MQ de MN par rapport à MP. Trouver l'enveloppe de MQ quand le point M décrit la parabole.

8851. — Condition pour que les deux coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

soient homothétiques.

8852. — Déterminer les cercles osculateurs à une parabole aux extrémités de la corde focale perpendiculaire à l'axe.

8853. — D'un point M on peut mener trois normales à une parabole. Quel lieu doit décrire le point M pour que l'une d'elles soit bissectrice de l'angle des deux autres ?

8854. — D'un point M on mène les tangentes MA, MB à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Le cercle OAB rencontre la courbe en deux autres points C et D ; du point O on abaisse OP perpendiculaire sur CD. On demande le lieu du point P lorsque M décrit une droite.

8855. — On donne une conique et deux points fixes M et M' de cette conique, diamétralement opposés. Un point P est variable sur la conique. Lieu du point de concours des hauteurs du triangle PMM'.

8856. — Que représente l'équation $(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 - 2ky = 0$? Enveloppe des axes quand α varie.

8857. — Lieu des centres des ellipses qui passent par l'origine, dont les foyers décrivent les axes Ox, Oy et dont la somme des carrés des axes est constante.

8858. — Aire comprise entre la parabole et sa développée. Intersection des deux courbes.

8859. — Déterminer sur une parabole de foyer F et de sommet O un point M tel que l'on ait arc $OM = k.FM$. Discuter.

8860. — Etudier la conique $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$. Equation des axes ; équation réduite.

8861. — Etant donnée une conique C et deux points P et P', démontrer qu'il existe une conique passant par les points P, P' et par les points de contact des tangentes menées par P et P' à la conique C.

8862. — Etudier l'intersection de deux coniques qui ont un foyer commun et dont les axes focaux sont perpendiculaires. Traiter la question en coordonnées polaires.

8863. — On donne une conique et une corde normale. Déterminer le point de Frégier et le centre de courbure, et comparer ces deux points.

8864. — Calculer le rayon de courbure au point (x, y) de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

8865. — Une droite Δ rencontre une ellipse en deux points A et B. Les normales en A et B se coupent en un point M, et du point M on peut mener deux autres normales MC et MD à l'ellipse. Former l'équation de la droite CD.

8866. — On donne un cercle de centre O et deux points A et M de ce cercle. Former l'équation de la parabole osculatrice en M à ce cercle et dont l'axe est parallèle à OA.

8867. — On donne la parabole $y^2 - 4px = 0$, et l'on demande le lieu d'un point tel que les normales issues de ce point à la parabole et la parallèle à l'axe menée par ce point forment un faisceau harmonique.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2105. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et une droite AB qui rencontre Ox en A et Oy en B.

1° Connaissant l'équation ponctuelle de la courbe (C) décrite par le milieu C de AB, trouver l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite AB.

2° Examiner les cas où la courbe (C) est une droite, un cercle, une kreuzcurve d'axes Ox, Oy.

3° Lorsque la courbe (C) est une droite, l'enveloppe de AB est une parabole. Trouver, lorsque la droite (C) varie en passant par un point fixe, le lieu du foyer, du sommet de cette parabole, ainsi que l'enveloppe de son axe, et de sa tangente au sommet.

Louis Sibe, à Lyon.

2106. — On considère un faisceau ponctuel de coniques et une droite Δ ; le pôle de Δ décrit une conique Γ harmoniquement circonscrite au faisceau. Les tangentes à Γ aux sommets du triangle conjugué rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur une même droite Δ' ; les deux droites Δ et Δ' sont réciproques. Soit Γ' la conique qui correspond à Δ'.

Démontrer que si l'une des droites Δ, Δ' tourne autour d'un point fixe, l'autre enveloppe une conique harmoniquement inscrite au faisceau, que le point d'intersection de Δ et de Δ' décrit une cubique, et que le quatrième point de rencontre des coniques Γ et Γ' décrit une sextique ayant trois points triples aux sommets du triangle conjugué.

J.-G. Nicolesco.

2107. — Soit M le point le plus haut d'une cycloïde engendrée par un cercle O qui roule sur une droite Δ et qui actuellement touche la cycloïde au point M. Soit AB une parallèle à Δ qui coupe la cycloïde en A et le cercle en B. Montrer que AB = arc BM, et en déduire la construction du centre instantané de rotation qui correspond au point A de la cycloïde.

L. Montaut.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2023. — *On considère deux séries (u) et (v) dont les termes généraux u_n et v_n sont définis par les équations*

$$u_n = au_{n-1} + bv_{n-1},$$
$$v_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1},$$

dans lesquelles a, b, c sont des constantes connues.

Calculer l'expression des termes généraux u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0.

Première solution. — 1. Je puis d'abord simplifier ce problème en exprimant x_n (1) en fonction des x seuls. En effet, nous avons

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} = ax_{n-1} + b(\alpha x_{n-2} + \beta y_{n-2}),$$

puis,

$$= ax_{n-1} + b(\alpha x_{n-2} + \beta(ax_{n-3} + by_{n-3})) = \cdots,$$

et, de proche en proche,

$$x_n = ax_{n-1} + \alpha b[x_{n-2} + \beta x_{n-3} + \beta^2 x_{n-4} + \cdots + \beta^{n-2} x_0] + \beta^{n-1} . by_0.$$

En appliquant au terme x_{n-1},

$$x_{n-1} = ax_{n-2} + \alpha b[x_{n-3} + \beta x_{n-4} + \beta^2 x_{n-5} + \cdots + \beta^{n-2} x_0] + \beta^{n-2} . by_0.$$

Multipliant les deux termes de cette égalité par β et soustrayant membre à membre de la précédente, il vient

$$x_n = (a + \beta)x_{n-1} - \alpha b x_{n-2},$$

et par symétrie,

$$y_n = (a + \beta)y_{n-1} - (a\beta - b\alpha)y_{n-2},$$

équations de la forme

$$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2},$$

où A et B sont connus, et pour laquelle x_0 est une donnée et x_1 se calcule en fonction des données x_0 et y_0,

$$x_1 = ax_0 + by_0.$$

2. Je suis donc amené à étudier la série

(1) $$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}.$$

Posons (2) $$x_n = A_n x_{n-1} + B_n x_{n-2}.$$

(1) L'auteur de la question appelle x_n et y_n ce qu'il a été désigné par u_n et v_n dans l'énoncé de la question N° 2023.

En égalant ces deux formes de x_n, il vient

$$x_n = A_n x_1 + B_n x_0 = A(A_{n-1}x_1 + B_{n-1}x_0) + B(A_{n-2}x_1 + B_{n-2}x_0)$$
$$= (AA_{n-1} + BA_{n-2})x_1 + (AB_{n-1} + BB_{n-2})x_0 ;$$

d'où, en identifiant les coefficients de x_1 et x_0,

(3) $$A_n = A.A_{n-1} + B.A_{n-2},$$

(4) $$B_n = A.B_{n-1} + B.B_{n-2}.$$

3. Le problème revient donc à exprimer A_n et B_n en fonction des premiers termes A et B. En appliquant l'équation (1) aux termes x_0, x_1, x_2, il vient

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.x_1 + 1.x_0, \\ x_1 &= 1.x_1 + 0.x_0, \\ x_2 &= Ax_1 + Bx_0, \end{aligned} \quad \text{d'ou} \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= 0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= 1, & B_1 &= 0, \\ A_2 &= A, & B_2 &= B. \end{aligned} \right.$$

Les termes successifs A_3, B_3, A_4, B_4, ... s'obtiennent en appliquant successivement les équations (3) et (4) :

$$\begin{aligned} A_3 &= A^2 + B, & B_3 &= A.B, \\ A_4 &= A^3 + 2B.A, & B_4 &= A^2B + B^2, \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans ce qui va suivre, je supposerai les polynomes A_n et B_n ordonnés suivant les puissances décroissantes de A.

4. Une première propriété des polynomes A_n et B_n me permet de limiter la recherche aux polynomes A_n seuls. Je vais démontrer en effet que

(5) $$B_n = B.A_{n-1}.$$

Le fait est exact pour le polynome $B_2 = B = B \times 1 = B \times A_1$, et pour le polynome $B_3 = AB = BA_2$. Supposons-le vrai pour n et $n-1$, nous aurons

$$B_{n-1} = AB_n + BB_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, $B_n = BA_{n-1}$ et $B_{n-1} = BA_{n-2}$, d'où

$$B_{n+1} = ABA_{n-1} + B.B.A_{n-2} = B(AA_{n-1} + BA_{n-2}) = B.A_n.$$

La propriété est donc générale ; et je rechercherai seulement le développement de A_n.

5. Je dis que le polynome A_n est de degré $(n-1)$ en A. Le tableau des polynomes A_2 et A_3 montre que c'est exact pour eux. Ce fait est général. Supposons-le vrai pour A_n et A_{n-1}. Nous aurons

$$A_{n+1} = AA_n + BA_{n-1}.$$

Le 1er terme AA_n est de degré n en A, le second de degré $n-2$ en A, donc la somme est bien de degré n.

On démontrerait aussi facilement que les polynomes A_{2n} d'indice pair sont divisibles par A. Ils sont donc le produit de A par un polynome de degré $(2n-2)$.

6. Les polynomes A_{2n+1} de rang impair sont homogènes en A^2 et B ; les polynomes A_{2n} de rang pair sont égaux au produit du facteur A par un polynome homogène en A^2 et B. Autrement dit : Dans chaque terme des polynomes A_n, la somme de l'exposant de A et du double de l'exposant de B est constante. De plus, le premier terme étant $A^{n-1} = A^{n-1}.B^0$, cette somme est égale à $n-1$.

La propriété se vérifie pour $n = 2$, $n = 3$. Je dis qu'elle est générale. Supposons qu'elle soit vraie pour A_n et A_{n+1} ; ils affecteront la forme suivante :

$$A_n = A^{n-1} + {}_1\alpha_n BA^{n-3} + {}_2\alpha_n B^2A^{n-5} + \cdots + {}_{p-1}\alpha_n B^{p-1}A^{n-2p+1} + {}_p\alpha_n B^pA^{n-2p-1} + \cdots,$$
$$A_{n+1} = A^n + {}_1\alpha_{n+1} BA^{n-2} + {}_2\alpha_{n+1} B^2A^{n-4} + \cdots + {}_p\alpha_{n+1} B^pA^{n-2p}, \cdots$$

Appliquons l'égalité $$A_{n+2} = AA_{n+1} + BA_n :$$

le polynome A_{n+2} aura des termes de la forme B^pA^{n-2p} et pas d'autres. La propriété est donc générale.

De plus, le coefficient de ce terme est

$$ {}_p\alpha_{n+2} = {}_{p-1}\alpha_{n+1} + {}_p\alpha_n $$

Cette équation va me permettre de chercher l'expression du coefficient général ${}_p\alpha_n$.

7. Cherchons le coefficient ${}_1\alpha_{n+2}$ du terme BA^{n-1} dans le polynome A_{n+2}. L'identification donne immédiatement

$$ {}_1\alpha_{n+2} = {}_1\alpha_{n+1} + 1. $$

La formule générale précédente s'applique donc au cas où $p = 0$, en faisant la convention

$$ {}_0\alpha_n = 1. \tag{6} $$

Les coefficients α sont donc déterminés par l'équation générale

$$ {}_p\alpha_n = {}_{p-1}\alpha_{n-1} + {}_p\alpha_{n-2}; \tag{7} $$

on peut les calculer par récurrence, connaissant ${}_0\alpha_n = {}_0\alpha_{n-1} = \cdots = 1$.

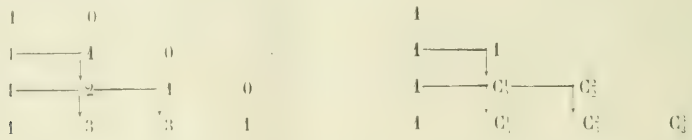
De plus, l'expression explicitée de A_3 donnée plus haut montre que :

$$ {}_1\alpha_2 = 1. $$

Je dresse donc le tableau de α pour les premières lignes, en indiquant par des flèches la manière de passer par addition de deux figures à une troisième.

	$p = 0$	1	2	3	...
$n = 2$	1	0	0	0	
3	1	1	0	0	
4	1	2	0	0	
5	1	3	1	0	
6	1	4	3	0	

Ce tableau est identique, à la disposition des lignes et des colonnes près, au triangle de Pascal, tant par sa composition que par son mode de récurrence :



Donc, en général,

$$ {}_p\alpha_n = C_{n-p-1}, $$

ce qu'on vérifie aisément en remplaçant dans l'équation (7) les coefficients par leurs valeurs

$$ C_{n-p-1}^{p-1} = C_{n-p-2}^{p-1} + C_{n-p-2}^{p}, $$

conséquence immédiate de la propriété classique des combinaisons :

$$ C_n^p = C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1}. $$

8. Nous pouvons donc maintenant écrire en entier l'expression du polynome A_n :

$$ A_n = A^{n-1} + C_{n-2}^1 BA^{n-3} + C_{n-3}^2 B^2A^{n-5} + \cdots + C_{n-p-1}^p B^pA^{n-2p-1} + \cdots $$

L'expression de B_n s'en déduit au moyen de l'équation (5) :

$$ B_n = BA_{n-1} = BA^{n-2} + C_{n-2}^1 B^2A^{n-4} + \cdots + C_{n-p-2}^p B^{p+1}A^{n-2p-2} + \cdots $$

Le problème est donc complètement résolu.

R. HUMERY, élève à l'École nationale supérieure des Mines.

Bonne solution : A. Borssat, à Fournes-en-Weppes.

Deuxième solution. — Supposons que u_n et v_n soient les coefficients de x^n dans le développement de deux fonctions $U(x)$, $V(x)$, qui vérifient les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} U = aUx + bVx + u_0, \\ V = \alpha + \beta + v_0. \end{cases}$$

Alors, entre les coefficients u_n, u_{n-1}, v_n, v_{n-1}, existeront les deux relations

$$\begin{cases} u_n = au_{n-1} + bv_{n-1}, \\ v_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}. \end{cases}$$

En résolvant les équations (1) on obtient

$$\begin{cases} U = \dfrac{u_0 + x(bv_0 - \beta u_0)}{1 - (a + \beta)x + (a\beta - b\alpha)x^2}, \\ V = \dfrac{v_0 + x(\alpha u_0 - av_0)}{1 - (a + \beta)x + (a\beta - b\alpha)x^2}. \end{cases}$$

Soient $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ les racines du dénominateur commun à U et V; on aura par exemple,

$$U = \frac{u_0 + x(bv_0 - \beta u_0)}{(px - 1)(qx - 1)} = \frac{A}{1 - px} + \frac{B}{1 - qx}.$$

La décomposition en éléments simples fournit de suite les valeurs de A, B en fonction de a, b, α, β, u_0 et v_0. Pour x assez petit on aura

$$\frac{A}{1 - px} = A(1 + px + p^2x^2 + \cdots + p^nx^n + \cdots), \qquad \frac{B}{1 - qx} = B(1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^nx^n + \cdots).$$

Le coefficient u_n de x^n dans le développement de $U(x)$ sera donc

$$u_n = Ap^n + Bq^n.$$

La valeur de v_n serait de même $\qquad v_n = A'p^n + B'q^n,$

A′, B′ étant aussi deux fonctions de a, b, α, β, u_0, v_0 se calculant comme A et B.

Jean MOURRET, élève à l'École normale supérieure.

Troisième solution. — On peut écrire

$$\beta u_n = a\beta u_{n-1} + b\beta v_{n-1},$$
$$bv_n = \alpha bu_{n-1} + b\beta v_{n-1},$$

et

$$bv_n = \beta u_n - (a\beta - \alpha b)u_{n-1},$$
$$bv_{n-1} = \beta u_{n-1} - (a\beta - \alpha b)u_{n-2}.$$

En remplaçant bv_{n-1} par sa valeur dans l'expression qui donne u_n, on a

$$u_n = (a + \beta)u_{n-1} - (a\beta - \alpha b)u_{n-2}.$$

On aurait de même

$$v_n = (\alpha + b)v_{n-1} + (a\beta - \alpha b)v_{n-2}.$$

On sait que l'on peut alors écrire

$$u_n = pq^n + rt^n,$$
$$v_n = p'q^n + r't^n,$$

q et t étant les racines de l'équation

$$X^2 - (a + \beta)X + (a\beta - \alpha b) = 0,$$

p, r, p' et r' étant définis par les équations

$$\begin{cases} p + r = u_0, \\ pq + rt = u_1 = au_0 + bv_0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} p' + r' = v_0, \\ p'q + r't = \alpha u_0 + \beta v_0. \end{cases}$$

On a facilement

$$p = \frac{au_0 + bv_0 - tu_0}{q - t},$$
$$r = \frac{qu_0 - au_0 - bv_0}{q - t},$$
$$p' = \frac{\alpha u_0 + \beta v_0 - tv_0}{q - t},$$
$$r' = \frac{qv_0 - \alpha u_0 - \beta v_0}{q - t}.$$

On a alors

$$u = \frac{1}{q-t}(au_0 + bv_0 - tw_0 q^n + qu_0 - au - bv_0 t^n)$$
$$= \frac{1}{q-t}[au + bv + (q - t - u_0 q t q^{n-1} - t^{n+1})].$$

De même

$$v = \frac{1}{q-t}[\xi v_0 + xu_0 + (q - t^n) - v_0 q t (q^{n-1} - t^{n-1})].$$

J. LE BRAS.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2012. — *Le sommet* A *d'un angle* BAC *se meut sur une droite* D *et ses côtés* AB *et* AC *passent par deux points fixes* B *et* C. *On prend sur* AB *et* AC *les points* D *et* E *tels que* BD = CE = k. *Trouver l'enveloppe de la droite* DE.

Prenons la droite Δ pour axe des x, une droite perpendiculaire quelconque pour axe des y et désignons par (a, b) et (a', b') les coordonnées des points B et C.

Nous allons chercher l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite DE. Soit $ux + vy + w = 0$ l'équation de cette droite. Prenons un point A quelconque sur Ox, dont nous désignerons l'abscisse par λ, et calculons les coordonnées du point D où la droite AB rencontre DE.

L'équation de AB est $\frac{y}{x-\lambda} = \frac{b}{a-\lambda}$, celle de DE $ux + vy + w = 0$; en résolvant ces deux équations nous obtenons

$$x = \frac{\lambda(bv + w) - aw}{\lambda u - (au + bv)}, \qquad y = \frac{b(\lambda u + w)}{\lambda u - (au + bv)}.$$

Puis, nous écrirons que la distance de ce point au point B est égale à k : ceci nous donne

$$\left[\frac{\lambda(bv + w) - aw}{\lambda u - (au + bv)} - a\right]^2 + \left[\frac{b(\lambda u + w)}{\lambda u - (au + bv)} - b\right]^2 = k^2,$$

ou

$$(\lambda - a)^2(au + bv + w)^2 + b^2(au + bv + w)^2 = k^2(\lambda u - (au + bv))^2,$$

ou encore, en posant $au + bv + w = H$ et en ordonnant par rapport à λ,

$$(1) \qquad \lambda^2(H^2 - k^2u^2) + 2\lambda(k^2u(au + bv) - aH^2) + a^2 + b^2 H^2 - k^2(au + bv)^2 = 0.$$

De même, en écrivant que la droite AC rencontre la droite DE au point E tel que CE = k, nous trouvons

$$(2) \qquad \lambda^2 H^2 - k^2u^2) + 2\lambda(k^2u(au + bv) - aH^2) + a'^2 + b'^2 H^2 - k^2(au + bv)^2 = 0.$$

Nous aurons l'équation tangentielle de l'enveloppe en éliminant λ entre ces deux équations. Ce calcul, assez pénible et peu intéressant, nous montre que l'enveloppe est une courbe de huitième classe.

Remarque I. — Les points D et E décrivent deux cercles égaux, ayant pour centres les points B et C. Ils tracent sur ces deux cercles des séries qui sont en correspondance (2, 2). Comme ces ponctuelles sont du second ordre, les deux faisceaux de rayons PD, PE qui joignent le point P, fixe, pris n'importe où dans le plan, aux points mobiles D et E, sont en correspondance (4, 4). Par conséquent, les deux faisceaux superposés dont nous parlons ont huit rayons doubles et l'enveloppe de la droite DE est une courbe de huitième classe.

Remarque II. — Parmi les nombreuses méthodes analytiques qui permettent de trouver l'équation tangentielle, la suivante me paraît assez simple. Prenons la droite AB pour axe des x et la perpendicu-

laire au milieu pour axe des y ; les deux cercles mentionnés auront pour équations

$$(x-a)^2+y^2=R^2 \qquad \text{et} \qquad (x+a)^2+y^2=R^2;$$

la droite Δ sera représentée par

$$Ax+By+C=0,$$

et les deux rayons AB et AC, par

$$y=\lambda(x-a), \qquad y=\lambda'(x+a).$$

En écrivant que ces rayons se coupent sur Δ, nous aurons successivement

$$x=\frac{\lambda a+\lambda' a}{\lambda-\lambda'}, \qquad y=\frac{2a\lambda\lambda'}{\lambda-\lambda'}$$

et enfin

$$A(\lambda a+\lambda' a)+2Ba\lambda\lambda'+C(\lambda-\lambda')=0,$$

ou

$$(Aa+C)\frac{1}{\lambda'}+(Aa-C)\frac{1}{\lambda}+2Ba=0.$$

D'autre part, soit

$$ux+vy+w=0$$

l'équation de la droite DE ; en écrivant que le rayon $y=\lambda(x-a)$ coupe le premier cercle et cette droite au même point, nous aurons aisément

$$(\lambda^2+1)(au+w)^2-R^2(u+\lambda v)^2=0$$

ou

$$\left(\frac{1}{\lambda^2}+1\right)(au+w)^2-R^2\left(\frac{u}{\lambda}+v\right)^2=0.$$

Un calcul analogue nous donnerait de même

$$\left(\frac{1}{\lambda'^2}+1\right)(au-w)^2-R^2\left(\frac{u}{\lambda'}+v\right)^2=0.$$

De là, nous tirerons $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda'}$, et nous porterons dans la relation trouvée; nous aurons ainsi l'équation tangentielle, compliquée de radicaux.

Aucune de ces méthodes ne donne de renseignements intéressants.

2018. — *Soient* P *et* Q *deux points fixes sur une conique* C. *Par* P *et* Q, *on mène deux cordes parallèles variables* PP′ *et* QQ′, *rencontrant la conique aux points* P′ *et* Q′. *Trouver :* 1° *le lieu du point de rencontre de* PQ′ *et* P′Q ; 2° *l'enveloppe de la droite* P′Q′.

1. Prenons pour axe des x la droite PQ et pour axe des y le diamètre conjugué de cette corde par rapport à la conique. Si l'on désigne alors par a et $-a$ les abscisses des points P et Q, l'équation de la conique peut s'écrire

$$(1) \qquad f(x,y)=x^2+Cy^2+2Ey-a^2=0.$$

Soit m le coefficient angulaire variable des droites PP′ et QQ′ ; l'équation de l'ensemble de ces deux droites est

$$(2) \qquad \varphi(x,y)=(y-mx)^2-a^2m^2=0.$$

Le point M, commun aux droites PQ′ et P′Q, est l'un des pôles doubles relatifs aux coniques (1) et (2) ; les deux autres sont le point à l'infini dans la direction PP′, et le point de rencontre de P′Q′ et PQ. Celui-ci se déplace sur PQ.

Les coordonnées des pôles doubles sont déterminées par les équations

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x}=\frac{f'_y}{\varphi'_y}=\frac{f'_z}{\varphi'_z}$$

ou

$$\frac{x}{-m(y-mx)}=\frac{Cy+E}{y-mx}=\frac{Ey-a^2}{-a^2m^2}.$$

On aura donc le lieu du point M en éliminant m entre ces deux équations. On a immédiatement en considérant les deux premiers rapports

$$m = -\frac{x}{Cy + E},$$

et en portant cette valeur dans l'équation formée par le deuxième et le troisième rapport, on obtient, après suppression du facteur $(Cy + E)^2$,

$$y\,E(x^2 + Cy^2) + y(E^2 - a^2C) - a^2E = 0.$$

Au facteur y correspond l'axe des x qui est le lieu du point de rencontre de PQ et P'Q'; le lieu du point M est la conique

$$E(x^2 + Cy^2) + y(E^2 - a^2C) - a^2E = 0,$$

qui a mêmes directions asymptotiques que la conique donnée et qui passe par les points P et Q.

Cette courbe n'existe que si $E \neq 0$, c'est-à-dire si la conique n'a pas son centre à l'origine, milieu de PQ. Si en effet P et Q étaient diamétralement opposés, les droites PQ' et P'Q seraient parallèles.

2. L'équation de l'ensemble des droites PQ et P'Q' s'obtiendra en combinant linéairement les équations (1) et (2) de façon que y soit en facteur dans le premier membre. On voit immédiatement que cette équation est

$$m^2 f(x,y) - \varphi(x, y) = 0$$

ou

$$m^2[x^2 + Cy^2 + 2Ey - a^2] - (y - mx)^2 + a^2m^2 = 0$$

ou enfin

$$y[m^2(Cy + 2E) + 2mx - y] = 0.$$

Il en résulte que l'équation de la droite P'Q' est

$$m^2(Cy + 2E) + 2mx - y = 0,$$

et que l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$x^2 + y(Cy + 2E) = 0,$$

ou

$$(3) \qquad x^2 + Cy^2 + 2Ey = 0.$$

C'est une conique qui est bitangente à la conique donnée aux points de rencontre avec la droite de l'infini.

Les coniques (1) et (3) sont ou deux hyperboles ayant mêmes asymptotes, ou deux ellipses homothétiques et concentriques, ou deux paraboles ayant un contact de troisième ordre à l'infini.

A. DUPONT, école des Anglais, à Lyon.

Solution géométrique. — Les points P' et Q' tracent sur la conique donnée (C) des divisions homographiques, car à tout point P' correspond un seul point Q' et inversement. Les points doubles de ces divisions sont évidemment les points à l'infini de la conique. On en conclut que l'enveloppe de la droite P'Q' est une conique (C') bitangente à la conique (C) aux points à l'infini.

D'autre part, PQ' et QP' décrivent des faisceaux homographiques ayant pour sommets P et Q, donc le lieu du point M, commun à ces deux droites est une conique (C_1) passant par les points P et Q. Si le point P' est à l'infini, il en est de même du point Q'; les droites PQ' et QP' sont parallèles à une direction asymptotique de la conique (C). On en conclut que la conique (C_1) a mêmes directions asymptotiques que la conique (C).

André COURTOIS, à Sedan.

Bonnes solutions par MM. R. Boyer, à Nice; Dagnaux, à Dijon; François Margand, école des Anglais, à Lyon; G. Lach, à Douai; Jean Mogrel, élève à l'école normale supérieure; A. Boussiac, à Fournes-en-Weppes.

2025. — *Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à deux axes rectangulaires; on considère un point M x, y de cette courbe, dont on désigne l'ordonnée par* PM, *et on porte sur* PM *un vecteur* PM,

tel que $PM.PM' = a^2$, *a étant une constante. Quand le point* M *décrit la courbe* (C) *envisagée, le point* M′ *décrit une courbe* (C′).

1° *Déterminer la courbe* (C) *de façon que les tangentes aux courbes* (C) *et* (C′), *aux deux points* M *et* M′, *forment avec l'ordonnée* MM′ *un triangle* MM′T *d'aire constante,* k^2.

2° *Déterminer la courbe* (C) *de façon que ce triangle* MM′T *ait pour expression générale de son aire la fonction* $\dfrac{x^3\dfrac{dy}{dx}}{2(a^2+y^2)}$.

1. Nous supposerons que le triangle MTM′ soit positif lorsque le contour MTM′ est parcouru dans le sens direct. Alors l'aire est égale en grandeur et en signe au produit $\frac{1}{2}MM'.PT$, en appelant PT la distance-vecteur du point T à l'ordonnée MM′.

Or $PM = y$, $PM' = \dfrac{a^2}{y}$, $MM' = \dfrac{a^2}{y} - y$. D'autre part, l'équation de la tangente à la courbe (C) est $Y - y = y'(X - x)$; celle de la tangente à la courbe (C′) est

$$Y - \frac{a^2}{y} = -\frac{a^2y'}{y^2}(X - x).$$

En retranchant les deux équations l'une de l'autre, nous avons

$$\frac{a^2}{y} - y = (X - x)y\left(\frac{a^2}{y^2} + 1\right),$$

puis

$$PT = X - x = \frac{(a^2 - y^2)y}{y'(a^2 + y^2)}.$$

Nous avons donc à poser

$$\frac{(a^2 - y^2)^2}{y'(a^2 + y^2)} = 2k^2,$$

ou

$$\frac{dx}{k^2} = \frac{2(a^2 + y^2)dy}{(a^2 - y^2)^2} = \frac{dy}{(a - y)^2} + \frac{dy}{(a + y)^2};$$

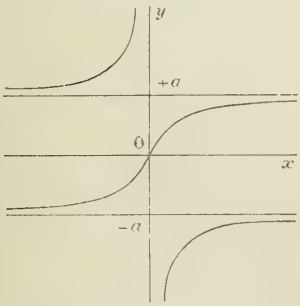
par suite,

$$\frac{x - x_0}{k^2} = \frac{1}{a - y} - \frac{1}{a + y} = \frac{2y}{a^2 - y^2}.$$

La courbe (C) est une cubique facile à construire. Nous porterons d'abord les axes au point $(x_0, 0)$, ce qui permet d'écrire l'équation ainsi :

$$\frac{x}{k^2} = \frac{2y}{a^2 - y^2}.$$

Nous voyons alors que les droites $y = \pm a$, $x = 0$ sont les trois asymptotes et les signes de x, quand y varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, sont évidents. La courbe a dès lors la forme ci-contre; elle admet l'origine comme centre.



Toutes les autres courbes (C) dérivent de celle-ci par des translations le long de Ox.

2. Si nous égalons l'aire du triangle à la quantité indiquée $\dfrac{x^3\dfrac{dy}{dx}}{2(a^2+y^2)}$, nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{(a^2 - y^2)^2}{2y'(a^2 + y^2)} = \frac{x^3y'}{2(a^2 + y^2)},$$

ou

$$x^3y'^2 = (a^2 - y^2)^2,$$

$$\frac{y'}{a^2 - y^2} = \pm x^{-\frac{3}{2}}.$$

Cette équation s'écrit

$$\frac{dy}{a-y} + \frac{dy}{a+y} = \pm 2ax^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Intégrée, elle devient

$$\text{LC}\,\frac{a+y}{a-y} = \pm 4ax^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{C}\,\frac{a+y}{a-y} = e^{\pm\frac{4a}{\sqrt{x}}}.$$

Ceci donne deux familles de courbes et on passe de l'une à l'autre en changeant y en $-y$. Ces deux familles sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox.

M. ROUX, à Chalon-sur-Saône.

Bonnes solutions : MM. J. Le Bras ; A. Cousan, Roumanie ; H. Probert, à Paris ; G. Esteben, 58e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; R. Chirol, à Moulins ; A. Courtois, 147e d'infanterie à Sedan ; N. Savary, 61e d'artillerie.

ÉCOLE CENTRALE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Algèbre et Trigonométrie (M. Gérard) (*Suite*).

6032. — Intégrer les équations suivantes :

$$y' = \sqrt{\frac{2x-y}{y}}, \qquad (1+x)y' - 2y = x, \qquad xy' - 3y = x^2 + 1,$$

$$(1-x^2)y' - xy = x^2, \qquad (1-x^2)y' + 2xy = 1 + x^2, \qquad y' + \frac{2y}{1-x^2} = x,$$

$$y' - \frac{2y}{1-x^2} = x^2, \qquad (1+x)y' + 2y = \frac{1}{x-1}, \qquad y' + \frac{4y}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2},$$

$$y\sqrt{1-x^2} + y\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - y = 0, \qquad y'\sqrt{1+x^2} + y\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - y = 0, \qquad xy' + 3y = e^x,$$

$$y\cos x + y\sin x = 1 - 2\sin^2 x, \qquad y\cos x - 3y\sin x = \operatorname{cotg} x, \qquad y'\sin x + 2y\cos x = 1 + \sin^2 x,$$

$$y'\sin x - y\cos x = 1 + \cos^2 x, \qquad y'\sin x - 3y\cos x = 1 + \cos^2 x, \qquad y'\cos x - 3y\sin x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$y'\sin x + 2y\cos x = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}, \qquad y'\cos x - 2y\sin x = \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}, \qquad y'\operatorname{tg} x - \frac{y}{\cos^2 x} = 1.$$

6033. — Trouver une fonction entière de x vérifiant l'équation $y'' - y = 0$.

6034. — Intégrer les équations

$$y'' - 3y' = 4x + e^{2x}, \qquad y'' - 3y = e^{x} + e^{2x}, \qquad 2y'\cos x + y\sin x = \cos x, \qquad y'' + y = \sin x,$$

$$y'' + 4y = \sin x\cos x, \qquad y'' + 4y = x + \cos^2 x, \qquad y'' - 2y' + 2y = x + \cos x, \qquad y'' - 3y' + 2y = x + e^{4x},$$

$$y'' + 2y' + y = 1 + e^{x}, \qquad y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}, \qquad y'' - 6y' + 9y = x + e^{3x}.$$

6035. — Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $y = (\text{arc}\sin x)^2$.

En déduire une équation différentielle entre y' et y'' et trouver une fonction entière de x qui vérifie cette équation. Même question pour $y = [\text{L}(x + \sqrt{1+x^2})]^2$.

6036. — Dérivées de la fonction $y = \cos(m \text{ arc}\cos x)$. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction y. Vérifier pour $m = 1, 2, 3$. Intégrer au moyen d'une fonction entière.

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski).

Géométrie analytique à deux dimensions.

6037. — Construire la longueur $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2-ab}}$.

6038. — Forme trigonométrique de l'équation d'une droite, θ étant l'angle des axes de coordonnées. — Application : soit $\theta = 60^\circ$, $3x - 5y - 2 = 0$ l'équation de la droite, trouver la distance de l'origine à la droite.

6039. — Tangente commune à deux cercles $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $(x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0$. — Discussion.

6040. — Construire les courbes :

$$y = \frac{x^3 - x^2 + x}{x^2 - 1}, \quad x = \frac{b}{y^2 - 1}, \quad y = 2x + \sqrt{1 - 2x - x^2}, \quad y = 3x + 2 + \sqrt{x^2 - 4x},$$

$$x^2 + y - 5 + \sqrt{y^2 - 6y + 5}, \quad y = 3x - 1 + \sqrt{x - 3}, \quad y = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad y = \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - 3x}}{x - 1},$$

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + 3}, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y + 2}, \quad y = \frac{\sin x}{x - 2}, \quad y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - 2 \sin x}.$$

6041. — Construire la courbe $x = \frac{t^2}{t^2 - 1}$, $y = \frac{t^2 + 1}{t(t - 1)}$.

6042. — Construire la courbe $x = \frac{\sin t}{1 + \operatorname{tg} t}$, $y = \frac{\cos t}{1 - \operatorname{tg} t}$; points doubles ; la courbe donnée est-elle unicursale ?

6043. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{\sin \omega}{1 - \operatorname{tg} \omega}, \quad \rho = \frac{\cos 2\omega}{1 + \operatorname{tg} \omega}, \quad \rho = \frac{1 - 2 \cos \omega}{1 + 3 \cos \omega}, \quad \rho = \frac{\sin \omega + 2 \cos \omega - 1}{\cos \omega}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} \omega}{1 + 3 \sin \omega}, \quad \rho = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \omega + \cos \omega}.$$

6044. — Asymptote de la courbe $x^3 - y^3 - xy - x - y = 0$.

6045. — Enveloppe de la droite $\lambda x + \mu y - b^2 = 0$, λ et μ étant deux paramètres liés par la relation $\lambda^2 + \mu^2 - a^2 = 0$.

6046. — Enveloppe de la droite $\lambda x + \mu y - 1 = 0$, sachant que $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{a}$.

6047. — Enveloppe des cercles de rayon R qui interceptent sur Ox et Oy des cordes AB et CD dont la somme des carrés est donnée.

6048. — Enveloppe des droites telles que la somme des carrés de leurs distances à deux points fixes F et F′ soit égale au carré d'une longueur donnée l.

6049. — Enveloppe de la droite qui joint les extrémités de deux diamètres conjugués dans une ellipse.

6050. — Mener à $x^2 - 2py = 0$ une normale de coefficient angulaire m.

6051. — Trouver sur une parabole $y^2 - 2px = 0$ un point x, y, tel qu'en ce point le coefficient angulaire de la normale soit m.

6052. — Mener du point $x = \alpha$, $y = \beta$ une normale à la courbe $x - 2y^2 - a^2 = 0$.

6053. — Rayon de courbure de l'ellipse en un de ses sommets.

6054. — Centre de courbure à l'origine de la courbe $y^2 - x^2 - 2x = 0$.

6055. — Centre de courbure en un point d'une parabole.

6056. — Enveloppe des normales à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; construire la courbe.

6057. — Développée de la courbe $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.

6058. — Développée de la parabole.

6059. — Développée de la courbe $xy - a^2 = 0$.

6060. — Construire la courbe $\rho = \frac{\sin^2 \omega}{\cos^3 \omega}$; former l'équation de la normale en un point. — Développée de cette courbe.

6061. — Interpréter l'inégalité $x^2 - y^2 + xy - 1 > 0$.

6062. — Résoudre le système $\frac{(x + y)(x - 1)}{y + 1} > 0$, $x^2 - y^2 - 2x = 0$.

6063. — Réduction de l'équation d'une conique : $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + xy - y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$, $(y - 2x)^2 + x + y = 0$, $(x - 3y)^2 - 5x + y - 1 = 0$.

6064. — Calculer l'aire de l'ellipse $x^2 + 3y^2 + xy - 1 = 0$.

6065. — Foyers de la conique $xy - a^2 = 0$ (axes rectangulaires).

6066. — Conditions pour qu'une droite $ax + by + c = 0$ soit axe d'une conique.

6067. — Equations des coniques qui passent par l'intersection de deux coniques données. — Existe-t-il dans ce faisceau de coniques des paraboles, des hyperboles équilatères, des cercles ?

6068. — Equation générale des coniques passant par quatre points donnés ; combien passe-t-il de paraboles par ces quatre points ? Construire la direction de l'axe, puis l'axe pour chacune de ces paraboles.

Géométrie analytique à trois dimensions.

6069. — Propriétés du plan $P + \lambda Q = 0$; démontrer que si λ varie toujours dans le même sens, le plan tourne toujours dans le même sens.

6070. — Equations de la bissectrice de l'angle de deux droites dans l'espace.

6071. — Mener par la droite $x - y - z = 0$, $y + 2x - 2z + 1 = 0$ un plan perpendiculaire au plan $4x + 5y - 2z = 0$.

6072. — Distance du point $(2, 3, -1)$ à la droite $x - 2z - 2 = 0$, $y + 3z + 1 = 0$.

6073. — Distance du point $(-1, 1, -2)$ à la droite $x + y - z + 1 = 0$, $2x - y + 3z - 1 = 0$.

6074. — Mener par la droite $3x + 2y - z - 1 = 0$, $x - y + z = 0$ un plan faisant l'angle θ avec la droite $x = y = z$. Discussion.

6075. — Mener par la droite $x - y + z = 0$, $3x + y - z = 0$ un plan faisant l'angle θ avec la droite

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

6076. — Perpendiculaire commune aux deux droites

$$(D)\quad x = y,\quad z = 0; \qquad (D')\quad x = z + 1,\quad y = 0.$$

6077. — Distance des deux droites

$$(D)\quad x = y = z; \qquad (D')\quad x = 2z + 1,\quad y = 3z - 1.$$

6078. — Angle des génératrices du cône $x^2 + y^2 - z^2 + yx = 0$ déterminées par le plan $y - mx = 0$; maximum de cet angle.

6079. — Sur la surface $x^2 + y^2 + 2z = 0$ on prend la génératrice rectiligne $z = 0$, $x = y$ et on fait tourner un plan autour de cette droite. Comment coupe-t-il la surface? Variation de l'angle de cette droite avec la première.

6080. — Centre de courbure en un point d'une courbe gauche. Trouver ce centre en le considérant comme pied sur le plan osculateur de l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins.

6081. — Rayon de courbure de l'hélice circulaire.

6082. — Centre et rayon de courbure au point $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ à la ligne définie par les équations $xy - 2z = 0$, $xz - 1 = 0$.

6083. — Normale principale à la courbe $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $z = c\varphi$.

6084. — Equations de la binormale à une courbe gauche. — Binormale à une courbe d'équations $xy - z = 0$, $xz - y^2 = 0$.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2108. — Déterminer et discuter les trajectoires orthogonales d'un système de *trisectrices de Maclaurin*

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$$

où a est le paramètre variable.

Dr Werner Gaedecke.

2109. — Soient M un point variable d'une ellipse fixe, C le centre de courbure de M, N le symétrique de M par rapport à C. Le lieu du point N est une sextique unicursale. Montrer que l'aire algébrique totale de cette courbe est égale à l'aire de l'ellipse.

E.-N. Barisien.

2110. — On considère un cercle (C) et une tangente fixe T à ce cercle. Soit P la projection sur T d'un point quelconque M de C. L'enveloppe du cercle de centre M et de rayon MP se compose de la droite T et d'une sextique unicursale fermée, à deux points de rebroussement. Montrer que :

1° L'aire de cette courbe est équivalente à cinq fois l'aire du cercle ;

2° La différence des arcs de la sextique compris entre les points de rebroussement est égale à deux fois le périmètre du cercle.

E.-N. Barisien.

2111. — Discuter la surface

$$(a^2z^2 - y^2)^2 = 4a^3x \qquad (a = \text{constante}).$$

Dr Werner Gaedecke.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Janvier 1913. N° 4.

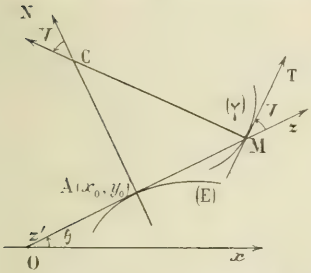
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LES TRAJECTOIRES SOUS UN ANGLE CONSTANT DE DROITES OU DE CERCLES

par M. **R. Dontot**, élève à l'École normale supérieure.

Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point A d'une droite $z'z$, α, β les paramètres directeurs de cette droite sur laquelle le segment $\overline{AM}$ a la valeur r. Nous supposerons α, β, r, x_0, y_0 fonctions d'un paramètre t.



Les coordonnées (x, y) du point M sont données par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha r, \\ y = y_0 + \beta r. \end{cases}$$

et, quel que soit t, nous avons

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$
$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0.$$

Soit θ l'angle de la droite $z'z$ avec Ox ;

$$d\theta = \alpha d\beta - \beta d\alpha.$$

Lorsque t varie, le point M décrit une courbe (γ) ; prenons sur elle un sens positif MT et cherchons la relation qui doit exister entre α, β, x_0, y_0, r pour que

$$(\widehat{Mz, MT}) = V.$$

Nous avons

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin V = \dfrac{\alpha dy - \beta dx}{ds}, \\ \cos V = \dfrac{\alpha dx + \beta dy}{ds}, \\ \operatorname{tg} V = \dfrac{\alpha dy - \beta dx}{\alpha dx + \beta dy}. \end{cases}$$

Nous choisirons pour point $A(x_0, y_0)$ le point de contact de la droite avec son enveloppe (E) ; de plus, nous prendrons le sens $z'z$ tel que

$$\alpha = \frac{dx_0}{ds_0}, \qquad \beta = \frac{dy_0}{ds_0}$$

(ds_0 représente l'élément d'arc de l'enveloppe).

En remplaçant, dans les formules (2), dy, dx, α, β par leurs valeurs, on obtient les formules connues

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin V = \dfrac{r d\theta}{ds}, \\ \cos V = \dfrac{ds_0 + dr}{ds}, \\ \operatorname{tg} V = \dfrac{r d\theta}{ds_0 + dr}. \end{cases}$$

L'équation différentielle

$$r d\theta - dr \operatorname{tg} V - ds_0 \operatorname{tg} V = 0$$

permet de calculer r en fonction de t. Elle est linéaire ; on en conclut :

Théorème I. — *L'équation des trajectoires sous l'angle* V *de droites s'obtient par deux, une ou* 0 *quadratures suivant que l'on connaît* 0, *une ou deux trajectoires particulières.*

Théorème II. — *Soient* M_1, M_2, M *les trois points d'une droite variable, qui décrivent trois trajectoires sous l'angle* V ; *le rapport* $\frac{M_1M}{M_1M_2}$ *demeure constant* **et indépendant de** V *quand la droite varie.*

Soit maintenant R le rayon de courbure en M de la trajectoire (γ) ; désignons $\widehat{Ox, MT}$ par α :

$$\alpha = V + \theta,$$

$$d\alpha = d\theta.$$

Par suite, $R = \frac{ds}{d\theta}$; la première des équations (3) devient

$$R = \frac{r}{\sin V}.$$

Théorème III. — *Les centres de courbure des trajectoires sous un angle constant des tangentes à une courbe* (E), *aux points situés sur une de ces tangentes sont sur la normale correspondante à la courbe* (E).

Théorème IV. — *Les développées des trajectoires sous l'angle* V *des tangentes à une courbe sont des trajectoires sous le même angle des normales à cette courbe.*

Enfin, en vertu du théorème II,

Théorème V. — *Les rayons de courbure* R_1, R_2, R_3 *des trajectoires* (γ_1), (γ_2), (γ_3) *sous le même angle des tangentes à une courbe en trois points d'une même tangente, vérifient la relation*

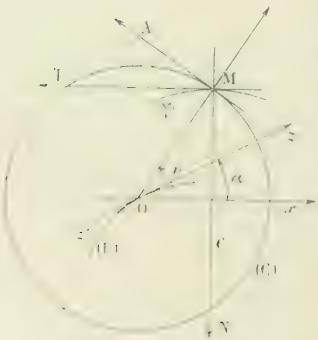
$$\frac{R_1 - R}{R_1 - R_2} = C^{te}.$$

Cette constante ne dépend pas de l'angle V.

Trajectoires sous l'angle V *d'une famille de cercles.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du centre O, ρ le rayon d'un cercle variable (C) ; soit $M(x, y)$ un point de ce cercle ; désignons par v l'angle $\widehat{Ox, OM}$; x_0, y_0, ρ, v seront des fonctions d'un même paramètre t. Le point $O(x_0, y_0)$ décrit alors une courbe (E), dont la tangente $z'z$ au point O fait avec Ox un angle α :

$$\widehat{Ox, z'z} = \alpha.$$



Le sens positif sur la courbe (E) sera le sens des arcs croissants. Le point M décrit une trajectoire sous l'angle V, (γ), du cercle, quand la tangente MT à la courbe lieu de M (sens positif, sens des arcs croissants) fait avec la tangente MA au cercle (sens des v croissants) l'angle V :

$$\widehat{MA, MT} = V.$$

Soit ds l'arc de trajectoire (γ) :

$$\sin V = \frac{-\sin v\, dy - \cos v\, dx}{ds},$$

$$\cos V = \frac{-\sin v\, dx + \cos v\, dy}{ds}.$$

Or, les coordonnées du point M sont

$$x = x_0 + \rho \cos v,$$
$$y = y_0 + \rho \sin v;$$

par suite, en tenant compte de ce que $dy_0 = ds_0 \sin \alpha$, $dx_0 = ds_0 \cos \alpha$,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin V &= \frac{-ds_0 \cos(v-\alpha) - d\rho}{ds}, \\ \cos V &= \frac{-ds_0 \sin(v-\alpha) - \rho dv}{ds}, \\ \operatorname{tg} V &= \frac{-ds_0 \cos(v-\alpha) - d\rho}{-ds_0 \sin(v-\alpha) + \rho dv}. \end{aligned} \right.$$

L'équation différentielle

$$\rho dv \sin V - d\rho \cos V - ds_0 \cos(V + v - \alpha) = 0$$

permet de calculer v en fonction de t. Posons en effet $V + v - \alpha = \omega$; il vient

$$dv = d\alpha + d\omega.$$

et, par suite, l'équation s'écrit

$$d\omega . \rho \sin V - ds_0 \cos \omega - d\rho \cos V + \rho d\alpha \sin V = 0.$$

Posons enfin $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = t$.

$$dt . 2\rho \sin V + (\rho d\alpha \sin V - d\rho \cos V - ds_0) t^2 + (\rho d\alpha \sin V - d\rho \cos V - ds_0) = 0.$$

C'est une équation de Riccatti ; elle a été donnée déjà par M. J. Haag, pour les trajectoires orthogonales (*Revue*, page 69, décembre 1908) sous une forme un peu différente ; l'auteur de la note en question en déduisait, pour les trajectoires orthogonales, différentes propriétés qui appartiennent aussi aux trajectoires sous un angle constant, à savoir :

Théorème. — *Soient quatre trajectoires quelconques* (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4) *et soient* M_1, M_2, M_3, M_4 *les points où elles coupent un même cercle ; le rapport anharmonique* $(M_1M_2M_3M_4)$ *reste constant, quand le cercle varie, et indépendant de l'angle* V.

Théorème. — *Si l'on connaît une ou deux trajectoires particulières, les autres se déterminent par deux ou une quadrature.*

Par exemple :

Théorème. — *Les trajectoires sous l'angle* V *de cercles orthogonaux à un cercle fixe s'obtiennent par une seule quadrature.*

Soit R le rayon de courbure de (γ) en M et C le centre de courbure ; désignons par β l'angle $\widehat{Ox,MT}$:

$$\widehat{Ox,MT} = \widehat{Ox,OM} + \widehat{OM,MA} + \widehat{MA,MT},$$
$$\beta = v + \frac{\pi}{2} + V.$$
$$d\beta = dv.$$

Donc
$$R = \frac{ds}{dv}.$$

Proposons-nous de chercher la relation qui existe entre R, v et les quantités constantes quand le point M demeure sur le cercle (C) ; autrement dit, éliminons ds et dv entre les deux premières équations (4) et

$$R = \frac{ds}{dv}.$$

Nous avons, en éliminant $dv = \frac{ds}{R}$,

$$\sin V\, ds = -ds_0 \cos(v - \alpha) - d\rho,$$

$$\left(\cos V - \frac{\rho}{R}\right) ds = -ds_0 \sin(v - \alpha),$$

ou enfin, en éliminant ds,

$$-ds_0 \sin V \sin(v - \alpha) + \left(\cos V - \frac{\rho}{R}\right) ds_0 \cos(v - \alpha) + d\rho = 0,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$ds_0\, R \cos(V + v - \alpha) - \rho \cos(v - \alpha) + d\rho\, R \cos V - \rho) = 0.$$

Remarquons que les parenthèses changées de signe représentent les projections de OC, la première sur $z'z$, la seconde sur OH : donc

$$\frac{\text{pr.}_{z'z}\, OC}{\text{pr.}_{OH}\, OC} = -\frac{d\rho}{ds_0}. \tag{5}$$

1° Supposons $V = \frac{\pi}{2}$, $\text{pr.}_{OH}\, OC = \rho$. On trouve dans ce cas, le théorème suivant indiqué par M. A. D dans la solution de la question 1927 (*Revue*, page 314, octobre 1911) :

Théorème. — *Les centres de courbure des trajectoires orthogonales de tous les points du cercle dans une de ses positions sont sur une droite Δ perpendiculaire à la tangente au lieu du centre ; l'abscisse de cette perpendiculaire par rapport au centre, mesurée sur la tangente, le sens positif étant celui du mouvement, est* $-\rho \frac{d\rho}{ds_0}$.

Cette droite Δ passe par les points de contact du cercle et de son enveloppe.

2° Supposons $d\rho = 0$; $\rho = C^{te}$. Le théorème dans ce cas est modifié comme suit :

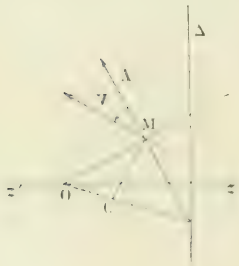
Théorème. — *Les centres de courbure des trajectoires sous un angle constant de cercles de rayons constants, en tous les points du cercle dans une de ses positions sont sur la normale correspondante au lieu du centre.*

3° Revenons au cas général.

L'égalité (5) exprime la propriété suivante :

Théorème. — *Les centres de courbure des trajectoires sous un angle constant V, en un point M, quand varie l'angle V, sont sur une droite fixe.*

Cette droite joint le centre du cercle passant par M au point où la tangente en M à ce dernier rencontre la droite Δ.



Il est désormais très simple de construire en un point M le centre de courbure, situé à l'intersection de cette droite et de la normale en M.

Proposons nous enfin de chercher le lieu décrit par le centre de courbure C quand le point M demeure sur le cercle (C). Nous prendrons deux axes de coordonnées rectangulaires passant par O, dont l'un Ox est confondu avec $z'z$; nous poserons $\omega = v - \alpha$.

Soient x, y les coordonnées de C

$$\begin{cases} x = \rho \cos\omega - R\cos(V + \omega), \\ y = \rho \sin\omega - R\sin(V + \omega) ; \end{cases}$$

en vertu de l'égalité (5), nous avons de plus

$$\frac{x}{\rho - R\cos V} = -\frac{d\rho}{ds_0}.$$

Posons $$-\frac{d\rho}{ds_0} = \frac{1}{k}; \qquad R = \frac{\rho - kx}{\cos V}.$$

Les équations (6) s'écrivent

$$x = \cos\omega(\rho - R\cos V) + \sin\omega . R\sin V,$$
$$y = -\cos\omega . R\sin V + \sin\omega(\rho - R\cos V);$$

ajoutons-les membre à membre, après avoir élevé chacune d'elles au carré ; il vient

$$x^2 + y^2 = (\rho - R\cos V)^2 + R^2\sin^2 V.$$

Remplaçons R par sa valeur, en fonction de x,

$$x^2 + y^2 = k^2x^2 + (\rho - kx)^2\operatorname{tg}^2 V.$$

Le lieu cherché est une conique ayant pour axe $z'z$; la polaire du point O est la droite Δ ; les points d'intersection de cette droite et du cercle (C) appartiennent à la conique ; elle y coupe donc orthogonalement le cercle.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les centres de courbure des trajectoires sous l'angle* V *de cercles variables, en tous les points* M *de l'un quelconque d'entre eux* (C) *sont sur une conique qui coupe orthogonalement le cercle* (C) *aux points où il touche son enveloppe.*

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2027. — *Déterminer les coordonnées d'un point quelconque* M *du cercle qui passe par les trois points* $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, *en fonction du rapport anharmonique des quatre points.* $d = (MA_0A_1A_2)$.

Soient (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de trois points A, B, C du plan, par rapport à deux axes rectangulaires. Considérons le point M dont les coordonnées sont données par les formules

$$(1) \qquad x = \frac{(1-m)\alpha x_0 + m\beta x_1 - m(1-m)\gamma x_2}{(1-m)\alpha + m\beta - m(1-m)\gamma}$$

et $$(2) \qquad y = \frac{(1-m)\alpha y_0 + m\beta y_1 - m(1-m)\gamma y_2}{(1-m)\alpha + m\beta - m(1-m)\gamma};$$

lorsqu'on fait varier m de $-\infty$ à $+\infty$, ce point décrit un lieu, qui est une courbe unicursale. Cette courbe passe par A, B et C, quels que soient les paramètres α, β et γ, car on trouve : pour $m = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$; pour $m = 1$, $x = x_1$, $y = y_1$; pour $m = \infty$, $x = x_2$, $y = y_2$.

Cette courbe est d'ailleurs une conique ; l'élimination de m entre les équations (1) et (2) peut se faire comme il suit :

Les équations (1) et (2) s'écrivent

$$(3) \qquad (1-m)\alpha(x - x_0) + m\beta(x - x_1) - m(1-m)\gamma(x - x_2) = 0$$

et $$(4) \qquad (1-m)\alpha(y - y_0) + m\beta(y - y_1) - m(1-m)\gamma(y - y_2) = 0.$$

En posant $\dfrac{1}{m} = \dfrac{-u}{w}$ et $\dfrac{1}{1-m} = \dfrac{-v}{w}$, elles deviennent

$$\alpha(x - x_0)u + \beta(x - x_1)v + \gamma(x - x_2)w = 0,$$
$$\alpha(y - y_0)u + \beta(y - y_1)v + \gamma(y - y_2)w = 0;$$

d'autre part, on a identiquement

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0.$$

En remplaçant dans cette équation u, v et w par des quantités proportionnelles tirées des deux précédentes, on met le résultat de l'élimination sous la forme

$$\frac{\gamma}{(x-x_1)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_0)}+\frac{\beta}{(x-x_2)(y-y_2)-(x-x_2)(y-y_0)}$$
$$+\frac{\gamma}{(x-x_1)(y-y_0)-(x-x_0)(y-y_1)},$$

ce qui peut s'écrire encore

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}}+\frac{\beta}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_0 & y & 1 \end{vmatrix}}+\frac{\gamma}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}=0.$$

Soient

$$P=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},\qquad Q=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},\qquad R=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix};$$

$P=0$, $Q=0$, $R=0$ sont les équations des droites BC, CA, AB; l'équation

$$\frac{\alpha}{P}+\frac{\beta}{Q}+\frac{\gamma}{R}=0$$

est celle d'une conique passant par les points A, B et C. On peut disposer des paramètres α, β et γ de façon que cette conique soit quelconque.

Lorsque M parcourt cette conique, le rapport anharmonique $\mu=(\mathrm{CABM})=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}:\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}}$, regardé comme ayant un signe [1], varie de $-\infty$ à $+\infty$, en prenant une fois et une seule toute valeur algébrique. En particulier, il est égal

à 0 si M est en A, (x_0, y_0),
à $+1$ si M est en B, (x_1, y_1),
à $+\infty$ si M est en C, (x_2, y_2).

D'autre part, à tout point de la courbe correspond une valeur du paramètre m et une seule : il y a donc une relation homographique entre m et μ. Or ces deux paramètres sont égaux trois fois, en A, en B et en C. La relation est donc

$$m=\mu.$$

Ainsi, le paramètre m n'est autre que le rapport anharmonique (CABM); les formules (1) et (2) donnent les coordonnées d'un point d'une conique en fonction du rapport anharmonique défini sur la courbe par le point mobile et par trois points fixes.

Il reste à déterminer les valeurs qu'il faut donner à α, β et γ pour que la conique soit un cercle. On peut, pour cela, développer l'équation (5) et écrire que c'est l'équation d'un cercle, ou bien écrire que la courbe passe par le point de coordonnées homogènes $x=1$, $y=i$, $z=0$. Mais il est plus rapide de se servir de la forme connue de l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Appelons p, q, r les distances d'un point du plan aux trois côtés, la distance à un côté étant positive pour les points du plan qui sont relativement à ce côté dans la région où est le sommet opposé (de façon que les points intérieurs au triangle ABC soient ceux pour lesquels les trois distances sont positives); alors l'équation

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}=0$$

représente le cercle circonscrit au triangle, si α, β et γ sont proportionnels aux longueurs des côtés, ou aux sinus des angles.

---

[1] M. Ch. Michel, dans la note de la *Revue*, n° de mars 1906, a montré les conventions qu'il faut faire pour attribuer à $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}:\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}}$ un signe qui soit celui du rapport anharmonique.

On a posé $$P = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1);$$

on aura donc $$p = \varepsilon \frac{P}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = \frac{P}{a},$$

ε étant égal à ± 1. Pour choisir ε, il faut remarquer que la distance du point $C(x_2, y_2)$ au côté $AB(P = 0)$ doit être positive ; donc

$$\frac{\varepsilon}{a} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

On voit alors que $\varepsilon = +1$ si le déterminant $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ a le signe $+$. On aura de même

$$q = \varepsilon' \frac{Q}{b}, \qquad r = \varepsilon'' \frac{R}{c},$$

et les trois ε, ε', ε'' sont égaux, car les déterminants obtenus en permutant *circulairement* les indices 0, 1, 2 sont égaux.

L'équation de la conique peut donc s'écrire

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{a}\right)}{p} + \frac{\left(\frac{\beta}{b}\right)}{q} + \frac{\left(\frac{\gamma}{c}\right)}{r} = 0;$$

pour que ce soit l'équation du cercle circonscrit, il faut que α, β et γ soient proportionnels à a^2, b^2 et c^2.

Les expressions demandées sont donc

$$x = \frac{(1-m)a^2 x_0 + mb^2 x_1 - m(1-m)c^2 x_2}{(1-m)a^2 + mb^2 - m(1-m)c^2},$$

$$y = \frac{(1-m)a^2 y_0 + mb^2 y_1 - m(1-m)c^2 y_2}{(1-m)a^2 + mb^2 - m(1-m)c^2},$$

où

$$a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

$$b^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2,$$

$$c^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2.$$

A. D.

Autre solution de M. L. Montaut, élève de l'École Centrale.

MÉCANIQUE

2022. — *Un point matériel de masse* 1 *décrit la spirale logarithmique* $r = a^\theta$ *sous l'influence d'une force centrale* F. *Trouver l'expression de cette force* F, *ainsi que la loi de la vitesse ; réciproquement, trouver l'équation générale des trajectoires décrites par le point matériel sous l'influence de la force* F *précédemment obtenue, ainsi que la loi du mouvement sur cette trajectoire ; choisir ensuite les constantes pour que la trajectoire soit la spirale donnée, et les interpréter géométriquement.*

1. La force F étant une force centrale, la formule de Binet

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)''\right]$$

nous donnera l'expression de cette force. Or, puisque $r = a^\theta$ est l'équation de la trajectoire, on a

$$\frac{1}{r} = a^{-\theta}, \qquad \left(\frac{1}{r}\right)' = -a^{-\theta}\mathrm{L}a \qquad \left(\frac{1}{r}\right)'' = a^{-\theta}(\mathrm{L}a)^2 = \frac{1}{r}(\mathrm{L}a)^2.$$

On a donc, m étant égale à 1,

$$(1) \qquad \mathrm{F} = -\frac{\mathrm{C}^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r}(\mathrm{L}a)^2\right] = -\frac{\mathrm{C}^2}{r^3}\left[1 + (\mathrm{L}a)^2\right].$$

La force est attractive et *en raison inverse du cube de la distance.*

L'expression de la vitesse en fonction de r et de θ est, dans le cas des forces centrales (2e formule de Binet),

$$v^2 = \mathrm{C}^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)'^2\right],$$

et ici

$$(2) \qquad v^2 = \frac{\mathrm{C}^2}{r^2}\left[1 + (\mathrm{L}a)^2\right];$$

la vitesse sur la trajectoire varie en *raison inverse de la distance.*

2. *Réciproquement*, cherchons la trajectoire, le point matériel de masse 1 étant soumis à la force centrale F précédemment obtenue :

$$\mathrm{F} = -\frac{\mathrm{C}^2}{r^3}\left[1 + (\mathrm{L}a)^2\right].$$

La formule de Binet, où $m = 1$, donne l'équation différentielle de la trajectoire :

$$-\frac{\mathrm{C}^2}{r^2}\left[\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right)''\right] = -\frac{\mathrm{C}^2}{r^3}\left[1 + (\mathrm{L}a)^2\right],$$

ou, en simplifiant,

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{r}\right)'' - \left(\frac{1}{r}\right)(\mathrm{L}a)^2 = 0,$$

équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants. L'équation caractéristique ayant pour racines $\pm \mathrm{L}a$, l'intégrale générale est

$$\frac{1}{r} = \mathrm{A}e^{\theta\mathrm{L}a} + \mathrm{B}e^{-\theta\mathrm{L}a},$$

ou encore

$$(4) \qquad \frac{1}{r} = \mathrm{A}a^\theta + \mathrm{B}a^{-\theta},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

En nous plaçant dans le cas général $\mathrm{AB} \neq 0$, étudions le mouvement sur la trajectoire. Le principe des aires nous donne

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C}, \qquad \text{d'où} \qquad dt = \frac{1}{\mathrm{C}}r^2 d\theta.$$

Or, en différentiant l'équation (4), on a

$$-\frac{dr}{r^2} = (\mathrm{A}a^\theta - \mathrm{B}a^{-\theta})\mathrm{L}a\, d\theta$$

Exprimons le second membre en fonction de $\frac{1}{r}$: de l'équation (4) nous tirons l'expression de a^θ, par suite celle de $a^{-\theta}$ en fonction de $\frac{1}{r}$, et nous avons

$$\mathrm{A}a^\theta - \mathrm{B}a^{-\theta} = \sqrt{\frac{1}{r^2} - 4\mathrm{AB}},$$

d'où

$$d\theta = -\frac{1}{r^2\mathrm{L}a}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r^2} - 4\mathrm{AB}}}.$$

On aura enfin

$$dt = -\frac{1}{CL\alpha}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{1-4ABr^2}}.$$

En intégrant, nous obtiendrons l'expression simple de t, en fonction de r,

$$(5)\qquad t - t_0 = \frac{1}{4ABCL\alpha}\sqrt{1-4ABr^2},$$

qui définit le mouvement sur la trajectoire.

3. Proposons-nous maintenant de déterminer les constantes pour que la trajectoire soit la spirale donnée. L'expression de la vitesse, dans le cas des forces centrales, en fonction de r et de θ, étant, comme nous l'avons rappelé,

$$v^2 = C^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)'^2\right],$$

on a ici

$$v^2 = C^2[(A\alpha^\theta + B\alpha^{-\theta})^2 + (A\alpha^\theta - B\alpha^{-\theta})^2(L\alpha)^2],$$

ou, comme on l'a vu tout à l'heure,

$$v^2 = C^2\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 - 4AB\right](L\alpha)^2\right\},$$

ou enfin

$$(6)\qquad v^2 = C^2\left\{[1+(L\alpha)^2]\,\frac{1}{r^2} - 4AB(L\alpha)^2\right\}.$$

Si l'on veut que la loi de la vitesse soit celle précédemment établie sur la trajectoire proposée, $v^2 = \frac{C^2}{r^3}[1+(L\alpha)^2]$, on voit que l'on doit avoir $AB = 0$.

La trajectoire sera donc l'une ou l'autre des spirales

$$(7)\qquad \frac{1}{r} = A\alpha^\theta \qquad\qquad (8)\qquad \frac{1}{r} = B\alpha^{-\theta}.$$

Ces deux spirales sont inverses l'une de l'autre par rapport à l'origine, ou encore, l'une d'elles est symétrique par rapport à l'axe polaire d'une homothétique de l'autre, le centre de l'homothétie étant à l'origine.

Il suffit donc de considérer l'une d'elles,

$$(8)\qquad \frac{1}{r} = B\alpha^{-\theta} \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{1}{B}\alpha^{\theta}.$$

Il est bon de remarquer que ces dernières spirales, où la constante B varie, se déduisent de l'une d'elles par une rotation autour du pôle. Supposons en effet $B > 0$ (B négatif reviendrait à prendre la spirale symétrique par rapport au pôle), et posons $B = \alpha^{\theta_0}$, ce qui est toujours possible. L'équation de la spirale devient

$$r = \alpha^{\theta-\theta_0},$$

et l'on voit que par la rotation de l'axe polaire d'un angle θ_0, la spirale précédente devient la spirale donnée $r = \alpha^\theta$.

On voit, en résumé, que, dans le cas où $AB = 0$, toutes les trajectoires peuvent se déduire soit par symétrie, soit par rotation, de l'une quelconque d'entre elles, par exemple de la trajectoire proposée.

A. MACÉ de LÉPINAY.

Assez bonnes solutions : MM. A. Borgé, lycée de Nancy ; A. Courtois, à Sedan.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1912

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

8868. — On considère l'équation $AB = C$, A, B, C étant les fonctions linéaires. Que représente cette équation ? C'est une conique tangente aux droites $A = 0$ et $B = 0$ aux points a et b où elles sont rencontrées par la droite $C = 0$. Les droites variables $A = \lambda C$, $B = \mu C$ rencontrent la conique aux points m et m'. Enveloppe de mm' lorsque $\lambda + \mu = a$.

8869. — Exprimer que la droite $ux + vy + w = 0$ passe par le centre de la conique

$$x = \frac{1 + t^2}{t^2 + 2t + 3}, \qquad y = \frac{t + 2}{t^2 + 2t + 3}.$$

En déduire les coordonnées du centre.

8870. — Dans un plan une droite Δ a tourné d'un angle α autour d'un point O. Enveloppe de la droite qui joint deux points homologues. On trouve que l'enveloppe est une parabole. Déterminer ses éléments.

8871. — On donne une ellipse et un point P. Par ce point on mène les tangentes PA et PB; le cercle PAB rencontre l'ellipse en deux autres points A' et B'. Montrer que le pôle de A'B' par rapport à l'ellipse est situé sur le cercle.

8872. — Construire la courbe $x = a\cos x + y = 0$. La tangente en un point M rencontre la courbe en un autre point N. Lieu du milieu de MN.

8873. — Soient F le foyer d'une parabole, M un point de la courbe et C le centre de courbure au point M. Lieu de la projection du point C sur MF.

8874. — On considère les ellipses passant par deux points A et B et telles que AB soit un des diamètres conjugués égaux. Équation générale. Lieu des sommets.

8875. — Normales issues d'un point P à une parabole. Si le point P est sur la développée on peut mener seulement deux normales. Trouver l'enveloppe de la droite joignant les pieds.

8876. — Trouver l'équation du cercle osculateur au sommet de la parabole $x^2 + y^2 = 2(x - a)\cos\theta + y\sin\theta)^2$.

8877. — Trouver l'enveloppe de la droite qui joint les points homologues de deux divisions homographiques portées sur Ox et Oy, et définies par trois couples de points homologues.

8878. — Étant donnés une ellipse et un point, former l'équation des tangentes issues de ce point à l'ellipse, puis l'équation des bissectrices de ces tangentes.

8879. — Lieu des milieux des cordes d'une parabole qui passent par un point fixe.

8880. — Le cercle osculateur en un point M d'une ellipse rencontre l'ellipse en un autre point N. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

8881. — On donne une ellipse, et on demande l'équation générale des paraboles ayant un contact du deuxième ordre avec l'ellipse en un des sommets de cette ellipse.

8882. — On donne une parabole de foyer F. Par ce point on mène deux sécantes, faisant un angle constant, et rencontrant la courbe en M et M'. Lieu du point de rencontre des tangentes en M et M'.

8883. — Par deux points fixes A et B situés dans le plan d'une ellipse on mène des parallèles aux rayons vecteurs FM et F'M d'un point de l'ellipse; lieu du point de rencontre.

8884. — Former l'équation de la conique passant par les points communs à distance finie des droites $P = a$, $P = b$, $P = c$, $Q = a$, $Q = b$, $Q = c$, non situés sur la droite $P = Q$. P et Q sont des fonctions linéaires.

8885. — Soient F un foyer d'une ellipse, M un point de la courbe; calculer la projection sur FM du rayon de courbure en M.

8886. — Deux paraboles ont leurs axes parallèles et se coupent à angle droit en leurs deux points d'intersection. La distance des axes étant constante et égale à a, trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux courbes.

8887. — Développée de la parabole. Inversement, si une cubique a un point de rebroussement, est symétrique par rapport à la tangente en ce point, et n'admet d'autres branches infinies que des branches paraboliques dans la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie, cette courbe est une développée de parabole.

8888. — Construire géométriquement les points de rencontre d'une ellipse et d'un cercle ayant son centre sur le grand axe, dans le cas où les quatre points de rencontre sont réels. Se servir du théorème de Desargues.

8889. — Déterminer les points de contact des tangentes issues du point (x_0, y_0) à la conique définie par les équations paramétriques $x = \dfrac{\alpha t^2 + bt + c}{\alpha' t^2 + \beta t + \ldots}$, $y = \dfrac{\ldots t^2 + \ldots t + c}{\ldots t + \beta t + \ldots}$.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

8890. — On considère deux systèmes d'axes rectangulaires ayant même origine. Chercher les points qui ont mêmes coordonnées dans les deux systèmes.

8891. — On donne un cercle et une droite dans l'espace. Déterminer une droite rencontrant à angle droit le cercle et la droite. Solution géométrique.

8892. — On considère les trois plans $ax + by + cz = Kx$, $bx + by + dz = Ky$, $cx + dy + cz = Kz$. Déterminer K de façon que ces trois plans aient une droite commune. Il y a trois solutions. Montrer que les droites correspondantes forment un trièdre trirectangle.

8893. — On fait tourner le point $M(x_0, y_0, z_0)$, d'un angle α autour de la droite $x = y = z$ (axes rectangulaires). Trouver les coordonnées du point après la rotation.

8894. — Le plan des xy étant horizontal, trouver les courbes de pente constante situées sur la surface $z^2 - 2ay = 0$.

8895. — Mener par le point (x_0, y_0, z_0) une droite rencontrant en deux points la courbe $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{t-1}$, $z = \frac{1}{t+1}$. Discuter.

8896. — Toute courbe dont le plan osculateur passe par un point fixe est une courbe plane.

8897. — On donne deux droites D et D', un point A sur D et un point A' sur D'. Une droite variable Δ rencontre D et D' en des points M et M', tels que $MM' = AM + A'M'$. Lieu de la droite Δ.

8898. — On considère la surface $z = xy + \frac{x^3 + y^3}{3}$. Y a-t-il des droites sur cette surface ? Section de la surface par le plan $z = h$. Construire la section en coordonnées polaires. Etudier les trajectoires orthogonales de ces sections quand h varie.

8899. — Trouver les coordonnées du sommet de la parabole section du cylindre $y^2 - 2px = 0$ par le plan $ax + by + cz = 0$.

8900. — Calculer le volume engendré par une cycloïde tournant autour de sa base.

8901. — Trouver le centre de courbure de l'hélice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = Kt$. Lieu de ce point.

8902 — Définitions et propriétés de l'hélice conique.

8903. — Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites.

8904. — A tout point (x, y, z) de la surface $z = \varphi(x, y)$ on fait correspondre le point (x', y', z') par les formules $x' = x$, $y' = y$, $z' = F(x, y, z)$. Déterminer la fonction $F(x, y, z)$ pour que les normales en deux points homologues se rencontrent.

8905. — On considère les équations $x = R\cos\theta\cos\varphi\sin u - \sin\varphi\cos u)$, $y = R(\cos\theta\sin\varphi\sin u + \cos\varphi\cos u)$, $z = R\sin\theta\sin u$. On suppose que u est une variable indépendante et que R, θ, φ sont des fonctions données d'une autre variable v. Que représentent ces équations ?

8906. — On considère la surface $z = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^3 + y^3}{3}$. Y a-t-il des droites sur cette surface ? Trouver les lignes de plus grande pente.

8907. — On donne la courbe $x = \frac{1}{2}a^2t^2$, $y = \frac{2}{3}abt^3$, $z = \frac{1}{2}b^2t^2$. Montrer que la tangente fait un angle constant avec une droite fixe. Plan osculateur.

8908. — Un plan coupe les arêtes Ox, Oy, Oz d'un trièdre en trois points A, B, C. Trouver l'enveloppe du plan quand le volume du tétraèdre OABC est constant.

8909. — Trouver les lignes de plus grande pente d'un cylindre oblique dont la base est un cercle horizontal.

8910. — Trouver les génératrices de la surface $xyz + x + y + z = 0$.

8911. — Lieu des perpendiculaires communes à la droite $x = y = z$ et aux génératrices de la surface $xy = az$.

8912. — On donne un cercle et une droite D rencontrant le cercle et perpendiculaire à son plan. Trouver la surface engendrée par une droite rencontrant le cercle et la droite D en faisant avec eux des angles égaux.

8913. — Calculer l'aire latérale d'un cône à base circulaire.

8914. — On considère le tore engendré par le cercle $(x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0$, $y = 0$ tournant autour de Oz. On le coupe par le plan $z = mx$, et on fait tourner la courbe obtenue autour de la droite $y = 0$, $z = mx$. Trouver l'équation de la surface obtenue et son intersection avec le tore.

8915. — Déterminer les contours apparents de la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer les droites $x = 0$, $y = 0$ et $x = a$, $y = z$, et le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

8916. — Etudier la surface $x = \frac{uv}{(u + v - 1)^2}$, $y = \frac{(u - 1)(v - 1)}{(u + v - 1)^2}$, $z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{(u + v - 1)^2}$. Former l'équation en x, y, z.

8917. — On donne un cercle et une droite perpendiculaire au plan du cercle et rencontrant le cercle en un point. Etudier la surface réglée engendrée par une droite rencontrant le cercle en A, la droite donnée en B, la longueur AB étant égale au diamètre du cercle.

8918. — On considère la courbe $x = 2(t^3 + 3t^2 - 3t)$, $y = 2(t^3 - 3t^2 - 3t)$, $z = t^3 + 3t$. Rectifier cette courbe. Montrer que les normales principales sont perpendiculaires à Oz.

8919. — On considère un cercle dans l'espace défini par son centre, son rayon et la normale à son plan menée par le centre. Equation de ce cercle avec le minimum de paramètres. Exprimer les coordonnées d'un point du cercle en fonction d'une seule variable

8920. — On considère la courbe $x = t^3 - 2t^2 - 1$, $y = t^3 + 2t^2 + 1$, $z = 2t^3 - t$. Plan osculateur. Points doubles de la projection sur le plan des xy.

8921. — Etudier les normales issues d'un point a la courbe $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$. Cas où le point est sur la courbe.

8922. — Etudier la surface $z = \frac{a^2x}{x^2 + y^2}$. Calculer le volume compris entre cette surface et les plans $z = a$, $z = b$. Que devient ce volume pour b infini ? Trouver les lignes de pente de cette surface. Représenter cette surface en géométrie descriptive et construire une ligne de pente.

8923. — Etudier la surface engendrée par une droite de longueur constante, assujettie à rencontrer deux droites fixes rectangulaires, non situées dans un même plan.

8924. — Mener par le point A (x_0, y_0, z_0) des plans osculateurs à la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Le point A peut-il être centre de gravité du triangle des trois points de contact ?

8925. — On considère la courbe $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$. Condition pour que quatre points soient dans un même plan. Par les deux points $t = 1$ et $t = -1$ on mène un plan qui rencontre la courbe en M et M'. Trouver la surface engendrée par la droite MM'.

8926. — Sur la surface $v = \frac{\cos y}{\cos x}$ on définit deux familles de courbes par les relations $\frac{dy}{\cos x} = \pm \frac{dx}{\cos y}$. Montrer que ces familles de courbes sont orthogonales.

8927. — Déterminer les droites de la surface $x^2(a - z)^2 + y^2(a + z)^2 = (a^2 - z^2)^2$.

8928. — On considère les deux courbes $x = a(2u^2 + 1)$, $y = au$, $z = 0$ et $x = a(2v^2 + 1)$, $y = 0$, $z = av$. Existe-t-il des courbes dont les tangentes rencontrent ces deux courbes ?

8929. — Condition pour que le plan $ux + vy + wz + 1 = 0$ soit tangent à la surface $\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} = 1$.

8930. — Etudier la courbe gauche définie par les équations $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{z}{a} = \mathrm{L}\frac{y}{a}$. Cosinus directeurs de la tangente. Rectifier la courbe à partir du point $(0, a, 0)$.

8931. — Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur les deux droites $y = mx$, $z = a$ et $y = -mx$, $z = -a$, et parallèle au plan $ux + vy + wz = 0$.

8932. — Etudier la courbe $x = t(t - 1)$, $y = \frac{t - 1}{t}$, $z = \frac{t}{t - 1}$. Projections de cette courbe sur les plans de coordonnées. Y a-t-il des quadriques contenant cette courbe ? La courbe a-t-elle des symétries ?

8933. — On donne la surface $z(x^2 + y^2) - a^2x = 0$. On mène la normale en un point M. Quel lieu doit décrire le point M pour que cette normale rencontre la surface en deux autres points confondus ? Equation du cône s'appuyant sur la courbe lieu et ayant pour sommet l'origine.

8934. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour axe Oz, $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; trouver sur cette surface les courbes vérifiant la relation $Kdz = xdy - ydx$. Etudier la projection de ces courbes sur le plan des xy, en passant en coordonnées polaires.

8935. — Que représentent les équations $x^2 + mz = a\cos\alpha$, $y^2\sin^2\alpha = a(a - x\sin 2\alpha)$? On fait tourner cette courbe autour de Oz. Calculer la surface engendrée.

8936. — Trouver sur le cylindre $y^2 - 2px = 0$ les courbes dont la tangente fait un angle constant avec le plan des zy. Etudier leurs projections sur le plan des zy.

8937. — On donne un cercle, une droite D perpendiculaire à son plan et rencontrant ce cercle. Etudier la surface engendrée par une droite variable rencontrant le cercle et la droite D et faisant avec celle-ci un angle constant. Etudier les sections de la surface par des plans parallèles au plan du cercle.

8938. — On fait tourner la chaînette $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ autour de Ox. Calculer l'aire comprise entre deux parallèles.

8939. — On considère le cylindre $z^2 = 2ay$, le plan horizontal étant le plan des xy. Trouver les courbes de cette surface qui ont une pente constante.

8940. — Etant donnée la surface $(x^2 + y^2)z - a^2x = 0$, trouver les normales qui sont tangentes à la surface en un point différent du pied.

8941. — Etant donnés les deux cylindres $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$, trouver le plan osculateur en un point de l'intersection.

8942. — On considère la surface définie par les équations $x = \cos u - v\sin u$, $y = \sin u + v\cos u$, $z = e^{v\sqrt{2}}$. Construire géométriquement un point de la surface. Trouver sur cette surface les courbes telles que le plan osculateur en chaque point soit tangent à la surface.

8943. — On considère la surface $z = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{a}$. Etudier l'indicatrice et les rayons de courbure principaux. Mêmes questions pour les surfaces $z = x\sin\frac{y}{a}$, $z = \frac{xy}{a}$. Comparer les résultats.

8944. — On coupe la surface $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ par une droite. Déterminer le centre des moyennes distances des points de rencontre. Montrer que ce point ne peut être sur l'un des axes sans être à l'origine.

8945. — Trouver la perspective de la courbe $y = a$, $f(x, z) = 0$ sur le plan $z = a$ $(a > 0)$, le centre de projection ayant pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = a$.

8946. — On donne un cercle, une perpendiculaire au plan du cercle passant par le centre et une parallèle à ce plan.

Former l'équation de la surface engendrée par une droite rencontrant le cercle et les droites données. Section de la surface par des plans parallèles au plan du cercle.

8947. — Etudier la courbe $x = 2(t^3 + 3t^2 - 3t)$, $y = 2(t^3 - 3t^2 - 3t)$, $z = t^3 + 3t$. Calculer l'arc, les cosinus directeurs de la tangente. Déterminer la normale principale.

8948. — On considère la courbe $z = x^2$, $y^2 = 2xz$. Longueur d'un arc de courbe ; plan osculateur.

8949. — On considère la surface $z(x^2 + y^2) - 2axy = 0$. Déterminer les droites situées sur cette surface. Calculer le volume limité par cette surface et compris entre le plan des xy et le plan $x + y - a = 0$.

8950. — On donne un cône de révolution limité à son sommet et à une section droite. On coupe ce cône par un plan parallèle à une génératrice. Déterminer ce plan de façon que l'aire du segment parabolique déterminé soit maximum.

8951. — Trouver les lignes de plus grande pente d'un cône oblique à base circulaire horizontale.

8952. — Centre de courbure de l'hélice circulaire. Lieu des axes des hélices osculatrices à une hélice donnée en un point donné.

8953. — Etudier la courbe $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t$, $z = a(t - \sin t \cos t)$. Rayon de courbure.

8954. — Etant donné un cylindre ayant pour section droite une chaînette, chercher les courbes de ce cylindre qui font un angle constant avec les génératrices.

8955. — On considère le mouvement défini par les équations $\frac{dx}{dt} = t$, $\frac{dy}{dt} = t^2$, $\frac{dz}{dt} = t^3$. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire. Vérifier le résultat par des considérations de cinématique.

8956. — On fait tourner la parabole $y^2 - 2px = 0$ autour de Ox ; calculer l'aire de la surface engendrée, comprise entre deux parallèles.

8957. — Etudier les quadriques définies par les équations :

$$x^2 + xz - y^2 + 1 = 0, \qquad x^2 - 2xz - y^2 - 2yz - 2x - 1 = 0 \quad \text{(génératrices)},$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{(directions principales et sections circulaires)}, \qquad yz + zx + xy = 1,$$

$$yz + zx + xy + x + y + z = 0, \qquad x^2 - 2yz + 2z = 0, \qquad x^2 + y^2 + 3yz + 2x - z + 1 = 0 \quad \text{(sections circulaires)},$$

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2yz + 2x - y + 1 = 0 \quad \text{(directions principales)}, \qquad x^2 + 2y^2 - 2yz = 0 \quad \text{(sections circulaires)},$$

$$x^2 + xz - y^2 + 1 = 0 \quad \text{(génératrices)}, \qquad (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 - 2x - 4y - 2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz + 2x + 4y = 0, \qquad yz + zx + xy + x + y + z = 0, \qquad x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$2(x - y)^2 + (y - z)^2 + 3(x - z)^2 + 2x - y + z = 0, \qquad x^2 - 2yz + a^2 = 0$$

8958. — Etant donnée une quadrique $f(x, y, z) = 0$ rapportée à trois axes quelconques, trouver l'équation du cône asymptote.

8959. — Etudier la quadrique $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2z = 0$. Former l'équation du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à Oz.

8960. — Déterminer un paraboloïde hyperbolique connaissant : 1° une génératrice ; 2° un plan tangent et le point de contact ; 3° la direction de l'axe. Le paraboloïde est-il déterminé ? Former son équation.

8961. — Former l'équation générale des quadriques passant par l'axe des z. On considère l'une de ces surfaces, et l'on demande le lieu des normales à cette surface en tous les points de Oz.

8962. — On considère une droite Δ passant par les deux points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$. Former l'équation de la droite conjuguée de Δ par rapport à la quadrique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

8963. — Par deux cercles donnés dans l'espace peut-on faire passer un cône du second degré ? Construire les cônes passant par deux cercles qui se coupent en deux points A et B.

8964. — Que peut-on dire des plans asymptotes d'une quadrique ?

8965. — Conditions pour que deux ellipses situées dans deux plans perpendiculaires soient les projections orthogonales d'un même cercle.

8966. — On donne trois axes rectangulaires, un point A sur Ox, un point B sur Oy et un point C sur Oz. Former l'équation générale des quadriques passant par les droites OA, AC, CB, BO. Paraboloïdes du faisceau.

8967. — Quelle est la nature de la surface $x = a\frac{u + v}{1 - uv}$, $y = b\frac{u - v}{1 - uv}$, $z = c\frac{1 + uv}{1 - uv}$? Plans cycliques de cette surface.

8968. — On donne une sphère et une quadrique concentriques. On mène une tangente commune, et on considère les plans tangents aux points de contact. Démontrer que ces deux plans sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués d'une quadrique fixe, quelle que soit la tangente commune.

8969. — Etudier la surface $x = a\frac{(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2}$, $y = b\frac{uv}{u^2 - v^2}$, $z = \frac{c}{u^2 - v^2}$. Elle est du deuxième degré : quelle est sa nature ?

8970. — On considère le paraboloïde $\frac{2z}{p} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $(a > b)$. Déterminer les ombilics et trouver le rayon de la sphère tangente au paraboloïde aux ombilics.

8971. — Donner une représentation paramétrique de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

8972. — Montrer que l'équation $2(x-y)^2-(y-z)^2+(z-x)^2+x=0$ représente un paraboloïde. Trouver le sommet de ce paraboloïde.

8973. — Trouver les génératrices de la quadrique $yz+zx+xy+1=0$. En déduire les coordonnées d'un point de la surface en fonction rationnelle de deux paramètres.

8974. — Déterminer l'angle au sommet d'un cône de révolution pour qu'il soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit.

8975. — Déterminer les axes de l'ellipse section de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par le plan $ax+by+cz=0$.

8976. — Étudier la quadrique $xy-z^2=0$. Calculer l'angle des génératrices qui passent au point $(x=y=z)$. Lieu des points de la surface pour lesquels cet angle est constant.

8977. — On coupe la surface $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par la droite $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Déterminer l'indicatrice de la surface et l'un des points obtenus.

8978. — On donne dans le plan des xy un cercle passant par l'origine, et une droite Δ rencontrant le cercle. Existe-t-il une quadrique passant par le cercle, l'axe des z et la droite Δ ? Équation de cette quadrique. Faire une épure en prenant le plan des xy comme plan horizontal. Déterminer l'intersection de la surface et d'un plan.

8979. — Lieu des centres des quadriques passant par trois droites dont l'une rencontre les deux autres. A priori ce lieu est-il une ligne ou une surface ? Cas particulier où les trois droites sont l'axe des x, l'axe des y et la droite $x=a$, $y=0$.

8980. — On considère la famille de quadriques homofocales $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0$. Étudier celles de ces quadriques qui passent par un point, qui sont tangentes à une droite ou à un plan.

8981. — Étudier la quadrique $x^2+4yz=a^2$. Lieu des projections de l'origine sur les génératrices.

8982. — Étant donnés deux cercles d'une quadrique (non situés dans des plans parallèles), montrer que ces deux cercles sont sur une même sphère. Lieu des centres de ces sphères.

8983. — Déterminer la section centrale de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}-1=0$ admettant un axe dirigé suivant la droite $x=y=z$. Trouver les coordonnées des foyers réels de la section.

8984. — Trouver sur un paraboloïde hyperbolique équilatère une courbe telle que la tangente en un point M et l'une des génératrices passant au point M soient symétriques par rapport à l'autre génératrice du point M.

8985. — Représentation paramétrique de l'ellipsoïde. Étant données les formules $x=\frac{4u^2+9v^2-4}{4u^2+9v^2+4}$, $y=\frac{-2u}{4u^2+9v^2+4}$, $z=\frac{-2v}{4u^2+9v^2+4}$, montrer qu'elles représentent un ellipsoïde.

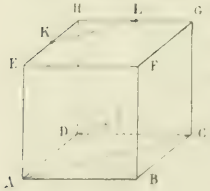
8986. — Peut-on faire passer des cônes par l'intersection de la sphère $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0$ et de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$?

8987. — On donne un paraboloïde et un point A. Par le point A on mène une sécante rencontrant la surface aux points M et M'. Déterminer la sécante de façon que les normales au paraboloïde en M et M' soient dans un même plan.

8988. — Quelles sont les quadriques dont toutes les sections planes se projettent sur un plan fixe suivant des cercles ?

V. — Géométrie descriptive.

8989. — Étant donné un cube ABCDEFGH, on considère le plan défini par la droite AC et les points K et L, milieux des arêtes HE et HG. Construire la projection du cube sur ce plan.



8990. — Construire la symétrique d'une droite donnée par rapport au deuxième bissecteur.

8991. — Perpendiculaire commune à une droite et à la ligne de terre.

8992. — On donne deux droites perpendiculaires $(oa, o'a')$ et $(ob, o'b')$, la première étant horizontale. Construire un trièdre trirectangle dont ces droites sont deux arêtes. Placer sur ce trièdre un triangle de grandeur donnée.

8993. — Angle de deux plans dont les traces sont en ligne droite.

8994. — On donne un plan défini par ses traces et dans ce plan une courbe déterminée par son rabattement sur le plan horizontal. Par un point du plan vertical mener des tangentes à la projection verticale du cercle.

8995. — On donne un plan défini par ses traces et un cercle situé dans ce plan, déterminé par son centre et son rayon. Construire les points de ce cercle dont le rapport des distances au plan horizontal et au plan vertical soit égal à un nombre donné.

8996. — Plans tangents communs à deux cônes.

8997. — Mener à un cylindre ayant pour base un cercle horizontal un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal.

8998. — Trouver l'ombre propre et portée (au flambeau) d'un cône ayant une base horizontale circulaire et son sommet en un point de la ligne de terre.

8999. — Plans tangents parallèles à deux cônes donnés.

9000. — Perspective d'un cercle horizontal sur le plan vertical, le point de vue étant dans le plan horizontal. Cette perspective peut-elle être un cercle ?

9001. — On donne un cercle situé dans un plan de profil et tangent aux deux plans de projection. Déterminer un point de vue de façon que la perspective du cercle sur le plan vertical soit un cercle. Lieu de ce point.

9002. — On donne un cône à base circulaire horizontale et un plan. Trouver le centre de la section.

9003. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est dans le plan vertical, et un cône dont le sommet est sur l'axe du cylindre, dont la base est une hyperbole équilatère située dans le plan horizontal et dont une asymptote est parallèle à la ligne de terre. Étudier l'intersection du cône et du cylindre.

9004. — Une ellipse dont le grand axe est parallèle à la ligne de terre est la base d'un cylindre dont les génératrices sont verticales. Un cône a pour base dans le plan horizontal un cercle tangent à l'ellipse en un des sommets du grand axe, et pour sommet un point situé sur la verticale du point de contact. Intersection des deux surfaces.

9005. — On donne dans le plan horizontal deux cercles de rayons 1 et 2. Ce sont les bases de deux cônes, le sommet de chaque cône se projetant au centre de la base de l'autre. Intersection de ces deux cônes.

9006. — Intersection de deux cônes ayant pour base commune un cercle horizontal et dont les sommets se projettent horizontalement sur ce cercle.

9007. — Mener à une sphère des plans tangents faisant des angles donnés avec les plans de projection.

9008. — Point brillant d'une sphère.

9009. — Construire une sphère passant par deux points et tangente à deux plans. Cas où les deux plans sont les plans de projection.

9010. — Construire une sphère passant par trois points et tangente à un plan.

9011. — Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.

9012. — On donne une sphère et une droite. Construire une sphère tangente au plan horizontal et à la sphère donnée et dont le centre est situé sur la droite.

9013. — Condition pour que l'ombre portée par une sphère (ombre au flambeau) sur le plan horizontal soit une hyperbole équilatère.

9014. — Construire une sphère de rayon donné tangente aux plans de projection et à un plan donné par ses traces.

9015. — Construire la sphère passant par les quatre points $a(0)$, $b(0)$, $c(5)$, $d(5)$, définis par leurs projections horizontales et leurs côtés.

9016. — Inscrire une sphère dans un tétraèdre dont une base est horizontale.

9017. — Plans tangents communs à trois sphères.

9018. — On donne en géométrie cotée un point $a(0)$ et une droite $b(0)$ $c(10)$. Construire une droite qui soit à des distances données du point a et de la droite bc.

9019. — On donne un carré dans le plan de cote zéro et une circonférence inscrite dans ce carré. C'est le contour apparent horizontal d'une sphère tangente au plan horizontal. Elle est éclairée par un point lumineux se projetant en l'un des sommets du carré et ayant pour cote le diamètre de la sphère. Trouver l'ombre portée de la sphère sur le plan horizontal.

9020. — Construire un tétraèdre connaissant la base dans le plan horizontal, deux dièdres adjacents et le rayon de la sphère inscrite.

9021. — Point double de la méridienne d'une surface de révolution.

9022. — Section plane d'un paraboloïde de révolution à axe vertical. La parabole méridienne est définie par son sommet et son foyer.

9023. — Mener par une droite un plan tangent à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

9024. — On donne une parabole dans le plan horizontal ayant son axe parallèle à la ligne de terre. On fait tourner cette courbe autour de son axe ; elle engendre un paraboloïde de révolution. On coupe ce paraboloïde par un plan défini par ses traces. Déterminer l'intersection.

9025. — On donne un axe vertical. C'est l'axe d'une surface de révolution engendrée par une conique qu'on définit en donnant les traces de son plan, et son rabattement sur le plan horizontal de projection. Ombre propre (au flambeau), le point lumineux étant quelconque.

9026. — On donne un axe de front (D, D') et une conique située dans le plan de bout D' et définie par son rabattement sur le plan horizontal. Trouver le contour apparent de la surface engendrée par la conique tournant autour de l'axe.

9027. — Ombre portée sur le plan horizontal par un tore à axe vertical, éclairé par un point lumineux.

9028. — Section plane d'un cône de révolution à axe quelconque.

9029. — On donne deux droites A, B et un plan P. Faire tourner la droite B autour de A de façon qu'elle devienne parallèle au plan P.

9030. — On considère une sphère tangente au plan horizontal et un cône circonscrit ayant pour centre un point du plan horizontal. Construire la section du cône par le plan tangent à la sphère, parallèle au plan horizontal.

9031. — Construire un cône de révolution connaissant trois génératrices.

9032. — On définit un cône de révolution par son axe, son sommet et son demi-angle au sommet. Construire la trace horizontale de ce cône. Déterminer les foyers de cette conique et les asymptotes.

9033. — Normales communes à deux cônes de révolution dont l'un a son axe vertical et l'autre son axe de bout.

9034. — Construire un trièdre SABC connaissant la face SBC, le dièdre C et l'angle de l'arête SC et du plan SAB.

9035. — Mener par un point une droite faisant un angle donné avec le plan horizontal et située à une distance donnée d'une droite donnée.

9036. — Construire un cône de révolution connaissant son sommet, son axe et sachant qu'il est tangent à un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal.

9037. — On donne en géométrie cotée un cône de révolution défini par son axe, son sommet et son angle au sommet. On donne la projection horizontale d'un point du cône, trouver sa cote.

9038. — On donne trois droites par leurs projections graduées, l'une d'elles étant horizontale. Par un point mener un plan faisant avec ces trois droites des angles égaux.

9039. — On donne un cône de révolution défini par son axe, son sommet et une sphère inscrite. Etant donnée la projection horizontale d'un point du cône, trouver la projection verticale et le plan tangent.

9040. — Par un point mener un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.

9041. — Construire un cône de révolution tangent à trois droites données, sachant que l'axe est vertical et connaissant le demi-angle au sommet.

9042. — On donne un cône de révolution ayant son axe parallèle à la ligne de terre. On le coupe par un plan défini par le point où il rencontre l'axe et par une horizontale. Déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point.

9043. — Une droite quelconque tourne autour de la ligne de terre. Mener à la surface engendrée un plan tangent parallèle à un plan donné.

9044. — Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical des plans tangents par la ligne de terre.

9045. — Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle à une droite, le point de contact étant sur un méridien donné.

9046. — Mener par une droite un plan coupant une surface gauche de révolution à axe vertical suivant une hyperbole équilatère.

9047. — Trouver sur une surface gauche de révolution à axe vertical une génératrice faisant un angle donné avec la ligne de terre, ou avec une droite de profil.

9048. — Construire le plan polaire d'un point par rapport à une surface gauche de révolution à axe vertical. Pôle d'un plan. Droite conjuguée de la ligne de terre.

9049. — Trouver les contours apparents de la surface engendrée par la ligne de terre tournant autour d'un axe quelconque.

9050. — Etant données quatre droites en géométrie cotée qui rencontrent une même horizontale, trouver s'il existe d'autres droites rencontrant les quatre droites données.

9051. — On considère la surface définie par l'équation $yz = x$, l'axe des x étant la ligne de terre, et le plan $z = 0$ le plan horizontal. Intersection de la surface et d'un plan de bout.

9052. — On considère un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal et admettant deux génératrices dont l'une est verticale. Intersection de la surface et d'une droite. On se donne la projection horizontale d'un point de la surface; trouver la projection verticale et le plan tangent.

9053. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices quelconques.

1° Déterminer un point de la ligne d'ombre, les rayons lumineux étant à 45° ;
2° Mener par une droite un plan coupant la surface suivant une hyperbole équilatère ;
3° Sommet ;
4° Plan polaire d'un point ;
5° Pôle d'un plan.

9054. — Trouver le sommet d'un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices de profil.

9055. — On considère un paraboloïde hyperbolique à plan directeur de front. Lieu des points où se croisent deux génératrices rectangulaires.

9056. — Mener à un paraboloïde hyperbolique un plan tangent parallèle à un plan donné.

9057. — Montrer que l'ombre portée (au flambeau) par un paraboloïde hyperbolique sur un plan directeur quelconque est une parabole.

9058. — Trouver le sommet d'un paraboloïde équilatère défini par deux génératrices de front et un plan directeur horizontal.

9059. — On donne une parabole dans le plan horizontal, une droite D et un point A. Existe-t-il un paraboloïde passant par la parabole, la droite et le point ? Dans le cas où il existe, déterminer les plans directeurs et des génératrices de chaque système.

9060. — Déterminer le sommet d'un paraboloïde hyperbolique défini par quatre arêtes consécutives d'un tétraèdre régulier. Le paraboloïde est-il quelconque ? Inversement, tout paraboloïde équilatère peut-il être défini de cette manière ?

9061. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal, et un point lumineux (s, s'). Trouver l'ombre portée de la surface sur le plan horizontal. Branches infinies.

9062. — Mener au même paraboloïde un plan tangent par une verticale.

9063. — On donne un paraboloïde défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Construire le lieu des points par où passent deux génératrices rectangulaires. Tangente en un point du lieu.

9064. — Intersection d'un cône qui a pour base un cercle horizontal et d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du cône.

9065. — Mener à un ellipsoïde de révolution à axe vertical des plans tangents par une droite.

9066. — Un cercle de front tourne autour d'un axe vertical qui se projette verticalement suivant la ligne de rappel du centre du cercle. Intersection de la surface engendrée et du cylindre qui a le cercle pour section droite.

9067. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'une sphère dont le centre est dans le plan de front de l'axe du tore.

9068. — Un paraboloïde équilatère a pour plans directeurs les plans de projection; il est défini en outre par son sommet (S, S') et un point (a, a'). Construire un point (b, b') quelconque de la surface et le plan tangent en ce point. Construire un cylindre de révolution tangent au paraboloïde au point (b, b') et touchant un plan donné par ses traces $P'xQ$.

9069. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical et d'une sphère.

9070. — Intersection de deux cônes de révolution circonscrits à une même sphère.

9071. — Ombres de l'écuelle. Rayons à 45°.

9072. — Une ellipse située dans un plan de front tourne autour de son grand axe supposé vertical. En l'un des sommets de cet axe on construit le cercle de courbure, que l'on prend comme directrice d'un cylindre de bout. Intersection des deux surfaces. Etude analytique.

9073. — Ombres propre et portée d'un paraboloïde de révolution à axe vertical.

9074. — On donne deux droites qui se coupent A et B. Trouver sur une troisième droite C un point M tel que le rapport de ses distances aux droites A et B soit égal à un nombre donné.

9075. — Intersection de deux hyperboloïdes de révolution qui ont leurs axes verticaux et une génératrice de front commune.

9076. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cylindre qui a pour section droite l'un des cercles de la méridienne principale.

9077. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'une sphère bitangente. Plans des courbes d'intersection.

9078. — On coupe une surface gauche de révolution à axe vertical par un plan de profil, et on prend la section comme directrice d'un cylindre à génératrices horizontales. Déterminer l'intersection. Etude analytique.

9079. — On donne une parabole et le cercle de courbure au sommet. La parabole tourne autour de son axe, le cercle autour de la directrice. Intersection. Étude analytique.

9080. — Une surface gauche de révolution est définie par un axe vertical et une génératrice de front (A, A') dont la trace horizontale est (a, a'). On considère un cône dont la base est un cercle du plan horizontal tangent en (a, a') à la trace horizontale de la surface et dont le sommet est sur la génératrice (A, A'). Intersection des deux surfaces.

9881. — On coupe une surface gauche à axe vertical par un plan de bout, et on éclaire la surface par un point lumineux. Trouver l'ombre à l'intérieur.

9082. — On éclaire un cône de révolution à axe vertical par des rayons lumineux dont les projections font 45° avec la ligne de terre. Déterminer le point brillant pour un observateur placé à l'infini dans la direction de l'axe.

9083. — On donne dans le plan vertical de projection deux cercles égaux tangents extérieurement, les centres o' et ω' étant sur une même horizontale. Le cercle o' tourne autour d'un axe vertical passant par ω' et le cercle ω' autour d'un axe vertical passant par le symétrique de o' par rapport à ω'. Intersection des deux tores ainsi engendrés. Etude analytique.

9084. — Représentation topographique d'un ellipsoïde dont le point le plus haut est un ombilic.

9085. — Trouver le contour apparent horizontal d'un paraboloïde de révolution dont l'axe est de front. Déterminer analytiquement le foyer de ce contour apparent.

9086. — On considère une surface gauche de révolution définie par son axe vertical et une génératrice de front. Sur celle-ci on prend un point S, qui est le sommet d'un cône dont la base est un cercle situé dans le plan du cercle de gorge et tangent à ce cercle. Intersection des deux surfaces.

9087. — On donne un paraboloïde défini par deux génératrices de front et un plan directeur horizontal. Déterminer un point m du paraboloïde et le plan tangent. Construire un cylindre de révolution tangent au paraboloïde au point m et ayant son axe horizontal.

9088. — On considère un cône de révolution à axe vertical limité à son sommet et à un plan perpendiculaire à l'axe. Le sommet est dans le plan horizontal et la base au-dessus. Sur cette base on place un cercle de rayon plus grand. On demande les ombres propres et portées du système, les rayons lumineux étant de front.

9089 — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec le cylindre qui a pour directrice le cercle osculateur à la parabole méridienne en son sommet, dont les génératrices sont horizontales et font un angle de 45° avec le plan vertical de projection.

9090. — On donne un cercle horizontal et deux droites D et D_1 rencontrant le cercle. Montrer qu'il existe une quadrique passant par le cercle et les deux droites. Trouver le centre de cette quadrique. Section plane Etude analytique.

9091. — On donne une surface gauche de révolution définie par un axe vertical et une génératrice de front, et on demande l'intersection de cette surface avec le paraboloïde hyperbolique qui passe par l'axe et la génératrice et qui a un plan directeur horizontal. Etude analytique.

9092. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cylindre ayant pour base une conique horizontale et passant par une génératrice de front de la surface.

9093. — On donne deux ellipses bitangentes dans le plan vertical. L'ellipse extérieure tourne autour de son grand axe, et l'autre autour de son petit axe. Déterminer la projection verticale de l'intersection.

9094. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution tangent dont l'axe est dans le plan de front du centre de la sphère.

9095. — On donne un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal et deux génératrices D et Δ dont

la seconde est verticale. Intersection de cette surface et d'un cône passant par la droite D et ayant pour base un cercle horizontal.

9096. — On considère un ellipsoïde quelconque dont deux plans principaux sont parallèles aux plans de projection. Construire un point de la surface et le plan tangent en ce point.

9097. — Représentation topographique d'un paraboloïde dont le point le plus haut est un ombilic.

9098. — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un tore engendré par le cercle de gorge tournant autour d'une de ses tangentes de bout. Trouver l'équation de la projection horizontale de l'intersection.

9099. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre, rencontre l'axe du tore et passe par les centres des cercles qui constituent la méridienne principale. Le rayon du cylindre est en outre égal au rayon de ces cercles.

9100. — On donne une circonférence dans le plan horizontal. C'est la base d'un cône dont le sommet se projette horizontalement sur la circonférence et a pour cote 6. Une sphère a pour diamètre la hauteur du cône. Intersection du cône et de la sphère.

9101. — On donne une hyperbole dans un plan de front. On fait tourner cette courbe autour de son axe imaginaire, et l'axe réel de l'hyperbole autour d'une asymptote ; intersection des surfaces engendrées.

9102. — Intersection de deux cônes de révolution dont les axes se rencontrent. L'un des axes est vertical, l'autre parallèle à la ligne de terre ; les demi-angles au sommet sont égaux à $\frac{\pi}{4}$.

9103. — Intersection d'un tore et d'une sphère bitangente ayant son centre dans le plan équatorial du tore.

9104. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cylindre ayant pour section droite une parabole tangente à l'un des cercles méridiens en un point de l'équateur et bitangente à l'autre cercle.

9105. — On donne une sphère ; un cône de révolution a son sommet au point le plus à gauche de la sphère, son angle au sommet est égal à $\frac{\pi}{4}$, son axe est de front et l'une des génératrices est parallèle à la ligne de terre. Intersection des deux surfaces.

VI. — Cinématique.

9106. — On donne un cercle et un point A sur ce cercle. Un point M se déplace sur ce cercle de telle façon que le vecteur vitesse MV se projette sur la droite MA suivant le vecteur MA. Étudier le mouvement du point M.

9107. — Un point M se déplace sur la surface $x^2(y^2+z^2)+y^2(x^2+z^2)-(x^2+z^2)^2=0$ de façon que son accélération soit constamment tangente à la surface. Déterminer le mouvement. On suppose que le point au temps $t=0$ est à l'intersection de la surface et de la droite $z=0$, $x=y$.

9108. — Dans un mouvement circulaire on a la relation $\gamma = a\sqrt{v}$, γ désignant la grandeur de l'accélération totale, v celle de la vitesse et a une constante. Trouver l'enveloppe de la droite qui porte l'accélération.

9109. — Étudier et discuter le mouvement dont l'hodographe est une spirale logarithmique, le diagramme des espaces étant $s = e^t$.

9110. — Calculer la vitesse et l'accélération du point P de la développante d'un cercle, le point correspondant M du cercle ayant une vitesse angulaire constante.

9111. — Un segment de droite AB se déplace dans un plan, de façon que le point A décrive une droite d'un mouvement uniforme de vitesse v, et que le mouvement du point B soit aussi uniforme avec la même vitesse. Trajectoire du point B.

9112. — Étudier le mouvement d'un point tel que le rapport de ses vitesses aréolaires par rapport à deux points fixes soit constant. Solution géométrique.

9113. — Un point mobile parcourt la parabole $y^2-2px=0$ de façon que la projection de l'accélération sur l'axe des y soit proportionnelle à la composante de la vitesse suivant l'axe des x. Équations du mouvement. Hodographe. Au temps $t=0$, le mobile est à l'origine et possède une vitesse initiale v_0.

9114. — Un point se meut sur la courbe $\rho = a(1+\cos\omega)$ suivant la loi des aires autour du pôle. Étudier le mouvement et déterminer l'hodographe.

9115. — Étudier le mouvement d'un point qui décrit un cercle de manière que l'hodographe du mouvement par rapport à l'origine soit la parabole $y^2-2px=0$.

9116. — Étudier le mouvement d'un point (x, y, z) sachant que les projections de la vitesse sur les axes sont respectivement $V_x = k(y^2+z^2-x^2)$, $V_y = 2kxy$, $V_z = -2kxz$.

9117. — Un point parcourt la courbe $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ de façon que la vitesse aréolaire soit constante. Étudier le mouvement du point. Déterminer l'accélération totale.

9118. — Une figure plane tourne autour d'un de ses points O, de manière que la projection de la vitesse d'un point M sur Ox soit constante. Quel est l'hodographe d'un point quelconque de la figure ?

9119. — Trouver la trajectoire d'un mobile qui possède une accélération constante parallèle à la droite $y=mx$, et qui au temps $t=0$ est placé à l'origine et admet une vitesse initiale parallèle à la droite $y=x$.

9120. — Étudier le mouvement circulaire où l'accélération est constante en grandeur. Exprimer l'accélération tangentielle en fonction de l'arc.

9121. — Si un point décrit un cercle sous l'action d'une force centrale, l'hodographe est une conique.

9122. — Un point d'un cercle qui roule sur une droite parcourt sa trajectoire avec une vitesse constante. Loi du roulement. Accélération du mobile à un instant donné.

9123. — Un point décrit une parabole avec une vitesse angulaire constante autour du foyer. Pour quelles positions du point la composante de l'accélération dirigée vers le foyer est-elle nulle ?

9124. — Un point mobile décrit une ellipse avec une vitesse connue. Comment peut-on calculer l'accélération ?

VII.— Dynamique.

9125. — Un point décrit une ellipse sous l'action d'une force newtonienne. Déterminer les positions du point pour lesquelles la vitesse de la trace de la tangente sur la directrice relative au centre de force est maximum.

9126. — Mouvement d'un point pesant attaché par deux fils à deux points fixes situés au même niveau : variations des tensions des fils.

9127. — Un point décrivant une parabole sous l'action d'une force newtonienne, sa projection sur la directrice se meut comme si elle était attirée par le foyer en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

9128. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, dans un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse.

9129. — Etudier le mouvement d'un point pesant attiré par un centre fixe O proportionnellement à la distance. Cas particulier où le plan passant par le centre O et par la vitesse initiale est vertical.

9130. — Etudier le mouvement d'un point assujetti à se déplacer sur une droite et soumis à l'action d'un centre fixe situé en dehors de la droite, et qui l'attire en raison inverse du carré de la distance.

9131. — On donne un pendule à tige rigide mais sans masse. On le lance dans un plan vertical. Avec quelle vitesse faut-il le lancer pour qu'il arrive au point le plus haut avec une vitesse nulle ? Si on remplace la tige par un fil flexible, en lançant le point avec la vitesse trouvée, le fil reste-t-il tendu ?

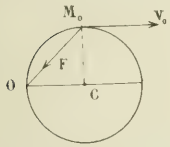
9132. — Etudier le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force constante dont la direction tourne d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire donnée.

9133. — Etudier le mouvement d'un point soumis à l'action de la force centrale $F = \frac{m\mu r}{(r^2 - 9c^2)^2}$. Le mobile est lancé du point de l'axe polaire situé à la distance c du pôle, avec une vitesse initiale perpendiculaire à Ox et égale à $\sqrt{\frac{\mu}{8c^2}}$. Peut-on définir la trajectoire comme enveloppe d'une droite ?

9134. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, Oz étant vertical et dirigé vers le haut. Etudier le mouvement d'un point pesant attiré proportionnellement à la distance par l'origine O et l'axe des z.

9135. — Mouvement d'un point pesant sur un cercle situé dans un plan vertical. On lance le point avec une vitesse initiale dirigée vers le haut. Jusqu'à quel point monte le mobile ?

9136. — Un point M assujetti à se déplacer sur un cercle de centre C et de rayon 1 est attiré par un point O du cercle par une force ayant pour intensité $\frac{4m}{OM^2}$, m étant la masse du point. A l'instant initial, le point M est placé à l'extrémité du rayon perpendiculaire à CO, et la vitesse initiale V_0 tend à éloigner le point du point O. Etudier le mouvement du point M.



9137. — Etudier le mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant la loi de Newton. Condition pour que la trajectoire soit une circonférence.

9138. — Etudier le mouvement d'un point pesant dans un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. 1° Mouvement rectiligne ; 2° Mouvement curviligne. Hodographe.

9139. — A l'extrémité d'un fil élastique, fixé en O, on accroche un point matériel M de poids P ; il tend le fil. Le fil étant maintenu dans cet état, on le place horizontalement, toujours fixé en O. On abandonne le point M sans vitesse. Dans quelle direction part-il ?

9140. — Un point se meut dans un plan ; il est soumis à un champ de forces tel que la force soit proportionnelle à la vitesse et normale au déplacement. Etudier le mouvement.

9141. — On donne dans le plan des xy la loi de forces $X = 0$, $Y = \mu(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$. Etudier la trajectoire.

9142. — On considère un champ de forces dont les composantes X et Y sont exprimées en fonction des coordonnées polaires r et θ. Condition pour que le champ dérive d'une fonction des forces.

9143. — On considère le champ de forces $X = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^n}$, $Y = \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^n}$, $Z = mg$. Pour quelles valeurs de n y a-t-il une fonction des forces ?

9144. — Etudier le mouvement d'un point se déplaçant sur Ox et soumis à l'action de la force $X = 3x^2 - 2x$.

9145. — Etudier le mouvement d'un point pesant assujetti à se déplacer sur une cycloïde.

9146. — Etudier le mouvement rectiligne produit par la force $F = \frac{K}{x^3} - \frac{\lambda}{x^2}$. Condition pour que le mouvement soit périodique.

9147. — On donne un cercle dans un plan vertical et un rayon OM. Un point pesant glisse le long de OM, rebondit en M sur ce cercle et décrit alors une parabole. Déterminer l'inclinaison de OM pour que cette parabole passe par le point le plus bas du cercle.

9148. — Un point M décrit une ellipse sous l'action d'une force newtonienne dirigée vers un foyer. Trouver les positions du point M pour lesquelles la projection m sur l'axe focal a la plus grande vitesse.

9149. — Etudier le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la force centrale $F = \frac{m\mu}{r^2}$. On donne $OM_0 = a$, $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{3a}}$, et l'angle α_0 que fait la vitesse initiale avec OM_0 a pour sinus $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

9150. — Etudier le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de la force centrale $F = m\mu \frac{r - 2a}{r^2}$. Conditions initiales : $r_0 = a$, $\theta_0 = 0$, $tg\,\alpha_0 = \frac{1}{2}$. La vitesse initiale est celle qu'aurait le point s'il arrivait de l'infini sous l'action de la force F, la trajectoire étant rectiligne.

9151. — Etudier le mouvement de deux points matériels M et M′ mobiles sans frottement dans un plan horizontal et réunis par un fil inextensible et sans masse, qui traverse un anneau fixe infiniment petit.

9152. — Un point M décrit une ellipse de façon que le rayon vecteur joignant ce point à l'un des foyers décrive une aire proportionnelle au temps. Quelle est la force qui sollicite le point ?

9153. — Etudier le mouvement produit par la force centrale $F = \frac{3k^2m}{r^4}$.

9154. — Etudier le champ $X = yz$, $Y = zx$, $Z = xy$. Lignes de forces. Surfaces de niveau.

9155. — Etudier le mouvement d'un point repoussé par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

9156. — Etudier le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes A et B proportionnellement à la distance. On suppose le point placé sur la droite AB, la vitesse initiale étant portée sur cette droite.

9157. — Un point est attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Hodographe. Condition pour que la trajectoire soit une circonférence.

9158. — Mouvement d'un point attiré par plusieurs centres fixes, proportionnellement à la distance.

9159. — On donne une ellipse dont un des axes est vertical. On mène la normale en un point M, et cette normale rencontre l'ellipse en un autre point N. Un point matériel tombe sur MN de M en N. Où faut-il prendre le point M pour que la durée du trajet soit la plus courte possible ?

9160. — Trouver l'expression d'une force perpendiculaire au rayon vecteur, en fonction du rayon vecteur, de façon que la trajectoire soit une spirale logarithmique.

9161. — Un point M se déplace sur un cercle de centre O. Déterminer la loi du mouvement de façon que l'hodographe relatif au point O soit un cercle passant par le point O. En déduire la force qui produit le mouvement.

9162. — Un point pesant M est mobile sans frottement sur une droite verticale D. Il est relié à un fil élastique passant par un point O situé en dehors de D. La longueur naturelle du fil est égale à la distance OH du point O à la droite D, et la tension de ce fil est proportionnelle à l'allongement $T = K(OM - OH)$. Etudier le mouvement du point M.

9163. — Un point matériel pesant M est assujetti à décrire un cercle vertical sans frottement. Il est remorqué par un point P auquel il est relié par un fil qui décrit le cercle d'un mouvement uniforme. Comment varie la tension du fil ?

9164. — Un point décrit une ellipse sous l'action de deux forces dirigées vers les foyers et fonctions des distances r et r_1. Si l'une des forces est μr, l'autre est de la forme $\mu r_1 + \frac{K}{r_1^2}$, K étant une constante.

9165. — Un point se meut sous l'action de deux forces centrales μr et μr_1. Démontrer que $\mu r^2 \frac{d\theta}{dt} + \mu r_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} = C$.

9166. — Etudier le mouvement d'un point pesant sur une parabole à axe vertical.

9167. — D'un point O on lance dans un plan vertical des mobiles de même masse, avec la même vitesse initiale, mais dans des directions différentes. Trouver l'enveloppe des paraboles trajectoires.

9168. — Un point matériel M est attiré par un centre fixe O ; il décrit une trajectoire avec une vitesse inversement proportionnelle à la distance OM. Déterminer la trajectoire et la force.

9169. — Un point pesant se meut sur une courbe dans un plan vertical ; déterminer cette courbe de façon que la composante verticale de la vitesse soit constante.

VIII. — Statique.

9170. — Faire la réduction d'un système de forces perpendiculaires aux côtés d'un polygone plan en leurs milieux et proportionnelles aux longueurs de ces côtés. On suppose les forces dans le plan du polygone.

9171. — On considère un polygone plan ou gauche ABCD...HL. Réduire le système de forces AB, BC, CD, ..., HL, LA.

9172. — On donne un système de forces situées dans le plan de deux axes rectangulaires Ox et Oy. Calculer les moments résultants N, N′, N″ par rapport à trois points (a, b), (a', b') et (a'', b''). Démontrer que si le déterminant

$\begin{vmatrix} a & b & N \\ a' & b' & N' \\ a'' & b'' & N'' \end{vmatrix}$ est nul, le système est réductible à une force unique passant par l'origine. Incidemment, connaissant le moment résultant d'un système par rapport à l'origine, trouver le moment résultant par rapport au point (x_0, y_0, z_0).

9173. — On donne un triangle ABC, $BC = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$. En A, B, C on applique des forces parallèles ayant pour intensités $-\alpha$, β, γ et on désigne par A′ le centre de ces forces. Puis aux mêmes points on applique un deuxième système de forces parallèles (la direction n'étant pas la même que pour le premier) et ayant pour intensités α, $-\beta$, γ. Soit B′ le centre de ces forces. Enfin on désigne par C′ le centre de trois autres forces α, β, $-\gamma$ appliquées en A, B, C. Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes. Appliquer le théorème de Jean de Céva.

9174. — Soit le tétraèdre SABC. Trouver la résultante générale du système de forces SA, SB, SC, BC, CA, AB, et le moment résultant.

9175. — Quatre forces inconnues se font équilibre : deux d'entre elles ont des lignes d'action données et les deux autres sont appliquées en des points donnés. Montrer que la ligne d'action de chacune de ces dernières décrit un plan.

9176. — Aux sommets d'un triangle ABC on applique des forces parallèles respectivement égales à tg A, tg B, tg C ; déterminer le centre de ces forces.

9177. — Même question si les forces ont pour intensités $\dfrac{\sin A}{\cos B \cos C}$, $\dfrac{\sin B}{\cos C \cos A}$, $\dfrac{\sin C}{\cos A \cos B}$.

9178. — Déterminer le centre de gravité d'un arc de chaînette.

9179. — Centre de gravité de l'aire de la boucle d'une strophoïde droite, de l'aire d'une boucle de la courbe $\rho = a \cos n\omega$ (n entier).

9180. — Centre de gravité de l'aire limitée par les droites $\omega = 0$, $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ et la courbe $\rho^2 = a^2 \cos \omega$.

9181. — Centre de gravité du volume d'un hémisphère.

9182. — Centre de gravité du volume engendré par la boucle de la strophoïde droite tournant autour de l'axe de symétrie.

9183. — Conditions d'équilibre d'un solide qui a deux points fixes.

9184. — Déterminer la position d'équilibre d'un point attiré par trois centres fixes proportionnellement à la distance.

9185. — On donne un cercle dans un plan vertical et on considère deux points matériels pesants assujettis à rester sur le cercle et reliés par un fil. Position d'équilibre avec frottement.

9186. — Un point pesant est mobile avec frottement sur une parabole dont l'axe est vertical. Il est attiré par un point de l'axe proportionnellement à la distance. Déterminer les positions d'équilibre.

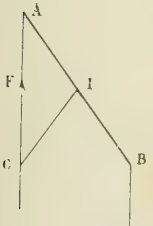
9187. — On considère dans un plan vertical une verticale D et une courbe C tournant sa concavité vers le bas. Une barre pesante reste tangente à la courbe C, et l'une de ses extrémités repose sur D. Déterminer la courbe C de façon qu'il y ait équilibre dans toutes les positions.

9188. — Trouver la position d'équilibre d'une planchette rectangulaire située dans un plan vertical et dont deux côtés s'appuient sur deux points.

9189. — Un corps solide pesant touche les plans de coordonnées aux points $(a_1, b_1, 0)$, $(0, b_2, c_2)$, $(a_3, 0, c_3)$; les cosinus directeurs de la pesanteur étant α, β, γ. Trouver les conditions d'équilibre.

9190. — Un point pesant est mobile avec frottement sur le paraboloïde $2z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, Oz étant vertical et dirigé vers le bas. Trouver la projection sur le plan xOy de la ligne d'équilibre limite.

9191. — Une tige AB est mobile dans un plan vertical autour de son extrémité A. Au milieu I de AB est articulée une autre tige IC dont la longueur est égale à la moitié de AB, et le point C est assujetti à se déplacer sur la verticale du point A. En B est appliqué un poids P et en C, à la tige IC, est appliquée une force F. On demande la position d'équilibre. Les tiges sont supposées sans poids.



9192. — Les directions positives des axes faisant entre elles des angles de 60°, on considère les droites $y = a$, $z = -a$; $z = a$, $x = -a$; $x = a$, $y = -a$. Un point est sollicité par trois forces attractives normales à ces droites et proportionnelles à la distance, le coefficient de proportionnalité étant le même. Position d'équilibre.

9193. — On donne un secteur circulaire OAB suspendu par sa pointe O dans un plan vertical, et une aiguille OI fixée à ce secteur suivant la bissectrice de l'angle AOB. Par le milieu ω de l'arc AB on mène une droite ωL parallèle à OA. On applique un poids P au point B, le secteur bascule et l'aiguille OI va rencontrer ωL en un point M. Relation entre la longueur ωM et le poids P. Si ωL est graduée, le secteur peut servir aussi d'instrument de pesée.

9194. — Un octaèdre régulier pesant peut tourner autour d'une de ses arêtes supposée fixe. Position d'équilibre. Faire une épure.

9195. — Deux tiges pesantes AB et BC sont articulées au point B. Le point A est fixe et le point C se déplace avec frottement sur un plan horizontal. Positions d'équilibre. Peut-on vérifier graphiquement si une position de la figure est ou non une position d'équilibre ?

9196. — On considère une tige pesante AB. L'extrémité B est reliée à un point fixe O par un fil, et au point A, situé plus bas que le point B, est appliquée une force horizontale. Position d'équilibre.

9197. — Deux tiges pesantes OA et AB sont articulées au point A. Le point O est fixe et le point B se déplace dans un plan sans frottement. Position d'équilibre.

9198. — Un point non pesant assujetti à rester sur une parabole est attiré par le foyer par une force proportionnelle à la distance et repoussé par la directrice par une force également proportionnelle à la distance. Etudier les positions d'équilibre suivant les valeurs des coefficients d'attraction.

9199. — On donne deux plans P et P' également inclinés sur le plan horizontal H, leur intersection étant dans le plan H. Deux cylindres égaux O et O' sont tangents entre eux et tangents l'un à P, l'autre à P'. Un troisième cylindre O'' repose sur O et O'. Calculer l'action mutuelle de O et O'.

QUESTIONS PROPOSÉES

2112. — On considère une équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

dont on désigne par α, β, γ les trois racines.

1° On demande de former le polynome $P(x) = \Sigma(\alpha - \beta)^2 x - \gamma^2$, et de montrer que ce polynome est à un facteur près le hessien du polynome proposé.

2° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles et distinctes est que les deux racines de $P(x) = 0$ soient imaginaires.

3° Former l'équation qui admet pour racines $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$. E. B.

2113. — Etant données deux droites D, Δ, un plan P passant par D coupe Δ en un point M. Trouver, quand le plan P varie, le lieu engendré par la perpendiculaire menée par M à ce plan.

Jean Mourret, Ecole normale supérieure.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2024. — *On considère les parallélogrammes* ABCD *circonscrits à une ellipse dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués.*

Soit F *l'un des foyers de l'ellipse.*

1° *Le lieu de l'orthocentre des triangles* FAB, FBC, FCD, FDA *est une conique.*

2° *Le lieu du centre des cercles circonscrits à ces triangles est une quartique ; la construire.*

3° *On a*

$$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = \textit{constante}.$$

1. Supposons l'ellipse rapportée à ses axes, et désignons par φ l'anomalie excentrique du point de contact de la tangente AB. L'équation de cette tangente est alors

$$(AB) \qquad bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0;$$

on en déduit l'équation de BC en y changeant φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$(BC) \qquad -bx\sin\varphi + ay\cos\varphi - ab = 0,$$

et celle de AD en y changeant φ en $\varphi - \frac{\pi}{2}$,

$$(AD) \qquad bx\sin\varphi - ay\cos\varphi - ab = 0.$$

On vérifie immédiatement que les droites BC et AD sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse.

En résolvant les équations de AB et de AD, on a les coordonnées du point A

(A) $$x = a(\cos\varphi + \sin\varphi), \qquad y = b(\sin\varphi - \cos\varphi),$$

et, en résolvant les équations de AB et BC, on a les coordonnées du point B

(B) $$x = a(\cos\varphi - \sin\varphi), \qquad y = b(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Cherchons les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle FAB ; il suffit de prendre l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point F$(c, 0)$ sur AB,

$$\frac{y}{x - c} = \frac{a \sin\varphi}{b \cos\varphi},$$

et de la perpendiculaire menée de A sur FB ; l'équation de cette droite est

$$\frac{y - b(\sin\varphi - \cos\varphi)}{x - a(\cos\varphi + \sin\varphi)} = -\frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi) - c}{b(\cos\varphi + \sin\varphi)}.$$

ou $$[x - a(\cos\varphi + \sin\varphi)]\,a(\cos\varphi - \sin\varphi) - c + [y - b(\sin\varphi - \cos\varphi)]\,b(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0.$$

En remplaçant dans cette équation y par $\dfrac{(x - c)a \sin\varphi}{\cos\varphi}$, on obtient sans difficulté

$$x = -c \cos 2\varphi, \qquad \text{puis} \qquad y = -\frac{ac}{b} \sin 2\varphi.$$

On en conclut que les coordonnées du point de concours des hauteurs du triangle FAB sont

$$x = -c \cos 2\varphi, \qquad y = -\frac{ac}{b} \sin 2\varphi.$$

Par suite, le lieu de ce point est une ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{b^2 y^2}{a^2 c^2} - 1 = 0.$$

Cette ellipse est aussi le lieu des points de concours des hauteurs des triangles FBC, FCD et FDA.

2. Cherchons maintenant les coordonnées du centre ω du cercle circonscrit au triangle FAB. On pourrait déterminer ce point par l'intersection de deux perpendiculaires aux milieux de deux côtés. Il sera plus simple d'utiliser les coordonnées du point de concours des hauteurs. On sait en effet que, dans un triangle, le centre du cercle circonscrit ω, le centre de gravité G et le point de concours des hauteurs H sont en ligne droite, et que l'on a la relation segmentaire

$$\frac{\overline{\omega G}}{\overline{\omega H}} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit $$x_\omega = \frac{x_G - \frac{1}{3} x_H}{1 - \frac{1}{3}}, \qquad y_\omega = \frac{y_G - \frac{1}{3} y_H}{1 - \frac{1}{3}},$$

ou $$x_\omega = \frac{3x_G - x_H}{2}, \qquad y_\omega = \frac{3y_G - y_H}{2}.$$

Nous avons trouvé $$x_H = -c \cos 2\varphi, \qquad y_H = -\frac{ac}{b} \sin 2\varphi.$$

Nous savons que

$$3x_G = x_A + x_B + x_F = a(\cos\varphi + \sin\varphi) + a(\cos\varphi - \sin\varphi) + c = 2a \cos\varphi + c,$$
$$3y_G = y_A + y_B + y_F = b(\sin\varphi - \cos\varphi) + b(\cos\varphi + \sin\varphi) = 2b \sin\varphi.$$

On voit alors que les coordonnées du point ω sont

(1) $$x = (a + c \cos\varphi) \cos\varphi, \qquad y = \frac{(b^2 + ac \cos\varphi) \sin\varphi}{b}.$$

Si nous y remplaçons $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, x et y sont des fonctions rationnelles de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, et on voit que le lieu du point ω est une courbe unicursale du quatrième degré.

Pour construire ce lieu nous garderons les équations (1) et nous discuterons les variations de x et y quand φ varie. On aura évidemment toute la courbe en faisant varier φ dans un intervalle d'étendue égale à 2π, par exemple de $-\pi$ à $+\pi$. Mais si l'on change φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change de signe ; donc la courbe est symétrique par rapport à Ox, et on en aura la moitié en faisant varier φ de 0 à π.

Calculons les dérivées de x et y par rapport à φ. Nous trouvons aisément

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\sin\varphi(a + 2c\cos\varphi), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{2ac\cos^2\varphi + b^2\cos\varphi - ac}{b}.$$

La première s'annule pour $\cos\varphi = -\frac{a}{2c}$; ceci ne peut arriver que si $a < 2c$, ou $a^2 < 4(a^2 - b^2)$, ou enfin $b^2 < \frac{3a^2}{4}$. Lorsque cette condition est remplie, il existe un angle α obtus tel que $\cos\alpha = -\frac{a}{2c}$.

$\frac{dy}{d\varphi}$ s'annule lorsque $\cos\varphi$ est égal à l'une des racines du trinome

$$F(\cos\varphi) = 2ac\cos^2\varphi + b^2\cos\varphi - ac.$$

Ce trinome a deux racines de signes contraires ; nous avons

$$F(-1) = ac - b^2, \qquad F(0) = -ac, \qquad F(+1) = ac + b^2.$$

La racine positive est comprise entre 0 et $+1$, elle est le cosinus d'un angle aigu β. Pour que la racine négative soit le cosinus d'un angle, il faut que $F(-1)$ soit positif, c'est-à-dire $ac < b^2$, $a^2(a^2 - b^2) > b^4$, ou $b^4 + a^2b^2 - a^4 < 0$. On en déduit $b^2 < \frac{a^2(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Lorsque cette condition sera remplie, nous désignerons par γ l'angle obtus correspondant à la racine négative du trinome.

On voit sans difficulté que $\frac{a^2(\sqrt{5} - 1)}{2} < \frac{3a^2}{4}$. On a donc trois cas à distinguer.

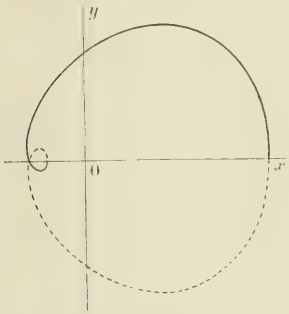
Premier cas. — $b^2 < \frac{a^2(\sqrt{5} - 1)}{2}$.

Les deux angles α et γ existent. Comme on a $F\left(-\frac{a}{2c}\right) = -\frac{ac}{2}$, ou $F\left(-\frac{a}{2c}\right) < 0$ et $F(-1) > 0$, $\cos\gamma$ est compris entre $\cos\alpha$ et -1, et par suite $\gamma > \alpha$.

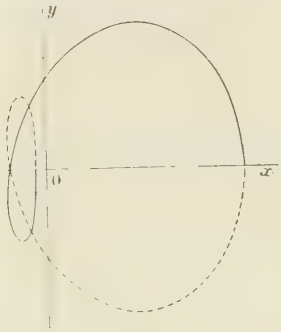
Nous avons alors le tableau de variation suivant :

φ	0		β		$\frac{\pi}{2}$		α		γ		π
$\frac{dx}{d\varphi}$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
x	$a + c$	↘		↘	0	↘	$\frac{a^2}{4c}$ (*min.*)	↗		↗	$-(a - c)$
$\frac{dy}{d\varphi}$		$+$	0	$-$			$-$		0	$+$	
y	0	↗	(*max.*)	↘	b	↘		↘	(*min.*)	↗	0

On a deux cas de figure suivant que la valeur de y correspondant à $\varphi = \alpha$, $\cos\varphi = -\frac{a}{2c}$, est

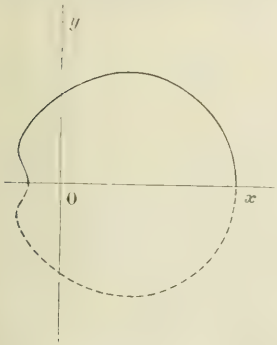


$b^2 > \frac{a^2}{2}$



$b^2 < \frac{a^2}{2}$

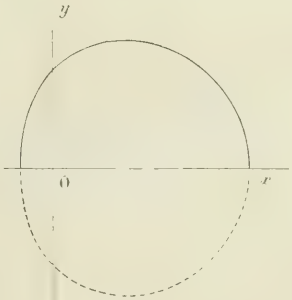
positive ou négative. Elle est positive si $b^2 > \frac{a^2}{2}$, négative si $b^2 < \frac{a^2}{2}$.



Deuxième Cas. $\frac{a^2(\sqrt{5}-1)}{2} < b^2 < \frac{3a^2}{4}$.

L'angle γ n'existe pas, et nous avons le tableau

φ	0		ξ		$\frac{\pi}{2}$		η		π
x	$a+c$	↘		↘	0	↘	$-\frac{a^2}{4c}$ (*min.*)	↘	$-(a-c)$
y	0	↗	(*max.*)	↘	b	↘		↘	0



Troisième Cas. $b^2 > \frac{3a^2}{4}$.

L'angle α n'existe plus.

φ	0		ξ		$\frac{\pi}{2}$		π
x	$a+c$	↘		↘	0	↘	$-(a-c)$
y	0	↗	(*max.*)	↘	b	↘	0

3. Nous avons

$$\overline{FA}^2 = [a(\cos\varphi + \sin\varphi) - c]^2 + b^2(\sin\varphi - \cos\varphi)^2 = 2a^2 + c^2\sin 2\varphi - 2ac(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

$$\overline{FB}^2 = [a(\cos\varphi - \sin\varphi) - c]^2 + b^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 = 2a^2 - c^2\sin 2\varphi - 2ac(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

et par suite $$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 = 4a^2 - 4ac\cos\varphi.$$

Les points C et D étant respectivement symétriques de A et B par rapport au centre, les coordonnées de C et D se déduisent de celles de A et B en changeant φ en $\pi + \varphi$. On a donc

$$\overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 4a^2 + 4ac\cos\varphi,$$

et $$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 8a^2.$$

André COURTOIS, 147e d'infanterie, à Sedan.

Solution géométrique de la troisième partie. — Soient M, N, P, Q les points de contact des côtés AB, BC, CD, DA du parallélogramme. Le point M est le milieu de AB, FM est alors médiane du triangle FAB

et l'on a $$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 = 2\overline{FM}^2 + 2\overline{AM}^2;$$

de même $$\overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 2\overline{FP}^2 + 2\overline{DP}^2,$$

et, en ajoutant,

$$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 2(\overline{FM}^2 + \overline{FP}^2) + 4\overline{OQ}^2.$$

Or $\overline{FM}^2 + \overline{FP}^2 = 2\overline{OF}^2 + 2\overline{OM}^2$, donc

$$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 4c^2 + 4\overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2;$$

comme, d'après le théorème d'Apollonius, on a $\overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2 + b^2$, on en déduit

$$\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 + \overline{FC}^2 + \overline{FD}^2 = 4c^2 + 4(a^2 + b^2) = 8a^2.$$

J. NYEGAARD, 39e d'artillerie à Toul.

Bonne solution par M. M. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône.

PHYSIQUE

1852. — *De l'eau étant placée dans un vase qu'on supposera protégé contre tout échange de chaleur avec le milieu ambiant, on y fait passer bulle à bulle de l'air sec pris à la pression* H *et à la température* T, *et qui se sature d'humidité en traversant le liquide. Écrire une relation entre la masse d'eau* M *contenue à un moment donné dans le vase et sa température* t. *Calculer à 1° près la température la plus basse que l'eau puisse atteindre à l'aide des données suivantes :* $H = 760^{mm}$, $T = 15°$. *Chaleur spécifique de l'air :* $C = 0,237$. *Densité de la vapeur d'eau :* $\delta = \frac{5}{8} = 0,625$. *Chaleur de vaporisation de l'eau :* $\lambda = 606,5 - 0,695t$. *Forces élastiques maxima de la vapeur d'eau de degré en degré, de 0° à 10°, en millimètres de mercure :* 4,6 ; 4,9 ; 5,3 ; 5,7 ; 6,1 ; 6,5 ; 7,0 ; 7,5 ; 8,0 ; 8,6 ; 9,2.

Soit m la masse d'une petite quantité d'air traversant le liquide. Cet air, en se refroidissant de T à t, apporte une quantité de chaleur

$$mC(T - t).$$

Le passage de cet air produit dans la masse d'eau une variation de température dt ; l'eau fournit donc une quantité de chaleur

$$-M\,dt.$$

Enfin, il se vaporise une quantité d'eau $-dM$, ce qui absorbe une quantité de chaleur

$$\lambda\,dM.$$

S'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu ambiant, on doit avoir

$$(1) \qquad mC(T - t) - M\,dt = -\lambda\,dM.$$

Désignons d'autre part par v le volume primitif de la masse m ; on a entre ces deux nombres la

relation

$$(2) \qquad m = va\,\frac{H}{760}\,\frac{1}{1+\alpha T}.$$

Au sein de l'eau, l'air prend un volume v', une pression $H - f$, une température t ; on a donc, en appliquant la loi de Mariotte,

$$(3) \qquad \frac{vH}{1+\alpha T} = \frac{v'(H-f)}{1+\alpha t}.$$

Le volume de la vapeur d'eau produite est aussi v', ce qui donne, δ désignant la densité de cette vapeur,

$$(4) \qquad -dM = v'\delta a\,\frac{f}{760}\,\frac{1}{1+\alpha t}.$$

Eliminons v et v' entre ces trois dernières équations, il vient

$$m = -\frac{1}{\delta}\,\frac{H-f}{f}\,dM.$$

Portons cette valeur de m dans l'équation (1) et nous aurons la relation cherchée :

$$dt : \left[\lambda - \frac{1}{\delta}\,\frac{H-f}{f}\,C(T-t)\right] = \frac{dM}{M}.$$

Le second membre est nécessairement négatif ; dt est donc négatif ou positif suivant que le second facteur, fonction complexe de t, est positif ou négatif. La température t sera stationnaire si l'on a

$$\lambda = \frac{1}{\delta}\,\frac{H-f}{f}\,C(T-t)$$

ou, en introduisant les données numériques,

$$606{,}5 - 0{,}695t = \frac{8}{3}\left(\frac{760}{f} - 1\right)0{,}237\,(15-t),$$

$$1600 - 1{,}83t = \left(\frac{760}{f} - 1\right)(15-t),$$

$$\frac{760}{f} = \frac{1615 - 2{,}83t}{15-t}.$$

Si l'on forme les valeurs numériques des deux membres pour diverses valeurs de t, on trouve, en particulier, pour $t = 2°$, $\frac{760}{f} = 143{,}4$, $\frac{1615 - 2{,}83t}{15-t} = 124$,

— 3°, — 133,3, — 133,8.

— 4°, — 124,6, — 146.

C'est donc presque exactement pour $t = 3°$ que l'équation est satisfaite.

La chaleur spécifique employée dans ce calcul, 0,237, est la chaleur spécifique à pression constante. En réalité l'air, s'il passe, dans l'appareil, de 15° à 3°, passe en même temps de la pression 760 à la pression $760 - 5{,}7 = 754{,}3$. Ces pressions sont dans le rapport de 1,0075 à 1. En même temps, le volume de cet air passe de v à v', volumes qui sont dans le rapport 1,03565. La chaleur spécifique est, en réalité, intermédiaire entre C et c ; on peut la calculer, en partant de la valeur provisoire 3°, à l'aide d'une formule de thermodynamique qui donne

0,226.

En recommençant les calculs avec cette nouvelle valeur, on a

$$\frac{760}{f} = \frac{1692 - 2{,}9t}{15-t}.$$

Les valeurs du second membre sont, pour $t = 2°$, 129,7,

— 3°, 140,3,

— 4°, 152,7.

Une construction graphique donne alors pour solution

$$t = 2^{\circ},65,$$

nombre différant très peu du premier, et il est évident que l'introduction de cette nouvelle valeur dans le calcul de la chaleur spécifique ne modifierait pas sensiblement le résultat.

ÉCOLE CENTRALE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski).

Géométrie analytique à trois dimensions. (Suite.)

6085. — Cône supplémentaire d'un cône donné.

6086. — Equation d'une surface de révolution ; la courbe génératrice a pour équations $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ et l'axe est la droite $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Plan tangent en un point (x, y, z) de la surface.

6087. — Section de la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y - 0$ par le plan $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

6088. — Nature de la section déterminée par le plan $ax + by + cz + d = 0$ dans l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

6089. — Section d'un paraboloïde elliptique par un plan parallèle à l'axe.

6090. — Deux sections parallèles d'une même quadrique sont homothétiques.

6091. — Coordonnées d'un sommet de l'ellipse $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

6092. — Plan diamétral conjugué de la direction α, β, γ par rapport à la quadrique $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$. Intersection de cette quadrique avec le plan diamétral trouvé. Qu'arrivera-t-il si par un point de la conique section, on mène une parallèle à la direction α, β, γ ?

6093. — Plans asymptotes dans l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

6094. — Plans asymptotes dans la surface $x^2 - y^2 - 2z = 0$.

6095. — Mener par la droite $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ un plan tangent à la surface $xy - z = 0$.

6096. — Mener à la surface $x^2 - y^2 - 4z = 0$ un plan tangent perpendiculaire à la droite $x = 2y = 3z$.

6097. — Mener du point $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ une normale à la surface $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$.

6098. — Systèmes de trois diamètres conjugués dans un hyperboloïde.

6099. — Contour apparent de la surface $f(x, y, z) = 0$, les rayons visuels étant parallèles à Oz. Cas particuliers où l'équation est de la forme $z = x - 2y + \sqrt{xy - x^2 - 1}$.

Mécanique.

6100. — Etudier les mouvements rectilignes définis par les équations :

$$x = 6t - t^2, \qquad x = a\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x = e^t + 4e^{-t} \quad \text{(Diagrammes des espaces et des vitesses).}$$

$$x = 3\,\mathrm{ch}\,t, \qquad x = e^{-t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t).$$

6101. — Mouvements rectilignes définis par les relations suivantes, entre la vitesse et l'accélération : 1° $\gamma = kv$; 2° $\gamma^2 - v^2 = a^2$.

6102. — Composition de deux mouvements vibratoires

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b\cos(\omega t + \beta).$$

Exemple : $x = a\cos\omega t$, $y = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.

6103. — Composer les trois mouvements

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad z = c\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

suivant les trois axes de coordonnées.

6104. — Discuter le mouvement $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$, $z = c\cos 2t$.

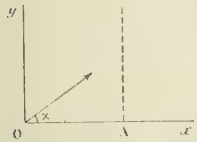
6105. — Montrer que le mouvement défini par les équations

$$x = af(t) + a'g(t) + a'',$$
$$y = bf(t) + b'g(t) + b'',$$
$$z = cf(t) + c'g(t) + c''$$

est un mouvement plan. — Réciproquement, tout mouvement plan peut être défini par des équations de cette forme. — Cas particulier $f(t) = t^2$, $g(t) = t$.

6106. — Un mobile se meut d'un mouvement uniforme sur la parabole $y^2 - 2px = 0$: étudier le mouvement de la projection du mobile sur la tangente au sommet.

6107. — Un point matériel pesant est lancé du point A, parallèlement à l'axe des y, avec une certaine vitesse ; un autre point pesant est lancé de l'origine O, sous un angle α. Condition pour que les deux mobiles se rencontrent.



6108. — Equations du mouvement d'un point pesant lancé tangentiellement à un cercle, d'un point A de ce cercle, avec une vitesse initiale v_0 ; au même instant, des différents points du cercle, on lance de même des mobiles ; trouver le lieu de tous ces mobiles à l'instant t.

6109. — Un point matériel décrit dans un plan la trajectoire $\rho\cos^2\omega - a = 0$ suivant la loi des aires. Composantes de la vitesse ; hodographe, en prenant pour pôle le point O. Composantes de l'accélération.

(A suivre.)

CONCOURS DE 1912 (*Suite.*)

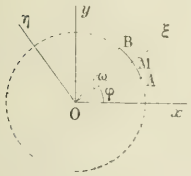
ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

I. — **2114.** Construire la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation $r = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\theta}{5}}$.

On déterminera les asymptotes, les points d'intersection avec l'axe polaire et avec la perpendiculaire à l'axe polaire passant par le pôle, et les tangentes en ces points. On déterminera, en fonction de l'infiniment petit $d\theta$, la valeur principale de la distance entre les points de la courbe correspondant aux angles polaires θ et $\theta + d\theta$, et la valeur principale de l'angle des tangentes en ces deux points. On en déduira l'expression du rayon de courbure en un point quelconque de la courbe et sa valeur aux points remarquables.

II. — **2115.** On considère un cercle C, de centre O et de rayon R, et deux couples de deux diamètres rectangulaires, Ox et Oy d'une part, $O\xi$ et $O\eta$ d'autre part, qui définiront deux systèmes de coordonnées. La position relative des deux systèmes d'axes sera définie par l'angle φ dont il faut faire tourner Ox pour l'amener sur $O\xi$.



On enroule sur le cercle C un fil AMB de longueur $2R\omega$, ayant pour milieu le point M du cercle situé sur la partie positive de $O\xi$. Chaque élément ds du fil a une masse $k\gamma ds$, proportionnelle à sa longueur et à sa distance à Ox.

1° Déterminer le centre de gravité G du fil. On calculera ses coordonnées a, b par rapport aux axes Ox et Oy, et ses coordonnées α, β par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$. On montrera que le point G décrit une droite lorsqu'on fait tourner l'axe Ox, en laissant l'axe $O\xi$ fixe et la longueur du fil constante.

2° On cherchera le lieu du point G lorsque, inversement, on fait tourner l'axe $O\xi$ en laissant Ox fixe et la longueur du fil constante. On étudiera les différentes formes de la courbe Γ obtenue, lorsqu'on donne à ω toutes les valeurs de 0 à ∞.

On déterminera en particulier ses asymptotes, ses points d'intersection avec Oy et, en chacun de ces points, la tangente et le sens de la concavité, les points où la tangente est parallèle à Ox et les points d'intersection avec le cercle C. On déterminera la position limite de la courbe Γ quand ω tend vers 0, et la position limite de ses points d'intersection avec le cercle C.

3° La droite AB joignant les extrémités du fil coupe en D le diamètre Ox et en E la tangente en G à la courbe Γ.

On déterminera la position du point E. Pour cela on considérera une position A'M'B' du fil très voisine de

AMB, et on démontrera que E est le centre de gravité de l'ensemble des fils AMB et A'M'B', chaque élément du premier ayant pour masse $k\rho ds$ et chaque élément du second $-k\rho ds$.

On calculera les coordonnées cartésiennes de E, et celles du milieu H de DE, puis les coordonnées polaires de H, puis de E, et enfin l'équation en coordonnées polaires du lieu de E quand G décrit la courbe Γ.

Calcul trigonométrique.

2116. — Soit l'équation Log. nép. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} = -20 + \dfrac{19500}{t + 273}$

dans laquelle on donne successivement à t les valeurs 600, 700, 800, 900. A chacune des valeurs de t correspondent deux valeurs de $\operatorname{tg} x$, l'une positive, l'autre négative.

On demande de calculer les valeurs positives de $\operatorname{tg} x$ et les angles x $\left(\text{compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$ correspondants. On remplira donc le tableau suivant :

t	$\operatorname{tg} x$ valeur positive	x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$
600		
700		
800		
900		

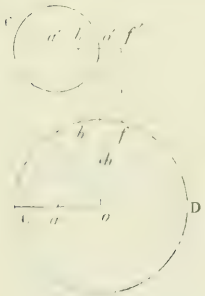
Nota. — Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est

$$M = 0{,}43429.$$

On emploiera des logarithmes à 5 décimales.

2117. — Intersection de deux surfaces de révolution. Données :

$$oo' = 22 \text{ centimètres}, \qquad ao = a'o' = 6 \text{ centimètres}.$$



Surface S : tore ayant pour axe de révolution la verticale du point o, et pour méridienne le cercle (C, C') de centre (a, a') et de rayon ao.

Surface Σ : Soient D le contour apparent horizontal de S, (b, b') et (f, f') deux points de D situés en arrière du plan de front de C, et définis par

$$o'b' = o'f' = 3 \text{ centimètres}.$$

On construira le centre h du cercle passant par les trois points o, b, f.

La surface Σ est engendrée par le cercle (C, C') tournant autour de la verticale du point h.

1° Construire un point quelconque avec sa tangente pour la section méridienne de Σ et pour la courbe d'intersection de S et Σ. On représentera la construction en traits noirs discontinus ou en traits rouges.

2° Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :

en projection horizontale, le solide commun à S et Σ;

en projection verticale, la partie de Σ extérieure à S.

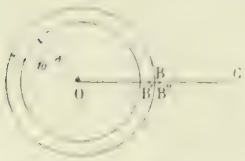
3° Rédiger, sur feuille séparée, une notice expliquant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, la construction des points et tangentes.

Titre et cadre inutiles.

Physique et chimie.

I. — 1° Une quantité d'électricité positive égale à 100 unités électrostatiques C. G. S. est uniformément répartie sur une sphère conductrice isolée creuse dont le rayon intérieur est de 8^{cm} et le rayon extérieur de 10^{cm}.

On demande de représenter par une courbe les valeurs de l'intensité du champ créé par cette sphère aux différents points d'un rayon indéfini OC, dans les deux intervalles suivants :



a) Entre le point O et le point B' situé à une distance $10 - \varepsilon^{cm}$ du point O, ε étant une grandeur positive très petite ;

b) A partir du point B'' en s'éloignant indéfiniment sur OC, B'' étant situé à une distance $10 + \varepsilon$ du point O.

2° On remplace le système d'unités électrostatiques C. G. S. par un système d'unités électrostatiques adoptant comme unités mécaniques fondamentales la masse du kilogramme, le mètre et la minute.

Par quels nombres seront représentées dans ce nouveau système la charge de la sphère creuse et l'intensité du champ en un point situé à 1 mètre du centre ?

II. — **2118**. Deux sphères conductrices A et B de 5mm de diamètre, chargées de quantités égales d'électricité positive et pesant 1g chacune sont suspendues dans le vide à des fils isolants OA, OB de poids négligeable, longs de 2 mètres.

Elles prennent deux positions d'équilibre A et B telles que la distance AB = 10cm.

Calculer en unités C. G. S., avec une approximation d'une unité par défaut, la charge de chacune de ces deux sphères.

L'accélération de la pesanteur est de 981 C. G. S.

Pour charger les deux petites sphères A et B, on les a reliées par des fils métalliques longs et fins à une même sphère conductrice C dont le rayon est de 10cm.

Calculer la charge initiale Q de cette sphère. On admettra que les sphères A, B, C sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que les phénomènes d'influence électrostatique soient négligeables.

III. — **2119**. On effectue l'analyse d'un mélange de gaz de la façon suivante :

1° On mesure d'abord 100cm3 de ces gaz sur l'eau salée, qui dissout très peu CO^2, et sous la pression atmosphérique. On amène cette quantité de gaz au contact d'une solution absorbante avec laquelle on l'agite. On mesure à nouveau le volume du gaz dans les mêmes conditions que précédemment.

On répète ensuite ces deux dernières opérations sur le gaz restant en employant diverses solutions absorbantes.

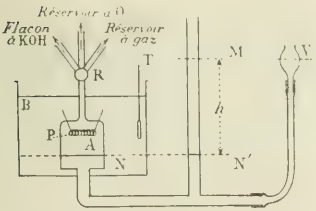
Par quelle suite d'opérations (et dans quel ordre) absorbera-t-on CO^2, H^2S, CO, O et l'ensemble des deux hydrocarbures éthylène et acétylène ?

Les différentes opérations d'absorption ayant donné entre deux mesures consécutives les différences de volume suivantes : O : 1cm3,2 ; H^2S : 0cm3,5 ; CO^2 : 3cm3 ; CO : 20cm3 ; $C^2H^2 + C^2H^4$: 3cm3, indiquer le volume de chacun des gaz contenus dans 100 volumes de gaz initial sec mesuré à 0° sous la pression de 760mm de mercure.

2° Pour doser CH^4 et H, seuls éléments combustibles subsistant dans le gaz, on introduit un certain volume de gaz ayant subi les traitements précédemment décrits dans l'appareil suivant :

Cet appareil est constitué par un tube A que l'on peut isoler ou bien mettre en communication par un robinet R, soit avec un réservoir contenant le gaz, soit avec un réservoir d'oxygène pur, soit avec un flacon de potasse.

Le tube A est relié à un manomètre à mercure M et à un vase V contenant du mercure et dont on peut faire varier le niveau. Le tube A est placé dans une cuve à eau B où plonge un thermomètre T. Il contient une spirale de platine P qu'on rend incandescente par le passage d'un courant et qui assure ainsi la combustion complète des éléments combustibles contenus dans A.



On introduit le gaz à analyser dans A. On amène le mercure dans A à un niveau invariable N ; on lit la différence de niveau MN′ = h entre le mercure du tube M au-dessus de N′ et le mercure de A. On lit également la pression atmosphérique p et la température t de l'eau de la cuve B.

On introduit ensuite une certaine quantité d'oxygène pur en excès pour brûler complètement les éléments combustibles du gaz. On ramène le mercure de A en N; on lit MN′ = h', p' et t' (mêmes significations que précédemment).

On fait passer le courant dans la spirale de platine P. On ramène le mercure de A en N ; on lit MN′ = h'', p'' et t''.

On fait passer tout le gaz de A dans un flacon de potasse et, après agitation au contact de la potasse, on l'introduit à nouveau dans A. On ramène le mercure de A en N ; on lit MN′ = h''', p''' et t'''.

On admet que le gaz était saturé de vapeur d'eau au moment des diverses mesures.

On demande :

a) Les formules donnant les volumes v et v' de CH^4 et de H contenus dans 100cm3 du gaz introduit dans l'appareil eudiométrique, ce gaz étant sec et mesuré sous la pression de 760mm de mercure ;

b) De calculer v pour :

$$p = 720^{mm}, \quad p' = 720^{mm},5, \quad p'' = 720^{mm}, \quad p''' = 720^{mm},5,$$
$$h = 70^{mm}, \quad h' = 300^{mm}, \quad h'' = 200^{mm}, \quad h''' = 150^{mm},$$
$$t = t' = t'' = t''' = 11°.$$

La tension maximum de la vapeur d'eau à 11° est de 10^{mm} de mercure ;

c) De calculer l'erreur relative maximum commise sur la détermination de v en admettant qu'on peut commettre une erreur maximum de lecture de 1/4 de mm. sur la détermination de p et de h et en écartant toute autre cause d'erreur.

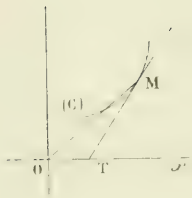
3° Le gaz étudié peut contenir, en outre des éléments dosés, de petites quantités de sulfure de carbone, d'acide cyanhydrique et d'ammoniaque.

Comment en décèlera-t-on la présence ainsi que celle de l'acétylène qui peut se trouver dans le mélange acétylène-éthylène absorbé dans la première série d'opérations du dosage ?

Il suffira d'indiquer d'une manière précise une seule façon d'opérer caractéristique de chaque élément.

Quels phénomènes chimiques se produiront lorsque l'on fera barboter dans l'eau de chaux le gaz analysé supposé contenir du sulfure de carbone en sus des éléments principaux dosés dans les deux premières séries d'opérations quantitatives ?

QUESTIONS PROPOSÉES



2120. — D'un point P on mène les quatre normales PA, PB, PC, PD à une ellipse. Soient A', B', C', D' les seconds points d'intersection des normales avec l'ellipse. On demande le lieu des centres des cercles circonscrits au quadrilatère A'B'C'D' quand P se déplace.

A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

2121. — La tangente à une courbe (C) en M coupe l'axe Ox en T. Déterminer l'équation de (C) et construire cette courbe sachant que

$$\frac{OM}{MT} = k,$$

k étant une constante donnée.

A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

2122. — Une dissolution A d'acide arsénieux, acidulée d'acide chlorhydrique, contient $\frac{1}{10}$ As^2O^3 par litre. Ayant placé 500 centimètres cubes de cette dissolution dans un calorimètre, on y fait barboter lentement 22l,4 d'oxygène ozonisé, ce qui fournit une liqueur B et produit une certaine élévation de température ; toutes corrections faites (chaleur apportée par l'oxygène, chaleur d'évaporation, etc.), cette élévation de température est de 3°,29. Dans une autre expérience, on met encore 500 centimètres cubes de A dans le calorimètre et on y fait arriver une certaine quantité de chlore, ce qui fournit une liqueur C et produit une élévation de température corrigée égale à 1°,55. Dans chacune de ces deux expériences, on admet que la capacité calorifique de la liqueur est constante et égale à celle de 500 grammes d'eau ; le calorimètre et les accessoires équivalent, pour leur part, à 25 grammes d'eau.

D'autre part, on a préparé une dissolution de permanganate de potassium et l'on cherche combien il faut en verser dans 100 centimètres cubes de chacune des liqueurs A, B, C, pour que la coloration violette persiste. On trouve ainsi des volumes respectivement égaux à v, $\frac{3}{4}v$, $\frac{1}{2}v$.

On sait enfin que la chaleur de formation d'une molécule d'eau liquide est de 69^{cal}, et celle d'une molécule d'acide chlorhydrique dissous de $39^{cal},4$.

Déduire de ces données : 1° le volume de chlore employé dans la seconde expérience ; 2° la chaleur de formation de l'ozone.

Les volumes gazeux sont supposés mesurés dans les conditions normales.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Février 1913. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE

Je vous demanderai la permission de rappeler que la question traitée analytiquement par M. Carette dans le n° de décembre 1912 de la *Revue*, l'a été précédemment, par voie géométrique, dans une note que j'ai présentée en 1889 à l'*Association française pour l'Avancement des Sciences* (Congrès de Paris, p. 228).

La construction du centre de courbure qui figure dans cette note diffère un peu de celle qu'a obtenue M. Carette ; mais cette dernière est celle même que, depuis déjà bien des années, je donne à mes élèves de l'Ecole des Ponts et Chaussées et que, cette année encore, j'ai introduite à titre d'exercice dans mon cours de l'Ecole Polytechnique en l'établissant de la manière suivante (étant fait usage des notations de M. Carette, définies par la dernière figure de la page 59) :

Si la normale à la développée de la courbe (P), c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en L à PI, coupe IJ en K, on a, entre les arcs infiniment petits décrits simultanément par les points M, P et I, les relations

$$\frac{d(M)}{d(P)} = \frac{MI}{PI}, \qquad \frac{d(P)}{d(I)} = \frac{PL}{IK}, \qquad \frac{d(I)}{d(M)} = \frac{IJ}{MI},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{PL.IJ}{PI.IK} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{PL}{PI} = \frac{IK}{IJ}.$$

Si la droite LJ coupe MP en Q, on a

$$\frac{PL}{PI} = \frac{QL}{QJ}.$$

Donc

$$\frac{QL}{QJ} = \frac{IK}{IJ},$$

ce qui prouve que IQ est parallèle à LK, c'est-à-dire perpendiculaire à PI. C. Q. F. D.

Pour ce qui est du théorème visant l'alignement avec le point M des centres de courbure L et L_1 correspondant à deux points P et P_1 symétriques par rapport à M (première figure de la page 60), après en avoir, dans ma note de 1889, donné une démonstration géométrique directe, je le retrouve, en quelque sorte, intuitivement en étudiant les propriétés de la conique lieu du centre de courbure L lorsqu'on fait parcourir au point P la tangente en M à la courbe C.

Veuillez me croire, etc.

M. D'OCAGNE.

MESURE DES ERREURS RELATIVES A LA RÈGLE A CALCUL

par MM. **L. Zivy** et **A. Sainte-Laguë**, professeurs au lycée de Douai.

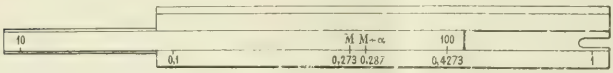
Il est facile d'étendre les emplois classiques de la règle à calcul à bien des problèmes qui, au premier abord, peuvent sembler compliqués. Pour en donner un exemple simple, traitons le problème suivant :

On a plusieurs mesures A_1, A_2, A_3, A_4, ... *d'une même quantité. On prend comme valeur de cette*

quantité la moyenne A *de ces mesures et l'on demande quelles sont les erreurs relatives* $\varepsilon_1 = \frac{A_1 - A}{A}$; $\varepsilon_2 = \frac{A_2 - A}{A}$; $\varepsilon_3 = \frac{A_3 - A}{A}$; ... *de chacune de ces mesures*

Nous nous bornerons à exposer la méthode sur un exemple numérique, uniquement pour mieux faire comprendre le détail des opérations. Soient $A_1 = 4{,}287$, $A_2 = 4{,}266$, ..., diverses mesures et $A = 4{,}273$ leur moyenne. Nous supposerons que A soit compris entre 0 et 10, cas auquel on se ramène par un simple déplacement de la virgule, sans que ce déplacement puisse altérer les valeurs des erreurs à calculer.

Considérons les divisions du bas de la règle et du bas de la règle comme l'indique la figure schématique ci-contre et supposons la règle graduée de 0,1 à 1 et la réglette graduée de 10 à 100.



Amenons l'extrémité de la règlette, extrémité que nous appelons 100, sur 0,4273, nombre lu sur la règle et déduit de A par un déplacement de la virgule. En face des traits 0,273 et 0,287 de la règle, qui correspondent aux parties décimales de A et A_1, se trouvent des nombres M et $M + \alpha$ de la réglette, nombres compris entre 10 et 100 et qu'on lit à 1 unité près seulement.

On a immédiatement

$$\frac{0{,}4273}{0{,}273} = \frac{100}{M}, \qquad \text{ou} \qquad M = \frac{27{,}3}{0{,}4273},$$

et, d'autre part,

$$\frac{0{,}287}{0{,}273} = \frac{M + \alpha}{M}. \qquad \text{ou} \qquad \frac{0{,}287 - 0{,}273}{0{,}273} = \frac{\alpha}{M};$$

d'où $$\alpha = M\frac{0{,}287 - 0{,}273}{0{,}273} = \frac{27{,}3}{0{,}4273} \cdot \frac{0{,}287 - 0{,}273}{0{,}273} = \frac{1\,000}{4{,}273}(0{,}287 - 0{,}273).$$

Mais la différence $0{,}287 - 0{,}273 = 4{,}287 - 4{,}273$ est l'erreur absolue $A_1 - A$. Cette différence est donc égale à $4{,}273 \frac{E}{1\,000}$, en désignant par E le nombre de millièmes de l'erreur relative. On a alors

$$\alpha = \frac{1\,000}{4{,}273} \cdot 4{,}273 \frac{E}{1\,000} = E.$$

Donc la différence des deux nombres M et $M + \alpha$, nombres compris entre 10 et 100, donne le nombre entier de millièmes de l'erreur relative cherchée. Ici on lit $M = 64$; $M + \alpha = 67$; $\alpha = 3$. L'erreur relative est $\frac{3}{1\,000}$.

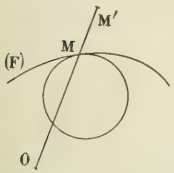
On voit que le nombre $M = 64$ est lu une fois pour toutes et que, pour chacune des mesures 4,287 ; 4,266 ; etc., il suffira d'une seule lecture pour avoir la valeur de E, la soustraction des deux nombres lus $A + \alpha$ et A se faisant d'ailleurs de tête.

Le lecteur verra sans peine que si l'on veut le nombre entier de centièmes de l'erreur relative, il suffira de supposer la réglette graduée non plus de 10 à 100 mais de 1 à 10. De même, pour des dix-millièmes on supposerait la réglette graduée de 100 à 1 000, etc.

NOTE SUR LES CONCHOÏDES

par M. **C. Vernières**, Élève à l'Ecole Centrale.

Je me propose de construire la tangente et la normale en un point quelconque de la conchoïde d'une courbe, connaissant les mêmes éléments pour le point correspondant de la courbe.

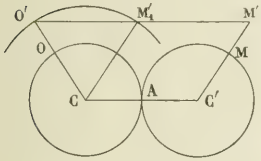


Je me base sur la remarque évidente qui suit :

Soient O l'origine des rayons vecteurs, M un point de (F), M' le point correspondant de la conchoïde (MM' = constante). Si un cercle est tangent en M à (F), sa conchoïde, prise dans les mêmes conditions que celle de (F), est tangente en M' à cette dernière.

Tout revient donc à construire la tangente et la normale à la conchoïde d'un cercle. Le choix du cercle tangent résulte de la propriété suivante :

Tout point invariablement lié à un cercle (C') roulant sur un cercle égal (C) a pour trajectoire la conchoïde d'un cercle concentrique à (C).

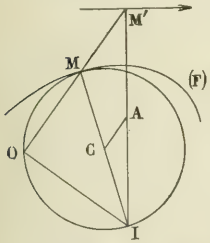


Soit en effet M' le point, C'M' et MM' sont constants. Menons par M' la parallèle à CC'; elle coupe CO (O position initiale de A) en un point O' qui est fixe, car on a évidemment CO' = C'M'. Considérons alors le cercle de centre C et de rayon CO' ; il coupe O'M' en M'_1 et il est clair que $M'_1M' = CC'$.

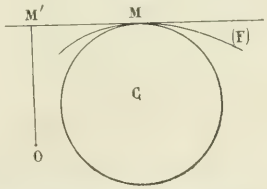
Le lieu du point M' est donc bien une conchoïde du cercle concentrique à C et de rayon CO'.

On démontrera aisément que, réciproquement : Toute conchoïde de cercle (Γ) prise par rapport à un point du cercle est la roulette d'un point d'un cercle roulant sur un cercle égal concentrique à (Γ), le rayon de ces cercles étant la moitié de la distance séparant un point de (Γ) du point correspondant de la conchoïde.

La normale en M' à la conchoïde est, comme on le sait, M'A ; d'où la construction de la normale à une conchoïde d'une courbe quelconque (F) :



Considérons le cercle (C) passant par O et tangent à (F) en M ; menons CA parallèle à OM et égal à $\frac{MM'}{2}$, M'A est, d'après ce qui précède, la normale en M' à la conchoïde du cercle (C) et par suite à celle de (F) ; la tangente en M' est immédiate.



Si nous considérons maintenant la podaire de (F) par rapport à O, elle est tangente à celle de C en M', d'où une construction analogue à la précédente de la normale en M' à la podaire de (F) en M', puisque la podaire du cercle (C) est encore une conchoïde de cercle.

Note de la rédaction. — En somme, ces constructions ne diffèrent pas de celle, très connue, où l'on se sert du centre instantané de rotation.

Prenons, en effet, la construction de la normale à la conchoïde : MC rencontre M'A en I tel que MC = CI ; donc I est sur le cercle auxiliaire ; par suite, OI est perpendiculaire à OM ; donc I est le centre instantané de rotation.

Néanmoins, nous avons jugé bon de les donner, ayant égard aux propriétés des conchoïdes de cercle, qu'elles rappellent.

GÉOMÉTRIE

2029. — *On donne un cercle tangent à deux droites rectangulaires. Trouver le lieu des foyers des paraboles tangentes au cercle et aux deux droites données.*

Démontrer que les tangentes au sommet de ces paraboles enveloppent une courbe de 4e classe et trouver le point de contact de la droite avec son enveloppe.

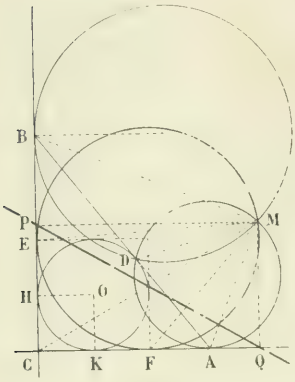


Fig. 1.

Etude géométrique de la question.

Soit (O) un cercle tangent à deux droites rectangulaires CA, CB (fig. 1).

Construisons le foyer d'une des paraboles de l'énoncé, tangente en D au cercle fixe et aux deux droites fixes CA, CB. Ce foyer est le point d'intersection (voir *Traité de Géométrie* de M. Rouché, p. 464, n° 1192) de deux cercles passant par D et tangents respectivement aux côtés de l'angle droit en A et B, points d'intersection de la tangente au cercle fixe en D avec AC et BC.

Il est manifeste que AMB est droit (les deux cercles variables sont d'ailleurs orthogonaux).

On a $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$, $\widehat{MDB} = \widehat{MAC}$.

Les deux triangles MAC, MBD sont semblables :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BD}{AC} = \frac{BH}{AC}.$$

Soit R le rayon du cercle O. Exprimons de deux manières la surface du triangle ABC :

$$AC.BC = 2R(R + AK + BH),$$

ou

$$AC.BC = 2R(AC + BH),$$

$$AC(BC - 2R) = 2R.BH,$$

$$AC.BE = 2R.BH,$$

$$\frac{BH}{AC} = \frac{BE}{2R} = \frac{BE}{EC}.$$

Donc $\frac{MB}{MC} = \frac{BE}{EC}$. ME est bissectrice de $\widehat{BMC}$; de même MF est bissectrice de $\widehat{CMA}$; par suite, on a $\widehat{EMF} = \frac{\pi}{4}$, et le lieu est le cercle tangent aux axes en E et F et de rayon 2R.

Soit le cercle (F) le lieu des foyers des paraboles du problème. Considérons un point M sur ce cercle et soient P et Q ses projections sur les axes rectangulaires. La droite PQ est la tangente au sommet de la parabole de l'énoncé ayant M pour foyer. Je dis qu'elle enveloppe une courbe de la 4e classe.

En effet, considérons un point N quelconque du plan et les faisceaux de droites issus de N et tels que NRS qui coupent les axes en R et S. Elevons en R et S des perpendiculaires aux axes qui se coupent en ω.

Le lieu de ω est manifestement une hyperbole équilatère ayant pour directions asymptotiques les deux axes rectangulaires. Cette hyperbole coupe le cercle fixe (F) en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

A ces quatre points correspondent quatre droites, R_1S_1, ..., R_4S_4, joignant les projections de ces points sur les axes et qui passent par le même point N. Il existe donc quatre droites passant par N et tangentes à la courbe enveloppe de PQ, qui est par conséquent de la 4e classe.

Proposons-nous maintenant de déterminer le point de contact de PQ avec son enveloppe.

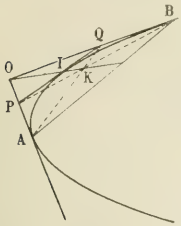


Fig. 2

Considérons le cas particulier où le lieu du point M est une droite AB; l'enveloppe de la droite PQ est une parabole tangente en A et B à OP et OQ.

Soit I le point de contact de PQ avec son enveloppe; d'après un théorème bien connu, OI, AQ et BP sont concourantes en K, d'où la construction : on joint AQ, BP qui se coupent en K. OK coupe PQ en I qui est le point cherché.

Considérons maintenant un cercle (C). Le cas est d'ailleurs général et s'appliquera à une courbe quelconque.

Pour avoir le point de contact de PQ avec son enveloppe, considérons sur (C) un point M′ voisin de M; soit P′Q′ la 2e position de PQ et P′Q′. Ces deux droites PQ se coupent en I. Il s'agit de trouver la position limite de I quand M′ se rapproche indéfiniment de M.

Pour cela, considérons la droite MM′; les droites PQ, relatives aux différents points de MM′, enveloppent une parabole. Or, si M′ se rapproche de M, le point I tend vers le point de contact de PQ avec cette parabole.

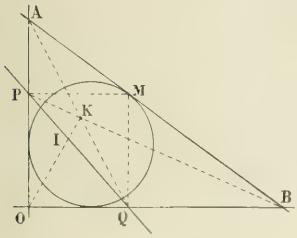


Fig. 3.

D'ailleurs, si M′ se rapproche indéfiniment de M, MM′ tend vers la tangente en M à (C). On a donc la construction suivante :

On mène la tangente en M à (C); cette droite coupe les axes en A et B; on joint BP et AQ qui se coupent en K; OK coupe PQ en I qui est le point cherché.

Cette construction est générale : elle s'applique lorsque la courbe (C) est quelconque, à condition toutefois qu'on sache lui mener la tangente en un point quelconque. Elle permet de construire par point et par tangente l'enveloppe de PQ.

Remarque. — Des considérations géométriques simples nous ont permis de déduire le résultat suivant : Les paraboles tangentes aux droites rectangulaires OA et OB (*fig.* 3) respectivement en A et B admettent la même enveloppe que la droite PQ.

On peut démontrer analytiquement que l'enveloppe de PQ est de la 4e classe. Soient, en effet,

(1) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

l'équation du cercle (C) et (λ, μ) les coordonnées d'un point M de ce cercle. Ces coordonnées vérifient l'équation (1) et l'on a

(2) $$\lambda^2 + \mu^2 - 2a\lambda - 2a\mu + a^2 = 0.$$

L'équation de la droite PQ est alors

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0.$$

Pour que l'équation générale d'une droite

$$ux + vy + w = 0$$

représente PQ, il faut que l'on ait $$\frac{u}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{v}{\frac{1}{\mu}} = \frac{w}{-1},$$

ou (3) $$\lambda u = \mu v = -w.$$

En éliminant λ et μ entre les équations (2) et (3), on trouve l'équation tangentielle de l'enveloppe de PQ : $$\frac{w^2}{u^2} + \frac{w^2}{v^2} + 2aw\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) + a^2 = 0,$$

ou $$w^2(u^2 + v^2) + 2auvw(u + v) + a^2u^2v^2 = 0,$$

qui représente une courbe de la 4e classe.

On peut d'ailleurs exprimer rationnellement les coordonnées d'un point de la courbe en fonction de l'angle que ωM fait avec l'axe des x. Nous avons trouvé

$$\begin{cases} x = \dfrac{R\cos\varphi(1+\cos\varphi)^2}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}, \\ y = \dfrac{R\sin\varphi(1+\sin\varphi)^2}{1+\sin\varphi+\cos\varphi}, \end{cases} \qquad (R = a),$$

et, en fonction de $t = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{2}$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{2R(1-t)}{(1+t^2)^2}, \\ y = \dfrac{Rt(1+t)^2}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

C'est avec ces dernières équations que nous avons étudié la courbe. Elle admet comme axe de symétrie la bissectrice $O\omega$ de l'angle xOy.

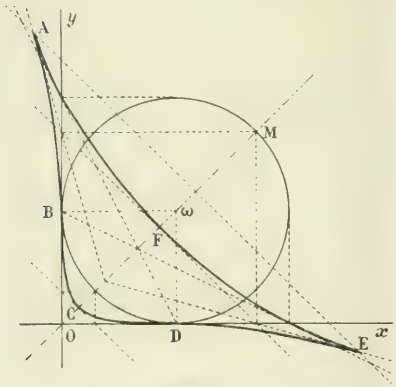


Fig. 4.

Tous calculs faits, on trouve

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-2R(-3t^2+4t+1)}{(1+t^2)^3}, \\ y' = \dfrac{R(t+1)^2(-3t^2+4t+1)}{(1+t^2)^3}. \end{cases}$$

La courbe possède deux points de rebroussement réels symétriques par rapport à $O\omega$. Elle est unicursale et du 4e degré.

Le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque est

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{(t+1)^2}{2}.$$

Le tableau suivant contient tous les éléments nécessaires pour construire la courbe, qui affecte la forme indiquée dans la figure 4.

t	$-\infty$	-3	-2	-1	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$	0	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	2	3	$+\infty$
x'					0			0			
x	0 ↘	$\frac{2R}{25}$ ↘	$\frac{6R}{25}$ ↗	R ↗	$R\frac{17+7\sqrt{7}}{16}$ (*maximum*) ↘	$2R$ ↘	0 ↘	$\frac{R(17-7\sqrt{7})}{16}$ (*minimum*) ↗	$-\frac{2R}{25}$ ↗	$-\frac{R}{25}$ ↗	0
y'				0	0			0			
y	R ↘	$\frac{6R}{25}$ ↘	$\frac{2R}{25}$ ↘	0 ↘	$\frac{R(17-7\sqrt{7})}{16}$ (*minimum*) ↘	0 ↗	$2R$ ↗	$\frac{R(17+7\sqrt{7})}{16}$ (*maximum*) ↘	$\frac{54R}{25}$ ↘	$\frac{48R}{25}$ ↘	R
			inflexion								

REME, conducteur des Ponts et Chaussées, à Bernelle (Constantine)

Bonnes solutions : MM. G. Lach et A. Rousseau.
Assez bonnes solutions : MM. Leroy, lycée Hoche, à Versailles ; A. Courtois, 117e d'infanterie à Sedan ; G. E., à Bordeaux

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2030. — *On donne un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *et on considère le cercle*

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

du plan des xy, *et les quadriques* Q *qui contiennent le cercle* (C) *et l'axe des* z.

1° *Le lieu des pôles d'un plan fixe* P *par rapport aux quadriques* Q *est un cône* Γ *du second ordre. Trouver le lieu de la courbe d'intersection du cône* Γ *et du plan* P, *quand ce dernier passe par un point fixe de* Oz. *Étudier la nature de la section du cône* Γ *par le plan des* xy, *quand le plan* P *varie.*

2° *Montrer que les plans polaires d'un point fixe* A *par rapport aux quadriques* Q *passent par un point fixe* B. *Calculer les coordonnées de* B *en fonction de celles de* A *et réciproquement. Étudier le déplacement de la droite* AB *quand le point* A *varie et trouver le lieu du point* B *quand le point* A *décrit un plan* P.

3° *Le lieu des centres des quadriques* Q *est un cylindre* γ *tangent au cône* Γ *le long de* Oz. *Trouver l'enveloppe du plan de la courbe plane commune au cône et au cylindre, quand le plan* P *tourne autour d'une droite ou enveloppe une surface développable* Σ. *Donner l'équation de l'enveloppe quand l'arête de rebroussement* E *de la surface* Σ *a pour équation*

$$x = \frac{a}{t^3 + t^2 - t + 1}, \qquad y = \frac{-at}{t^3 + t^2 - t + 1}, \qquad z = \frac{-at^2}{t^3 + t^2 - t + 1},$$

et montrer qu'elle peut être considérée comme l'enveloppe d'une famille de cônes à un paramètre.

4° *Trouver les équations ponctuelle et tangentielle de la trace de la surface* Σ *sur le plan des* xy. *Construire cette courbe et trouver les régions du plan d'où l'on peut mener trois tangentes réelles à la courbe.*

L'équation générale des quadriques qui passent par le cercle (C) est

$$x^2 + y^2 - 2ax + 2z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0,$$

α, β, γ, δ étant des paramètres variables. Pour que ces quadriques contiennent l'axe des z il faut que la quantité $2z(\gamma z + \delta)$ soit nulle quel que soit z, c'est-à-dire que l'on ait $\gamma = 0$, $\delta = 0$.

Il en résulte que l'équation générale des quadriques (Q) est

$$(Q) \qquad f(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + 2\alpha xz + 2\beta yz - 2ax = 0.$$

1. Soit $ux + vy + wz + r = 0$ l'équation du plan P. Les coordonnées du pôle de ce plan par rapport à la quadrique (Q) sont définies par les équations

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r},$$

ou

$$\frac{x + \alpha z - a}{u} = \frac{y + \beta z}{v} = \frac{\alpha x + \beta y}{w} = \frac{-ax}{r};$$

nous aurons le lieu de ce pôle en éliminant α et β entre ces équations.

Multiplions le premier rapport haut et bas par x, le deuxième par y, le troisième par $-z$ et ajoutons-les terme à terme ; nous obtenons un nouveau rapport égal aux précédents et ne contenant plus α et β. En égalant ce rapport à $-\frac{ax}{r}$, nous obtenons l'équation du lieu

$$\frac{x(x-a) + y^2}{ux + vy - wz} = -\frac{ax}{r},$$

ou

$$(\Gamma) \qquad ax(ux + vy - wz - r) + r(x^2 + y^2) = 0.$$

Comme cette équation est homogène par rapport aux trois fonctions linéaires x, y, $ux + vy - wz - r$, elle représente un cône (Γ) dont le sommet est le point de rencontre des trois plans $x = 0$, $y = 0$, $ux + vy - wz - r = 0$. Ce sommet est un point S, situé sur Oz, ayant pour cote $-\frac{r}{w}$: c'est le point de rencontre du plan P et de Oz.

Il en résulte que le plan P coupe le cône (Γ) suivant deux génératrices. Supposons que le point S reste fixe et ait pour cote h. L'équation du plan P s'écrit

$$ux + vy + z - h = 0,$$

et celle du cône (Γ) $$ax(ux + vy - z + h) - h(x^2 + y^2) = 0.$$

Le lieu des génératrices du cône (Γ) situées dans le plan P s'obtient en éliminant $ux + vy$ entre ces deux équations ; on obtient ainsi

$$2ax(z - h) + h(x^2 + y^2) = 0, \qquad \text{ou} \qquad h(x^2 + y^2 - 2ax) + 2axz = 0.$$

On reconnaît l'équation du cône qui a pour sommet le point S et pour base le cercle (C).

Etudions maintenant la section du cône (Γ) par le plan des xy. Cette conique (k) a pour équation

(k) $$ax(ux + vy - r) + r(x^2 + y^2) = 0.$$

Elle touche Oy à l'origine, et ses directions asymptotiques sont définies par l'équation

$$ax(ux + vy) + r(x^2 + y^2) = 0.$$

On reconnaît aisément que ces deux droites sont les droites joignant l'origine aux points de rencontre du cercle

(C′) $$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

et de la droite

(Δ) $$ux + vy + r = 0,$$

qui est la trace du plan P sur le plan des xy.

Donc, si la droite Δ ne rencontre pas le cercle (C′), la conique (k) est une ellipse ; si Δ rencontre (C′) en deux points réels et distincts, (k) est une hyperbole ; enfin, si Δ est tangente à (C′), (k) est une parabole.

2. Le plan polaire du point $A(x_0, y_0, z_0)$ par rapport à la quadrique (Q) a pour équation

$$x_0(x - \alpha z - a) + y_0(y - \beta z) + z_0(\alpha x + \beta y) - ax = 0,$$

ou $$\alpha(x_0 z + z_0 x) + \beta(y_0 z + z_0 y) + x_0(x - a) + y y_0 - ax = 0.$$

Ce plan passe, quels que soient α, β, par le point $B(x, y, z)$ défini par les équations

(1) $$x_0 z + z_0 x = 0, \qquad y_0 z + z_0 y = 0, \qquad x_0(x - a) + y y_0 - ax = 0.$$

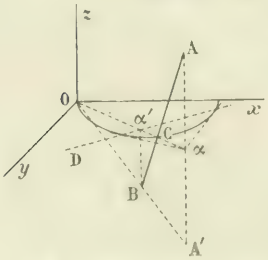
Les deux premières nous donnent $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} = -\dfrac{z}{z_0} = \lambda$, ou $x = \lambda x_0$, $y = \lambda y_0$, $z = -\lambda z_0$,

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on détermine la valeur de λ, $\lambda = \dfrac{ax_0}{x_0^2 + y_0^2 - ax_0}$, et par suite, on obtient, pour les coordonnées du point B,

$$x_1 = \frac{ax_0^2}{x_0^2 + y_0^2 - ax_0}, \qquad y_1 = \frac{ax_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2 - ax_0}, \qquad z_1 = \frac{-ax_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2 - ax_0},$$

et, inversement, on peut exprimer x_0, y_0, z_0 en fonction de x_1, y_1, z_1 par les mêmes formules :

$$x_0 = \frac{ax_1^2}{x_1^2 + y_1^2 - ax_1}, \qquad y_0 = \frac{ax_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2 - ax_1}, \qquad z_0 = \frac{-ax_1 z_1}{x_1^2 + y_1^2 - ax_1}.$$



Les équations (1) nous montrent que le point B est le point de rencontre de la droite $\dfrac{x}{x_0} = \dfrac{y}{y_0} = \dfrac{-z}{z_0}$ et du plan

$$x_0(x - a) + y y_0 - ax = 0.$$

La droite passe par l'origine et par le point A′ symétrique de A par rapport au plan xOy. Le plan est parallèle à Oz, et coupe le plan des xy suivant la polaire D du point $\alpha(x_0, y_0, 0)$ par rapport au cercle (C). Par suite, pour construire le point B, on joint $O\alpha$ qui rencontre D au point α' ; on mène par α' une parallèle à Oz, qui rencontre OA′ au point B.

Si on désigne par C le point de rencontre de $O\alpha$ et du cercle (C), C est conjugué harmonique de O

par rapport à α et α', donc $\frac{C\alpha}{C\alpha'} = \frac{O\alpha}{O\alpha}$. Mais on a $\frac{O\alpha}{O\gamma} = \frac{A\alpha}{B\alpha}$, donc $\frac{A\alpha}{B\alpha} = \frac{C\alpha}{C\alpha'}$, ce qui montre que AB passe par le point C, en d'autres termes que AB rencontre le cercle (C).

Ceci nous donne une idée suffisante du déplacement de la droite AB.

Si le point A décrit le plan P, $ux + vy + wz + r = 0$, le point B décrit la surface

$$u\frac{ax^2}{x^2+y^2-ax} + v\frac{axy}{x^2+y^2-ax} + w\frac{axz}{x^2+y^2-ax} + r = 0,$$

ou

$$ax(ux + vy + wz + r) + (x^2 + y^2) = 0.$$

Cette équation représente le cône (Γ) ; et ce résultat était à prévoir, puisque le point B est le pôle du plan P.

3. Le centre de la quadrique (Q) est défini par les équations

$$x + \alpha z - a = 0, \qquad y + \beta z = 0, \qquad ax + \beta y = 0;$$

nous aurons le lieu de ce point en éliminant α et β entre ces trois équations. Cette élimination est immédiate et nous donne

$$(\gamma) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Cette équation représente un cylindre (γ) ayant pour section droite le cercle (C′) dont nous avons parlé plus haut.

Le cylindre (γ) et le cône (Γ) touchent le plan des yz suivant l'axe Oz ; donc le reste de leur intersection est une conique, et pour avoir le plan de cette conique, il suffit de combiner linéairement les équations du cylindre et du cône, de façon à obtenir x en facteur.

Rapprochons les deux équations

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \qquad ax(ux + vy + wz + r) + (x^2 + y^2) = 0;$$

nous voyons qu'il suffit de multiplier la première par $-r$, la deuxième par 1 et de les ajouter. Nous trouvons ainsi

$$ax(ux + vy + wz) = 0,$$

ce qui montre que le plan P_1 de la conique commune a pour équation

$$(P_1) \qquad ux + vy + wz = 0.$$

Ce plan passe par l'origine.

Si le plan P passe par une droite fixe, u, v, w, r sont des fonctions linéaires d'un paramètre ; on en conclut que le plan P_1 passe également par une droite fixe.

Si le plan P enveloppe une surface développable (Σ), u, v, w, r sont fonctions d'un seul paramètre ; le plan P_1 enveloppe un cône ayant pour sommet l'origine.

Supposons que l'arête de rebroussement de (Σ) soit la courbe (E) définie par les équations

$$x = \frac{a}{t^3 + t^2 - t + 1}, \qquad y = \frac{-at}{t^3 - t^2 - t - 1}, \qquad z = \frac{-at^2}{t^3 + t^2 - t + 1}.$$

On sait que le plan P est osculateur à cette courbe. Pour former l'équation du plan osculateur au point t_0, nous écrirons que le plan $ux + vy + wz + r = 0$ rencontre la courbe en trois points confondus au point t_0, et, pour cela, que l'équation

$$\frac{ua}{t^3 + t^2 - t + 1} - \frac{vat}{t^3 + t^2 - t + 1} - \frac{wat^2}{t^3 + t^2 - t + 1} - r = 0,$$

ou

$$rt^3 + (r - aw)t^2 - (r + av)t - r + au = 0$$

admet la racine triple t_0. On doit donc avoir l'identité

$$rt^3 + (r - aw)t^2 - (r + av)t - r + au \equiv r(t - t_0)^3,$$

ce qui donne $\quad r - aw = -3rt_0, \qquad -(r + av) = 3rt_0^2, \qquad r + au = -rt_0^3;$

et on en tire $\quad w = \frac{r(3t_0 + 1)}{a}, \qquad v = -\frac{r(3t_0 + 1)}{a}, \qquad u = -\frac{r(t_0^3 + 1)}{a}.$

Par suite, l'équation du plan osculateur est

$$(t_0^3+1)x+(3t_0^2-1)y-(3t_0+1)z-a=0.$$

L'équation générale du plan P est alors

$$(t^3+1)x+(3t^2+1)y-(3t+1)z-a=0,$$

et celle du plan P_1,

$$(t^3+1)x+(3t^2+1)y+(3t+1)z=0,$$

ou

$$t^3x+3t^2y+3tz+x+y+z=0.$$

Pour obtenir l'enveloppe de ce plan, prenons les dérivées par rapport à t et par rapport à une variable d'homogénéité :

$$t^2x+2ty+z=0, \qquad t^2y+2tz+x+y+z=0,$$

et éliminons t entre ces deux équations ; nous obtenons

$$[x(x+y+z)-yz]^2-4(xz-y^2)[y(x+y+z)-z^2]=0.$$

C'est l'équation d'un cône du quatrième degré. On peut aussi envisager ce cône comme l'enveloppe des cônes du deuxième degré définis par l'équation

$$(xz-y^2)\lambda^2+\lambda[x(x+y+z)-yz]+y(x+y+z)-z^2=0.$$

4. Considérons maintenant la surface (Σ), enveloppe du plan P

$$(t^3+1)x+(3t^2+1)y-(3t+1)z-a=0,$$

ou

$$t^3x+3t^2y-3tz+x+y-z-a=0.$$

Pour obtenir l'équation ponctuelle de (Σ), il faut écrire que cette équation en t a une racine triple, et pour cela que les équations dérivées par rapport à t et par rapport à une variable d'homogénéité ont une racine commune. Ces équations sont

$$(2)\qquad \begin{cases} t^2x+2ty-z=0, \\ t^2y-2tz+x+y-z-a=0\,; \end{cases}$$

en éliminant t entre ces équations, on obtient

$$[x(x+y-z-a)+yz]^2-4(xz-y^2)[y(x+y-z-a)-z^2]=0.$$

C'est l'équation ponctuelle de Σ.

La trace de cette surface sur le plan des xy est alors déterminée par l'équation

$$x^2(x+y-a)^2+4y^3(x+y-a)=0,$$

ou

$$(x+y-a)[x^2(x+y-a)+4y^3]=0.$$

Elle se compose d'une droite Δ, $x+y-a=0$, et d'une cubique, $x^2(x+y-a)+4y^3=0$. On voit de plus que la droite Δ rencontre la cubique en trois points confondus au point $x=a$, $y=0$, donc la droite Δ est une tangente d'inflexion.

On peut obtenir ces résultats sans former l'équation ponctuelle de Σ. En effet, la trace de (Σ) sur le plan des xy se compose d'abord des génératrices de la surface situées dans ce plan, puis de l'enveloppe des traces des plans P sur le plan des xy.

Les équations générales des génératrices de la surface sont les équations (2) : pour qu'elles représentent une droite du plan des xy, il faut que t soit nul. On obtient donc une seule génératrice dans le plan des xy, $z=0$, $x+y-a$; c'est la droite Δ.

D'autre part, la trace du plan P sur le plan des xy est

$$(t^3+1)x+(3t^2+1)y-a=0\,;$$

cherchons l'enveloppe de cette droite, en écrivant que l'équation du troisième degré en t, $t^3x+3t^2y+x+y-a=0$, a une racine double. Pour cela, nous prenons l'équation aux inverses sous la forme

$$u^3+\frac{3y}{x+y-a}u^2+\frac{x}{x+y-a}=0,$$

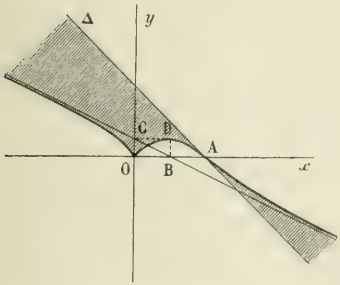
et nous obtenons immédiatement la condition

$$4\frac{27y^3}{(x+y-a)^3}+27\frac{x^2}{(x+y-a)^2}=0,$$

ou $$4y^3 + x^2(x + y - a) = 0;$$
c'est l'équation de la cubique trouvée plus haut.

Son équation tangentielle résultera de l'élimination de t entre les équations
$$\frac{t^3 + 1}{u} = \frac{3t^2 + 1}{v} = \frac{-a}{w},$$
ou $$t^3 = -\frac{au + w}{w}, \qquad t^2 = -\frac{av + w}{3w};$$
élevons la première au carré, la deuxième au cube, et égalons les valeurs de t^6. Nous obtenons
$$(av + w)^3 + 27w(au + w) = 0.$$

La construction de la courbe ne présente aucune difficulté. Elle admet un point de rebroussement à l'origine, la tangente étant Oy. Elle est asymptote à la droite $2x + 4y - a = 0$; elle est tangente à la parallèle à Ox: $y = \frac{a}{4}$, au point d'abscisse $\frac{a}{2}$.



Enfin, le point A $(x = a,\ y = 0)$ est un point d'inflexion, et la tangente en ce point est la droite Δ, $x + y - a = 0$.

En écrivant que la tangente, $(t^3 + 1)x + (3t^2 + 1)y - a = 0$, passe par un point $M(x_0, y_0)$, nous obtenons l'équation
$$t^3x_0 + 3t^2y_0 + x_0 + y_0 - a = 0$$
qui définit les t des points de contact.

Ecrivons que cette équation a ses trois racines réelles, en formant l'équation aux inverses, comme nous l'avons fait précédemment. Nous obtenons la condition
$$4.\frac{27y_0^3}{(x_0 + y_0 - a)^3} + 27\frac{x_0^2}{(x_0 + y_0 - a)^2} < 0,$$
ou $$4y_0^3 + x_0^2(x_0 + y_0 - a)(x_0 + y_0 - a) < 0.$$

Cette inégalité exprime que le point M doit être situé dans la région négative de l'ensemble formé par la courbe et la tangente d'inflexion. C'est la région couverte de hachures.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions de MM. G. Deperrois, à Chartres; Jouglens; G. Lach, à Douai; Jean Ottenheimer, 8e régiment d'artillerie; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

QUESTIONS PROPOSÉES

2123. — 1° Déterminer une série dont tous les termes sont des fonctions de x:
$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$
et telle que $u_n(x) = S'_n(x)$, $S'_n(x)$ étant la dérivée par rapport à x de la somme des n premiers termes de la série (on prendra égales à 1 toutes les constantes d'intégration).

2° Nature de cette série et ordre d'infinitude de $S_n(x)$.

J. Mourret, élève à l'École normale supérieure.

2124. — Soient (T) et (T') deux tangentes communes à deux coniques fixes (C) et (C'), (Σ) une conique variable tangente aux droites (T) et (T') en T et T' et aux coniques (C) et (C') en C et C'.

Trouver les enveloppes des droites TT' et CC' et le lieu du pôle de CC' par rapport à (Σ).

L. Sire.

2125. — On donne un point P et une conique (C). Par le point P, on fait passer deux cordes PMM' et PNN', également inclinées sur les axes de la conique, et, par les quatre points de rencontre avec la conique,

M, M', N, N', on fait passer un cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle, quand l'inclinaison de la sécante sur les axes varie et montrer que tous ces cercles ont même axe radical

2° Du point P comme centre, on décrit un cercle variable, et on considère le triangle conjugué commun à ce cercle et à la conique. Trouver le lieu des sommets, l'enveloppe des côtés et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

J. Mourret.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2031. — *D'un point* M, *variable, d'une parabole on abaisse les normales* MP, MQ, *autres que la normale en* M.

1° *Le lieu du point de rencontre de* PQ *avec la tangente en* M *est une cubique ;*

2° *Le lieu du point de rencontre de* PQ *avec la normale en* M *est une quartique.*

Construire ces deux courbes.

Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole, et (x_0, y_0) les coordonnées du point M : celles-ci vérifient la relation $y_0^2 - 2px_0 = 0$.

Écrivons que la normale à la parabole au point (x, y), $\frac{X - x}{-p} = \frac{Y - y}{y}$, passe par le point M ; nous avons

$$\frac{x_0 - x}{p} = \frac{y_0 - y}{y},$$

et cette équation représente l'hyperbole d'Apollonius relative au point M. Si nous y remplaçons x par $\frac{y^2}{2p}$ et x_0 par $\frac{y_0^2}{2p}$, nous obtenons l'équation

$$\frac{\frac{y_0^2}{2p} - \frac{y^2}{2p}}{p} = \frac{y_0 - y}{y},$$

qui admet comme racines les ordonnées des pieds des normales issues du point M. La racine y_0 (relative au point M) est en évidence ; en la supprimant, il reste l'équation

$$\frac{y_0 - y}{2p} = \frac{1}{y}, \quad \text{ou} \quad y^2 - yy_0 - 2p^2 = 0,$$

qui admet comme racines les ordonnées des points P et Q.

En y remplaçant y^2 par $2px$, on obtient immédiatement l'équation de la droite PQ :

$$(1) \qquad 2px - yy_0 - 2p^2 = 0.$$

1. La tangente au point M à la parabole a pour équation

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0,$$

ou, en remplaçant x_0 par $\frac{y_0^2}{2p}$,

$$(2) \qquad 2yy_0 - 2px - y_0^2 = 0.$$

Le lieu du point de rencontre de la droite PQ et de la tangente en M s'obtient en éliminant y_0 entre les équations (1) et (2). On obtient

ainsi sans difficulté

$$4p(x+p)^3 - 2px^2 - \frac{4p^2(x+p)^2}{y^2} = 0$$

ou

$$(3x+2p)y^2 + 2p(x+p)^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du troisième degré, symétrique par rapport à Ox. On la construit aisément en résolvant l'équation par rapport à y^2.

La courbe admet un point double au point $x = -p$, $y = 0$, les tangentes en ce point ayant pour pentes $\pm\sqrt{2}$. La courbe admet une asymptote parallèle à Oy, $3x + 2p = 0$, et des branches paraboliques dans la direction Ox.

2. La normale au point M a pour équation

$$\frac{x - x_0}{-p} = \frac{y - y_0}{y_0};$$

remplaçons-y x_0 par $\frac{y_0^2}{2p}$ et ordonnons l'équation obtenue par rapport à y_0 ; nous obtenons

$$(3) \qquad y_0^3 - 2p(x-p)y_0 - 2p^2y = 0.$$

Eliminons maintenant y_0 entre cette équation et l'équation (1) ; pour cela nous tirons y_0 de (1), $y_0 = -\frac{2p(x-p)}{y}$, et nous portons cette valeur dans l'équation (2). Ceci nous donne

$$-\frac{8p^3(x-p)^3}{y^3} + \frac{4p^2(x^2-p^2)}{y} - 2p^2y = 0,$$

ou

$$-4p(x-p)^3 + 2(x^2-p^2)y^2 - y^4 = 0.$$

Sous cette forme, on reconnait que le lieu présente un point triple au point $x = -p$, $y = 0$. Si nous y transportons l'origine, l'équation se réduit à

$$-4px^3 + 2(x^2-p^2)y^2 - y^4 = 0$$

ou

$$y^2(2x^2 - y^2 - 4px - 2p^2) = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré symétrique par rapport à l'axe des x.

Pour la construire, posons $y = tx$; nous obtenons

$$x = \frac{4p(1-t^2)}{t^2(2-t^2)}, \qquad y = \frac{4p(1+t^2)}{t(2-t^2)},$$

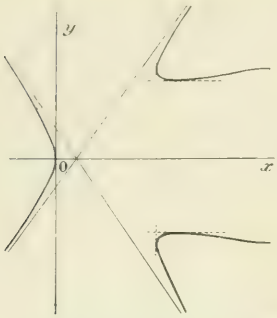
et

$$\frac{dx}{dt} = \frac{8p(t^4+2t^2-2)}{t^3(2-t^2)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{4p(t^4+5t^2-2)}{t^2(2-t^2)^2}.$$

A deux valeurs de t égales et de signes contraires correspondent des points symétriques par rapport à Ox. Nous ferons varier t de 0 à $+\infty$. $\frac{dx}{dt}$ s'annule pour la valeur $\alpha = \sqrt{-1+\sqrt{3}} = 0{,}85\ldots$ et $\frac{dy}{dt}$ pour $\beta = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{33}}{2}} = 0{,}61\ldots$

t	0		β		α		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x	$+\infty$	↘	$+$	↘	*min.*	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	0
y	$-\infty$	↗	*min.*	↗	$+$	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	0

La branche infinie correspondant à $t = 0$ est parabolique dans la direction Ox. L'autre branche



infinie, relative à $t = \sqrt{2}$, a une asymptote. L'ordonnée à l'origine de cette asymptote est la limite de $y - x\sqrt{2}$, ou de $tx - x\sqrt{2}$. Or

$$x(t - \sqrt{2}) = \frac{4p(1 + t^2)(t - \sqrt{2})}{t^2(2 - t^2)} = -\frac{4p(1 + t^2)}{t^2(t + \sqrt{2})}$$

et pour $t = \sqrt{2}$, le dernier membre prend la valeur $-\dfrac{3p}{\sqrt{2}}$.

L'équation de l'asymptote est donc

$$Y - x\sqrt{2} = -\frac{3p}{\sqrt{2}}.$$

et la position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de la différence

$$y - Y = -\frac{4p(1 + t^2)}{t^2(t + \sqrt{2})} + \frac{3p}{\sqrt{2}} = \frac{p(3t^2 + 2t\sqrt{2} + 4)(t - \sqrt{2})}{t^2(t + \sqrt{2})\sqrt{2}};$$

$y - Y$ est négatif pour $t < \sqrt{2}$, et positif pour $t > \sqrt{2}$.

De plus, on voit que l'asymptote ne rencontre la courbe à distance finie qu'en deux points imaginaires dont les t sont racines de l'équation $3t^2 + 2t\sqrt{2} + 4 = 0$.

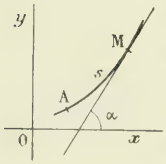
L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Sedan ; J. Dagnaux, lycée de Dijon ; L. Gioan, à Grasse ; Jouglens ; G. Lach, à Douai ; L. Montaut, élève à l'Ecole Centrale ; J. Ottenheimer, 8e d'artillerie ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône ; N. Savary, 61e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies.

2034. — *Déterminer les courbes planes* (C) *telles que le rayon de courbure* ρ *en un point* M *et l'arc* $\overline{AM} = s$ *compté à partir d'un point fixe* A *de la courbe soient liés par la relation* $\rho^2 - s^2 = a^2$ (*a étant une constante*).

On déterminera de préférence les coordonnées x *et* y *de* M *en fonction d'un paramètre qui pourra être* α.

(*Certificat de Mathématiques générales, Toulouse, juillet 1910.*)



L'équation $\rho^2 - s^2 = a^2$ s'écrit $\rho^2 = s^2 + a^2$, puis, en remarquant que $\rho = \dfrac{ds}{d\alpha}$,

$$\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2 = s^2 + a^2, \qquad \frac{ds}{\pm\sqrt{s^2 + a^2}} = d\alpha.$$

Si nous orientons la courbe dans un sens tel que α et s croissent simultanément, nous pourrons prendre le signe $+$ devant le radical et nous aurons

$$\frac{ds}{\sqrt{s^2 + a^2}} = d\alpha;$$

posant alors $s = a \operatorname{sh} t$, nous aurons $ds = a \operatorname{ch} t dt$, et $dt = d\alpha$. Cette équation donne $t = \alpha + C$; alors $s = a \operatorname{sh}(\alpha + C)$ et $ds = a \operatorname{ch}(\alpha + C) d\alpha$.

Pour calculer x et y, nous partirons de $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha$, et nous aurons à intégrer

$$dx = a \cos\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C) d\alpha,$$
$$dy = a \sin\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C) d\alpha.$$

Posons

$$I = \int a \cos\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C) d\alpha,$$
$$I' = \int a \sin\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C) d\alpha,$$
$$J = \int a \cos\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) d\alpha,$$
$$J' = \int a \sin\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) d\alpha;$$

nous aurons, en intégrant par parties de deux façons différentes,

$$I = a \cos\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) + J,$$
$$I = a \sin\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C) - J',$$

et, par suite,

$$I = \frac{a}{2}[\cos\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) + \sin\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C)].$$

De même

$$I' = \frac{a}{2}[\sin\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) - \cos\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C)].$$

D'autre part, $x - x_0 = I$ et $y - y_0 = I'$; les deux constantes x_0 et y_0 indiquent qu'on peut faire subir aux axes une translation quelconque. Changeons donc x en $x + x_0$, y en $y + y_0$, nous aurons les équations suivantes comme équations paramétriques du lieu :

$$x = \frac{a}{2}[\cos\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) + \sin\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C)],$$

$$y = \frac{a}{2}[\sin\alpha \operatorname{sh}(\alpha + C) - \cos\alpha \operatorname{ch}(\alpha + C)],$$

dans lesquelles C désigne une constante arbitraire.

Pour avoir une idée de la forme de ces courbes, nous allons examiner sommairement celle qui correspond à $C = 0$:

$$x = \frac{a}{2}(\cos\alpha \operatorname{sh}\alpha + \sin\alpha \operatorname{ch}\alpha),$$

$$y = \frac{a}{2}(\sin\alpha \operatorname{sh}\alpha - \cos\alpha \operatorname{ch}\alpha).$$

Posons $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, nous aurons d'abord $\rho^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{ch}2\alpha$, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ch}2\alpha}$; puis, en introduisant un angle auxiliaire φ défini par les égalités

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}2\alpha}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}2\alpha}},$$
$$x = \rho\cos(\alpha - \varphi), \qquad y = \rho\sin(\alpha - \varphi),$$

et, par suite, $\omega = \alpha - \varphi$.

Faisons d'abord varier α de 0 à $+\infty$, φ décroîtra depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\frac{\pi}{4}$, et ω augmentera de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$. Au bout de peu de temps, ω varie sensiblement comme α, car l'angle φ varie très lentement. Quant à ρ, il part de $\frac{a}{2}$ et croît constamment jusqu'à $+\infty$; ses variations sont rapides.

La courbe correspondante est donc une spirale qui entoure un nombre infini de fois le point O et qui s'en éloigne indéfiniment et très vite.

Pour préciser sa forme, considérons encore $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$; nous avons $\rho^2 = \frac{a^2}{4}\operatorname{ch}2\alpha$, $2\rho d\rho = 2\frac{a^2}{4}\operatorname{sh}2\alpha d\alpha$; donc $\operatorname{tg} V = \frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{\operatorname{ch}2\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha}\frac{d\omega}{d\alpha}$ Or $\omega = \alpha - \varphi$, $d\omega = d\alpha - d\varphi$, et, comme $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$, $d\varphi = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha}}\frac{-d\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha} = \frac{-d\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha}$; donc

$$d\omega = \frac{d\alpha(\operatorname{ch}2\alpha + 1)}{\operatorname{ch}2\alpha} = \frac{2d\alpha \operatorname{sh}^2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha}.$$

La valeur de $\operatorname{tg} V$ est donc $\operatorname{tg} V = \frac{2\operatorname{ch}^2\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha} = \coth\alpha$; il en résulte qu'au départ V est égal à

$\frac{\pi}{2}$ et qu'il diminue ensuite régulièrement jusqu'à $\frac{\pi}{4}$; à mesure que les spires s'éloignent du point O, elles prennent de plus en plus l'allure d'une spirale logarithmique.

Si on change α en $-\alpha$, z ne change pas, φ se change en $-\varphi-\pi$ et ω en $\pi-\omega$: la nouvelle branche de courbe est symétrique de la première par rapport à Oy.

Les courbes qui correspondent aux valeurs de C, $C=\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, .. s'étudient avec la même facilité, à l'aide d'un changement de la variable paramétrique. Quant à celles qui correspondent à des valeurs quelconques de C, elle s'étudient assez aisément aussi en posant $\alpha+C=t$, et $C=K\pi+C'$, C' étant un nombre compris entre 0 et π.

Bonnes solutions : MM. André Courtois, 147e d'infanterie, à Sedan ; Raymond Chirol, à Moulins ; G. Esteben ; L. Gioan, à Grasse ; G. Lach, à Douai ; Marcel Marie, à Pont Audemer ; Jean Ottenheimer, 8e régiment d'artillerie ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; R. Trévenin, lycée de Reims.

Addition à la question 2024

(R. M. S., Janvier 1913, p. 102).

I. — *Aire des lieux de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit aux triangles* FAB, FBC, FCD, FDA.

1. L'ellipse lieu de l'orthocentre a pour aire $\frac{\pi a^2}{b}$, c'est-à-dire l'aire du cercle ayant pour diamètre la distance focale, multipliée par $\frac{a}{b}$.

2. La quartique lieu du centre du cercle circonscrit a pour aire $\frac{\pi}{2b}(a^2+b^2)$, c'est-à-dire l'aire du cercle de Monge (ou orthoptique), multipliée par $\frac{a}{b}$.

II. — *Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* FAB. C'est une quartique unicursale dont les coordonnées sont $x=\frac{a\cos\varphi+c\sin^2\varphi}{2}$, $y=\frac{b^2\sin\varphi-ac\sin\varphi\cos\varphi}{2b}$, et dont l'aire est $\frac{\pi a}{8b}(a^2+b^2)$.

III. — *Lieu du centre de gravité du triangle* FAB. C'est l'ellipse $\frac{3x^2}{a^2}+\frac{9y^2}{b^2}=4$, dont l'aire est les $\frac{4}{9}$ de l'*aire de l'ellipse* donnée.

E.-N. BARISIEN.

ÉCOLE CENTRALE (1912)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Mécanique (M. Jarlonski)

6110. — Un point décrit suivant la loi des aires une courbe plane

$$\frac{1}{\rho}=Ae^{\alpha\theta}+Be^{-\alpha\theta}.$$

Trouver la force qui produit le mouvement.

6111. — On considère dans un plan un point M, sollicité par une force perpendiculaire à OM, et directement proportionnelle à OM. Écrire les équations du mouvement.

6112. — Mouvement d'un point pesant, avec une résistance proportionnelle à la vitesse.

6113. — Mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

6114. — Mouvement d'un point pesant sur un plan horizontal rugueux, le point étant lancé avec une vitesse initiale v_0.

6115. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné ; cas du frottement. — A partir d'une position M_0 on lance le mobile vers le haut avec une vitesse v_0 ; discuter le mouvement.

6116. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné sans frottement, le mobile étant lancé dans une direction quelconque. Cas particulier où la vitesse initiale est dirigée suivant une ligne de plus grande pente.

6117. — On considère deux plans inclinés raccordés par une petite rigole, et inclinés respectivement de α et de $\pi - \alpha$ sur l'horizon. On abandonne en un point A du premier un point matériel pesant, sans vitesse initiale. On demande à quelle hauteur il va remonter sur l'autre plan, sachant qu'il y a frottement.

6118. — Mouvement d'un point pesant dans l'intérieur d'une sphère non rugueuse.

6119. — On lance un point pesant sur la face intérieure d'un tube cylindrique de révolution vertical : lois du mouvement que prendra le point.

6120. — Calculer l'intensité de la pesanteur en un point de la surface de la terre, en particulier aux pôles et à l'équateur.

6121. — On considère la courbe

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = 0, \qquad z = -a(1 - \cos\varphi) ;$$

loi du mouvement d'un petit anneau se déplaçant sur cette courbe sans frottement.

6122. — Pendule avec résistance proportionnelle à la vitesse.

6123. — Mouvement d'un point pesant sur une tige rugueuse.

6124. — Mouvement sur une hélice verticale d'un point pesant attiré par le pied de l'axe proportionnellement à la distance.

6125. — Dans un plan horizontal, on fait tourner avec une vitesse angulaire constante une tige rigide OA autour d'un point fixe O. A l'instant initial, on lance sur cette tige un mobile M, de O, avec une vitesse initiale v_0. — Trouver les équations du mouvement de M ; calculer la réaction en M à un instant quelconque.

6126. — On considère une tige OA qui tourne autour d'un axe vertical Oz avec une vitesse angulaire constante ω ; un point pesant se meut sur la tige, trouver son mouvement relatif.

6127. — Un champ a pour composantes $X = x$, $Y = y$, $Z = z$; exprimer que le point matériel soumis à l'action de ce champ est en équilibre sur la droite $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

6128. — Un triangle matériel ABC a un sommet fixe A, les deux autres sont attirés par un point fixe S, proportionnellement aux distances SB, SC, la force d'attraction à l'unité de distance étant la même pour les deux points. Position d'équilibre.

6129. — On donne une sphère et deux points extérieurs A et B ; un point M assujetti à rester sur la sphère est attiré par chacun des points A et B proportionnellement à la distance, le coefficient de proportionnalité étant λ pour le point A, μ pour le point B. Condition d'équilibre de M.

6130. — On considère une poulie infiniment petite O d'axe horizontal. Un fil inextensible, sans masse, AOB, de longueur a, passe sur cette poulie. En A et B sont attachées les extrémités d'une tige pesante AB, de masse m ; de plus, en A est attaché un poids P, en B un poids Q. Position d'équilibre du système.

6131. — Equilibre sans frottement d'un anneau M pouvant se déplacer sur une droite quelconque Δ et soumis à l'action de poids P et P′ par l'intermédiaire de fils et de deux poulies O et O′.

6132. — Equilibre d'une barre homogène qui a une extrémité fixe, l'autre étant supportée par un fil tendu au moyen d'un poids Q.

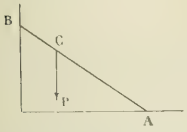
6133. — On considère une surface sphérique, dans l'intérieur de laquelle on place une barre. Etudier l'équilibre.

6134. — Equilibre d'un corps qui a un point d'appui sur un plan. Quelle condition doit-on ajouter s'il y a frottement ?

6135. — Equilibre d'un solide qui s'appuie sur les trois plans de coordonnées, en des points A, B, C, le solide étant soumis à un système de forces données

6136. — Equilibre sans frottement d'un solide soumis à des forces données et s'appuyant en un point A du plan des xy et en un point B de l'axe des z.

6137. — Un corps solide reposant sur trois axes de coordonnées rectangulaires est en équilibre. Ecrire les conditions d'équilibre.



6138. — Equilibre avec frottement d'une barre AB dont on néglige la masse et qui est soumise à un poids donné P, en un de ses points C.

6139. — Condition d'équilibre d'une poulie dans le cas où l'un des cordons est horizontal et l'autre vertical ; on suppose qu'il y a frottement. Composantes normale et tangentielle de la réaction.

6140. — Poulie fixe avec frottement, les cordons faisant entre eux l'angle α.

6141. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle, d'abord géométriquement puis par le calcul, en appelant (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des trois sommets.

6142. — Centre de gravité du périmètre d'un triangle. Qu'arriverait il si les poids de chaque côté étaient proportionnels aux hauteurs correspondantes ?

6143. — Centre de gravité d'un arc de cercle.

6144. — Centre de gravité de l'aire d'un trapèze homogène, de l'aire d'un quadrilatère homogène, d'un secteur circulaire.

6145. — Centre de gravité de la surface d'un prisme.

Géométrie et Géométrie descriptive (M. Malloizel).

Géométrie.

6146. — Figure inverse d'un cercle par rapport à un point ; déterminer le centre du cercle transformé. Figure inverse d'une sphère, d'un cercle dans l'espace.

6147. — On donne une hyperbole par ses foyers et ses sommets. Mener d'un point P des tangentes à cette hyperbole. Déterminer les points de contact.

6148. — Lieu des points équidistants d'une droite et d'un cercle.

6149. — Mener à une parabole une tangente parallèle à une droite donnée.

6150. — Mener d'un point les tangentes à une parabole définie par son foyer et sa directrice.

6151. — Intersection de deux coniques ayant un foyer commun F. Incidemment, lieu des points dont le rapport des distances à deux droites est égal à un rapport donné.

6152. — Une conique est connue par un axe, un sommet sur cet axe, et un point avec sa tangente. Déterminer le centre de la conique.

6153. — On donne l'axe d'une conique et un sommet sur cet axe, puis deux autres points. Trouver l'autre sommet sur l'axe et le centre ; déterminer l'autre axe et les deux sommets correspondants.

6154. — Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données.

6155. — On donne un quadrilatère gauche ABCD ; combien de surfaces du second degré passent par ses quatre côtés ? On se donne en outre un point extérieur M ; plan tangent en M à la surface définie par ce point et le quadrilatère gauche.

6156. — Surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites données; construire le plan tangent en un point de la surface ; déterminer le centre.

6157. — Une droite s'appuie sur trois droites A, B, C. Quelle surface engendre-t-elle ? Plans tangents passant par un point S ; trouver le point de contact de l'un de ces plans ; plan polaire de S par rapport à la surface.

6158. — On donne dans l'espace deux segments égaux AB et CD ; quelle opération faut-il faire pour amener AB en coïncidence avec CD ?

6159. — Un tétraèdre régulier a pour arête un segment AB et un sommet C dans un plan donné P ; déterminer le sommet C et construire le tétraèdre.

6160 — On donne deux plans quelconques et une droite. Mener par cette droite un plan coupant les deux plans donnés suivant deux droites rectangulaires.

6161. — Un triangle donné ABC est la base d'un tétraèdre SABC tel que $\frac{SA}{a} = \frac{SB}{b} = \frac{SC}{c}$. Déterminer le tétraèdre.

6162. — Mener par un point une droite tangente à deux sphères.

6163. — Mener une sphère passant par un point et tangente à trois plans.

6164. — Mener par un point un plan dont les distances AP, BQ et CR à trois points donnés A, B, C soient proportionnelles à des nombres donnés α, β, γ.

6165. — Etant donnés quatre points, trouver un plan tel que ses distances aux quatre points soient proportionnelles à des nombres donnés.

6166. — Faire passer un cône de révolution par trois droites concourantes en un point S.

6167. — On donne deux droites A, B et une droite CD s'appuyant sur A et B. Ce sont trois génératrices d'un hyperboloïde de révolution. Trouver son axe. Nombre de solutions.

6168. — Lieu des points équidistants d'un point A et d'un plan P. Lieu des points équidistants de deux points A et B et d'un plan P.

6169. — Lieu des points également éloignés d'un point et d'une droite de l'espace ; lieu des points également éloignés de deux points et d'une droite.

6170. — Lieu des points également éloignés d'un plan et d'une droite. Chercher les points du lieu dans un plan parallèle au plan donné.

Géométrie cotée.

6171. — Angle d'une droite et d'un plan donné par sa ligne de plus grande pente.

6172. — On donne une droite $a(3)$ $b(7)$. Déterminer le plan perpendiculaire à cette droite en son milieu.

6173. — On donne une droite graduée $a(1)$ $b(4)$ et un point $c(0)$. Abaisser de ce point la perpendiculaire sur la droite.

6174. — Distance d'un point à une droite : méthode, tracé de la perpendiculaire, vraie grandeur.

6175. — On donne trois points par leurs projections cotées. Trouver, dans le triangle ayant ces trois points pour sommets, le point d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle.

6176. — Construire un tétraèdre régulier dont on connaît l'arête : 1° la base étant dans un plan horizontal ; 2° la base étant dans un plan quelconque.

6177. — On donne un triangle ABC dans le plan horizontal ; c'est la base d'un tétraèdre ABCD où AD est perpendiculaire à BC ; on connaît le dièdre DA ; déterminer son arête et placer D, connaissant sa cote.

6178. — On donne un triangle ABC dans le plan horizontal. C'est la base d'un tétraèdre dont on donne les dièdres AB, BC, CA, AB étant obtus. Construire ce tétraèdre ; construire le centre de la sphère inscrite.

6179. — Construire un trièdre connaissant les trois faces.

6180. — Construire un trièdre connaissant deux faces a, b et le dièdre compris C.

6181. — Construire un trièdre connaissant deux dièdres et la face opposée à l'un d'eux. Discuter.

6182. — Construire un trièdre connaissant les trois dièdres.

6183. — Construire un tétraèdre connaissant la base abc dans le plan horizontal de projection, les deux dièdres en ac, ab et la longueur de l'arête sb.

6184. — On donne les six arêtes d'un tétraèdre ; déterminer un angle dièdre.

6185. — On donne deux droites ayant même pente. — Trouver un axe vertical qui permette de faire coïncider ces deux droites par rotation. On considère la surface engendrée par l'une des droites en tournant autour de cet axe ; on donne la projection d'un point, trouver sa cote et déterminer le plan tangent en ce point.

6186. — Mener par une droite Δ un plan tel que si on appelle AP et BQ la distance à ce plan de deux points A et B donnés, on ait $\frac{AP}{BQ} = k$, k désignant un rapport donné. — On donne deux points $a(3)$, $b(3)$ et une droite $c(0)$ $d(5)$. Exécuter l'épure du problème précédent dans le cas où $k = -\frac{3}{4}$. Définir le plan cherché par une ligne de pente.

6187. — On donne trois points $a(5)$, $b(2)$, $c(0)$. On fait passer par ces trois points une circonférence ; c'est la base d'un cône de sommet S(0). Contour apparent de ce cône.

6188. — On donne un plan par sa ligne de pente; dans ce plan est une courbe C dont on donne le rabattement c, autour d'une horizontale. Contour apparent du cylindre ayant c pour directrice, les génératrices étant parallèles à une direction donnée Δ.

6189. — On donne une sphère tangente au plan horizontal de projection. Courbe de contact du cône circonscrit à la sphère, de sommet S, à la cote 2R.

6190. — On donne trois points $a(3)$, $b(2)$, $c(1)$, centres de trois sphères ayant pour rayons respectifs 3, 2, 1 ; leur mener un plan tangent commun qui soit au-dessus de chacune d'elles.

6191. — On donne l'axe d'un cône de révolution d'angle au sommet α ; lui mener une normale d'un point H ; on prend l'axe horizontal.

6192. — On donne un cône de sommet S ayant pour base dans le plan horizontal une courbe quelconque présentant un point double a. On donne une droite P dans le plan horizontal. Section du cône par le plan qui a pour trace P et parallèlement à la génératrice sa du cône.

6193. — On donne un cône à base circulaire dans le plan horizontal de projection et de sommet S quelconque, puis un cylindre à base circulaire, également dans le plan de projection et de génératrices quelconques. Déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point.

6194. — On donne dans le plan horizontal de projection un cercle qui est la base d'un cône, de sommet S de cote donnée, et une ellipse qui est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une génératrice sa du cône. Intersection du cône et du cylindre.

6195. — On donne dans le plan horizontal de projection deux cercles égaux de centres a et b ; ce sont les bases de deux cylindres dont les axes sont ωa, ωb, ω étant un point quelconque de l'espace. Intersection des deux cylindres, point et tangente, plans limites ; nature de la section.

6196. — On donne un cercle de centre C dans le plan horizontal, et deux droites $c(0)$ $a(10)$ et $c(0)$ $b(10)$. Intersection des cylindres ayant le cercle pour base commune et leurs génératrices parallèles à ca, cb. Axes de l'ellipse, projection de la seconde courbe plane.

6197. — On donne un tétraèdre SABC dont la face ABC est dans le plan horizontal ; on considère le cylindre dont la base est le cercle inscrit dans le triangle ASB et dont les génératrices sont parallèles à SC. — Un cône a pour base dans le plan horizontal un cercle de centre C et son sommet se projette en B. Intersection du cône et du cylindre. Ligne des points doubles en projection.

6198. — On donne dans un plan horizontal une courbe et une droite. On considère : 1° la surface de révolution engendrée par la courbe en tournant autour de cette droite ; 2° le cylindre ayant cette courbe pour directrice et dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée. Intersection des deux surfaces.

Géométrie descriptive.

6199. — On donne une droite de profil $(ab, a'b')$. — Faire passer par cette droite un plan dont les traces fassent sur l'épure un angle donné.

6200. — On donne une droite D et un plan défini par trois points. Construire le symétrique de ce plan par rapport à la droite D.

6201. — On donne les projections de deux droites ; mener une perpendiculaire au second bissecteur s'appuyant sur ces deux droites.

6202. — On donne un plan défini par trois points (a, a'), (b, b'), (c, c') et une droite (Δ, Δ') ; mener par cette droite le plan perpendiculaire au plan $(abc, a'b'c')$.

6203. — On donne une droite $(ab, a'b')$ et deux points (c, c') (d, d'). Angle des deux demi-plans $(abc, a'b'c')$ et $(abd, a'b'd')$.

6204. — Angle d'un plan avec le second bissecteur.

6205. — Plans bissecteurs du dièdre formé par un plan PxQ' avec le plan horizontal de projection.

6206. — On donne la trace horizontale d'un plan. Trouver la trace verticale connaissant l'angle des deux traces. Figurer dans ce plan la droite, intersection avec le deuxième bissecteur.

6207. — On donne une droite et un plan défini par trois points. Trouver l'angle de la droite et du plan.

6208. — Construire la bissectrice de l'angle de deux droites dont l'une est horizontale et l'autre de front.

6209. — Mener par une droite rencontrant la ligne de terre un plan dont les traces admettent pour bissectrice la droite donnée.

6210. — On donne une droite de profil définie par deux points et une droite quelconque par ses deux projections. Perpendiculaire commune à ces deux droites.

6211. — On donne une droite du premier bissecteur et une autre droite dans le second. Perpendiculaire commune à ces deux droites.

6212. — On donne une droite (A, A') et sur cette droite un point (a, a') ; on donne la projection verticale B' d'une seconde droite et un point b' sur B' ; $(ab, a'b')$ est la perpendiculaire commune à ces deux droites. Déterminer la projection horizontale B de la seconde, sachant que la projection horizontale ab de la perpendiculaire commune est sur A.

6213. — On donne dans un plan horizontal un triangle et un quadrilatère. Ce sont les bases de deux pyramides qui ont pour sommets les points S et T de même cote, dans le plan vertical. Intersection de ces deux pyramides ; représenter l'ensemble des deux corps.

6214. — On donne trois droites A, B, C de l'espace ; faire tourner B autour de A de façon qu'elle vienne rencontrer C.

6215. — On prend une droite quelconque $(sa, s'a')$ et un plan défini par une horizontale et une frontale. Faire tourner ce plan autour de la droite jusqu'à ce qu'il devienne vertical.

6216. — On donne une droite de front et un plan quelconque. Faire tourner le plan autour de la droite jusqu'à ce qu'il vienne de bout.

6217. — On donne une droite quelconque et un plan. Faire tourner ce plan autour de la droite jusqu'à l'amener à être perpendiculaire au plan vertical.

6218. — On donne un plan par deux droites qui se coupent dont l'une (H, H') est horizontale ; sur l'autre droite (D, D') on prend deux points (aa', bb'). Construire dans le plan donné le carré de côté $(ab, a'b')$.

6219. — On donne une droite (D, D') et un point (a, a'). Tracer dans le plan ainsi défini le carré ayant (a, a') pour l'un de ses sommets et un côté sur la droite (D, D').

6220. — On donne dans un plan un segment de droite $(ab, a'b')$. Construire dans le plan un triangle équilatéral ayant pour côté $(ab, a'b')$, puis sur ce triangle comme base, construire un tétraèdre régulier.

6221. — On donne trois segments consécutifs $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(cd, c'd')$. Construire le parallélépipède ayant ces trois segments pour arêtes. Distinction des parties vues et cachées. Section par un plan mené perpendiculairement à une arête en son milieu.

6222. — Un plan est défini par deux droites ; on prend deux points C et D sur chacune de ces deux droites. Construire dans le plan un carré sur CD comme diagonale, puis construire le cube ayant ce carré pour base.

6223. — On donne un cube par son centre O et une arête indéfinie. Construire ce cube ; faire l'épure, l'arête donnée étant quelconque dans l'espace.

6224. — On donne trois points A, B, C. Les trois arêtes d'un cube qui aboutissent à un même sommet D passent par A, B et C. Connaissant la longueur l de l'arête du cube, le déterminer. Faire l'épure en prenant (aa', bb') de même cote, et (c, c') ayant même éloignement que (a, a').

6225. — On donne un segment vertical ab, $a'b'$. Un cube a pour diagonale ce segment et un de ses plans diagonaux est dans un plan vertical donné, passant par $(ab, a'b')$. Déterminer les deux projections du cube.

6226. — On donne une droite $(ab, a'b')$ et un point (c, c') sur la ligne de terre. Le plan $(abc, a'b'c')$ est un plan diagonal d'un cube et $(ab, a'b')$ est une diagonale. Construire la projection du cube.

6227. — Lieu des centres des cubes ayant pour arête un segment donné AB. Projections de ce lieu. Mener à l'ellipse, projection horizontale du lieu, des tangentes par un point donné.

6228. — Qu'est-ce qu'un octaèdre régulier ? On donne un segment $(ab, a'b')$ et un point (r, r'). Construire dans le plan $(abr, a'b'r')$ un carré de diagonale $(ab, a'b')$, puis construire un octaèdre sur ce carré.

6229. — On a un segment AB dans un plan P. Déterminer l'octaèdre régulier qui a AB comme côté et le plan P comme plan diagonal. Faire l'épure dans le cas où le plan P est donné par une horizontale et un point, le segment AB dans ce plan étant donné par sa projection horizontale ab.

6230. — Contours apparents d'un cône de révolution dont on connaît l'axe $(sa, s'a')$ et une génératrice $(sb, s'b')$.

6231. — On donne l'axe et le sommet d'un cône de révolution, ainsi que le demi-angle au sommet. Trouver les contours apparents de ce cône. Trouver les projections verticales des génératrices de contour apparent horizontal.

6232. — On donne un cercle dans le plan horizontal, base d'un cône de sommet (s, s') ; un autre cercle dans un plan vertical, base d'un cylindre ayant ses génératrices de front. Mener au cône des plans tangents parallèles à une droite de profil donnée par deux points, puis mener au cylindre un plan tangent perpendiculaire à l'un des plans précédents.

6233. — Plans tangents parallèles à deux cônes de révolution. Normales communes.

6234. — Normale commune à un cône et à un cylindre, le cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal et le cylindre un cercle dans le plan vertical.

6235. — On donne deux droites AA', BB'. Mener une horizontale s'appuyant sur ces deux droites et telle que le segment intercepté ait une longueur donnée.

6236. — On donne un segment *ab* dans le plan horizontal. Trouver un point d'une verticale (z, z') d'où l'on voit le segment *ab* sous un angle donné.

6237. — On donne deux points (a, a'), (b, b'). Par chacun d'eux passe une droite dont on a la projection verticale. Sachant que ces deux droites se rencontrent et sont orthogonales, trouver leurs projections horizontales.

6238. — On donne quatre points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), dont deux (a, a'), (b, b') ont même cote et les deux autres (c, c'), (d, d') même éloignement. Trouver le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre qui a ces points pour sommets.

6239. — On donne une sphère par ses projections et un plan PαQ'. Trouver le pôle du plan par rapport à la sphère

6240. — On donne une sphère et une direction de rayons lumineux. Trouver le point brillant de la projection horizontale

6241. — Plans tangents à une sphère par une droite.

6242. — Plans tangents communs à trois sphères. En construire un et déterminer ses points de contact avec chacune des trois sphères.

6243. — On donne trois points et une sphère. Déterminer un plan tangent à la sphère également éloigné de ces trois points.

6244. — Mener à deux sphères une tangente commune parallèle à une direction donnée.

6245. — On donne une droite (D, D'), mener par cette droite un plan faisant avec la ligne de terre un angle donné.

6246. — Mener par un point une droite faisant des angles donnés avec deux plans donnés.

6247. — On donne un plan de bout et un plan vertical. Mener par un point un plan faisant avec ces deux plans des angles donnés α et β.

6248. — Mener par un point une droite faisant avec le plan horizontal et avec un plan de profil deux angles donnés. Nombre des solutions.

6249. — On donne un point A et deux droites D et Δ ; mener par A une droite faisant un angle α avec la droite Δ et à une distance donnée *d* de la droite D. Faire l'épure en supposant D verticale.

6250. — On a un tore à axe vertical ; lui mener un plan tangent par un point quelconque aa', le point de contact étant sur un plan méridien donné.

6251. — On donne un cercle dans un plan de front ; il tourne autour d'une verticale de son plan. Mener par un point donné (a, a') un plan bitangent au tore ainsi déterminé.

6252. — On donne un tore à axe vertical. Plan tangent à ce tore parallèle à un plan donné par ses traces.

6253. — On donne un tore à axe vertical et une droite (Δ, Δ'). Courbe de contact du cylindre circonscrit au tore parallèlement à la droite donnée.

6254. — On donne un cercle d'un plan horizontal et une droite quelconque (A, A') ; on donne en outre un point quelconque (s, s'). Déterminer un point de la courbe de contact du cône de sommet (s, s'), circonscrit à la surface engendrée par le cercle en tournant autour de la droite (A, A') comme axe.

6255. — Intersection d'une droite et d'une sphère.

6256. — On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite (D, D'). Mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une hyperbole équilatère.

6257. — Mener par une droite de profil $(ab, a'b')$ un plan tangent à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

6258. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et une droite de profil $(ab, a'b')$. Intersection de la surface avec cette droite.

6259. — Mener par une droite quelconque (Δ, Δ') un plan tangent à un paraboloïde de révolution à axe vertical.

6260. — On donne deux circonférences égales dont les centres sont sur une même ligne de rappel. Ces deux circonférences sont les projections d'une courbe de l'espace. Que peut-on dire de cette courbe ? On fait tourner cette courbe autour d'une verticale : méridienne de la surface de révolution ainsi engendrée.

6261. — Trouver le centre d'un hyperboloïde de révolution engendré par une droite quelconque, tournant autour d'un axe quelconque. Déterminer le cône asymptote et le contour apparent.

6262. — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est déterminé par une génératrice quelconque et l'axe. On donne une droite quelconque Δ dans le plan horizontal : génératrices de l'hyperboloïde qui ont une projection horizontale parallèle à Δ.

6263. — On donne la projection verticale Δ' d'une droite ; trouver les génératrices d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, à axe vertical, dont les projections verticales sont parallèles à Δ'.

6264. — Un hyperboloïde est engendré par une droite quelconque tournant autour d'un axe vertical. Trouver sur la surface les génératrices perpendiculaires à la droite donnée.

6265. — On considère un axe vertical et une droite de front tournant autour de la verticale. Un point (m, m') de la droite de front est donné. On demande le lieu de la normale en (m, m') à la surface engendrée par la droite de front. Surface engendrée par cette normale quand son pied (m, m') décrit la génératrice de front.

6266. — On a une surface gauche de révolution définie par un axe vertical et une droite quelconque. Mener les plans angents parallèles à un plan défini par la ligne de terre et un point (a, a').

6267. — On donne un hyperboloïde de révolution autour d'un axe vertical, déterminé par une génératrice (D, D').

Lui mener un plan tangent parallèle à un plan donné PαQ'. Même problème pour un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal admettant pour génératrices la droite (D, D') et la verticale.

6268. — On donne un hyperboloïde défini par une droite quelconque tournant autour d'un axe vertical. Intersection avec une droite qui rencontre l'axe.

6269. — On donne une surface gauche de révolution définie par une droite et un axe vertical. Intersection de la surface avec une droite parallèle à la génératrice donnée.

6270. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, défini par deux génératrices de l'autre système. Trouver le sommet de ce paraboloïde.

6271. — On a un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices quelconques (A, A'), (B, B'). Trouver le plan polaire d'un point (s, s'), par rapport au paraboloïde.

6272. — On donne une verticale et deux droites quelconques. Construire un parallélépipède ayant ces trois droites pour arêtes. Construire le centre. Une droite s'appuyant sur les trois droites données engendre une surface. On donne la projection horizontale m d'un point de la surface; quelle est sa projection verticale ?

6273. — On donne deux droites quelconques ; une droite mobile s'appuie sur ces deux droites en restant parallèle à un plan de bout. On demande de trouver un point de la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface ainsi engendrée et dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée. Nature de la courbe de contact.

6274. — On donne un cône à base circulaire dans le plan horizontal et un point d'une génératrice de ce cône. Mener par ce point un plan perpendiculaire à la génératrice et déterminer la section du cône par ce plan. Trouver une tangente de front à la section.

6275. — On donne un cylindre oblique, à base circulaire dans le plan horizontal. Déterminer une section droite de ce cylindre. Sommets et axes de la section.

6276. — On donne un cylindre à génératrices quelconques dont la base est un cercle situé dans le plan vertical de projection ; on donne en outre un point (a, a'). On considère la section droite du cylindre dont le plan contient (a, a') ; mener à cette section les tangentes issues de (a, a').

6277. — On donne un cône de sommet (s, s'), dont la base est un cercle ayant pour centre un point (o, o') donné dans un plan PαQ', dont un diamètre horizontal est situé dans ce plan PαQ' et qui passe par un point (a, a') donné dans l'espace. Section de ce cône par le plan PαQ'.

6278. — On a un cylindre de révolution à génératrices verticales et un plan PQ' dont les traces sont en ligne droite. Par un point (a, a') de la ligne de terre, on abaisse la perpendiculaire sur le plan PQ' ; déduire de cette construction une propriété du plan donné. Intersection du cylindre et du plan PQ' ; point et tangente.

6279. — On donne une sphère et un plan défini par deux droites dont l'une passe par le centre de la sphère. Contours apparents du cylindre circonscrit à la sphère le long de la section de la sphère par ce plan.

6280. — On donne une sphère et un point ; déterminer le plan polaire de ce point par rapport à la sphère et l'intersection de ce plan avec la sphère.

6281. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un point quelconque (s, s'). Trouver la trace sur le plan horizontal du cône circonscrit à l'ellipsoïde, de sommet (s, s'). Nature de cette trace.

6282. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Intersection avec un plan quelconque. Trouver le grand axe de la section.

6283. — Un hyperboloïde de révolution est engendré par une droite de front tournant autour d'un axe vertical. Construire une génératrice du second système. On considère un plan parallèle à ces deux génératrices ; intersection de la surface par ce plan. Point et tangente, nature de la section.

6284. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical, défini par une génératrice de front (D, D'). — Section par un plan passant par la ligne de terre et le point (o, o') centre de l'hyperboloïde. Asymptotes de la section.

6285. — On donne un hyperboloïde de révolution engendré par une droite quelconque tournant autour d'un axe vertical. Déterminer le plan polaire d'un point par rapport à cette surface. Section de la surface par ce plan; trouver directement le centre de la section.

6286. — On donne un tore d'axe vertical ; (c, c') est le centre du cercle générateur dans le plan de front de l'axe. Intersection du tore avec le plan déterminé par la ligne de terre et le point (c, c').

6287. — On considère un tore d'axe vertical ; on donne la projection verticale m' d'un point ; combien y a-t-il de projections horizontales correspondantes ? On prend un point m sur le plus petit parallèle ; construire le plan tangent en (m, m') et déterminer l'intersection du tore par ce plan tangent. Construire un point de l'intersection et la tangente en ce point ; points principaux de l'intersection, symétrie, point double.

6288. — On donne une parabole quelconque dans un plan de front ; on la fait tourner autour de son axe. Contours apparents du paraboloïde de révolution ainsi déterminé. Trouver un plan de bout qui coupe ce paraboloïde suivant une ellipse se projetant horizontalement suivant un cercle.

6289. — Ombre portée sur les deux plans de projection, parallèlement à une direction donnée par un cercle situé dans un plan horizontal. Construire un point de la courbe d'ombre et la tangente en ce point. Intersection d'une droite du plan vertical avec le cylindre d'ombre.

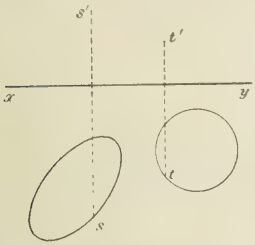
6290. — Un cylindre a pour base un cercle du plan horizontal. On le limite à un autre plan horizontal. Représenter ce cylindre. Parties vues et cachées. Déterminer l'ombre de ce cylindre sur les plans de projection, la lumière venant de la gauche et la direction des rayons lumineux faisant en projection un angle de 45° avec la ligne de terre.

6291. — Ombre au flambeau d'un hyperboloïde à axe vertical ; construire un point de l'ombre propre.

6292. — On donne deux cercles dans le plan horizontal ; sur une droite passant par le centre de similitude externe de ces deux cercles, on prend deux points S et T ; ce sont les sommets de deux cônes ayant pour bases les deux cercles ; trouver leur intersection.

6293. — On donne une hyperbole et un cercle dans le plan horizontal ; ce sont les bases de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles à deux directions données. Intersection de ces deux cylindres ; les deux directions données sont telles que le plan qui leur est parallèle soit parallèle à l'un des plans asymptotes du premier cylindre. Déterminer un point et la tangente en ce point ; points à l'infini ; plans limites.

6294. — On donne deux cônes : l'un a pour base dans le plan horizontal une ellipse et pour sommet (s, s') ; l'autre, un cercle, et pour sommet, (t, t'). Trouver un point de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point. Branches infinies et asymptotes.



6295. — On considère un cône et la figure symétrique de ce cône par rapport à un point. On demande l'intersection des deux corps. Faire l'épure quand on donne un cône à base circulaire dans le plan horizontal. Particularités de l'intersection.

6296. — On donne un cercle du plan horizontal, base d'un cône de sommet donné (s, s') ; on considère un cercle tangent aux deux génératrices de contour apparent vertical du cône ; c'est la base d'un cylindre de bout. Intersection des deux surfaces.

6297. — Intersection de deux cônes de révolution ayant leurs axes dans un même plan de front.

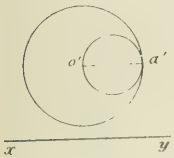
6298. — On donne une sphère et deux cônes circonscrits ayant leurs sommets dans le plan de front du centre. Intersection de ces deux cônes. Déduire de la figure en projection verticale, un théorème de géométrie plane.

6299. — Intersection d'un cône de révolution dont l'axe est de bout avec un cylindre de révolution à axe vertical.

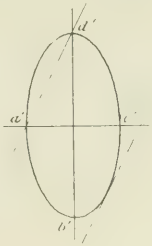
6300. — Intersection d'un cône circonscrit à une sphère (o, o') avec une sphère ayant pour centre le sommet (s, s') du cône. Plan de la section. Construction d'un point.

6301. — On donne une sphère de centre (o, o') et un cylindre de bout dont la trace verticale est le cercle de diamètre $o'a'$. Intersection du cylindre et de la sphère.

6302. — On donne un cône de révolution à axe vertical et un cylindre circulaire de bout, dont la base est un cercle du plan vertical de projection tangent au contour apparent vertical du cône. Intersection de ces deux surfaces. Développer la surface du cône entaillée par le cylindre.



6303. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical dont le contour apparent vertical est l'ellipse $a'b'c'd'$. Intersection avec le cylindre de révolution dont les deux génératrices de contour apparent vertical sont $a'd'$ et la tangente parallèle t' à l'ellipse $a'b'c'd'$.



6304. — On donne deux droites d'un plan de front et une droite parallèle à la ligne de terre. Cette droite tourne autour de chacune des deux droites précédentes. Intersection des deux surfaces engendrées.

6305. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical ; on considère la sphère inscrite le long d'un parallèle donné, puis le cylindre circonscrit à cette sphère, dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre. Intersection du cylindre et du paraboloïde.

6306. — On donne un tore d'axe vertical ; un cône de révolution, dont le sommet (s, s') est un point pris sur l'axe, est défini par deux génératrices méridiennes l'une verticale, l'autre parallèle à la ligne de terre. Intersection des deux surfaces.

6307. — On donne un tore à axe vertical ; on considère, dans le plan de front de l'axe, une droite tangente au cercle générateur du tore. C'est la génératrice d'un cylindre de révolution ayant pour axe une droite située dans ce même plan de front. Intersection des deux surfaces.

6308. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et une droite horizontale dans le plan de front de l'axe. Cette droite et l'axe définissent un cône de révolution dont elles forment le contour apparent vertical. Intersection du cône et de l'ellipsoïde.

6309. — On donne deux paraboloïdes de révolution d'axes verticaux ; intersection de ces deux paraboloïdes.

6310. — On donne un tore à axe vertical et un point (a, a') sur la parallèle à la ligne de terre menée par le centre du tore. (a, a') est le centre d'une sphère. Intersection du tore et de la sphère.

6311. — Intersection d'un tore à axe vertical avec une sphère bitangente passant par un point donné (a, a').

6312. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cylindre vertical circonscrit à une sphère inscrite au tore ; point et tangente ; nature de la section.

6313. — On donne une sphère de centre (o, o') et une droite (A, A'). Trouver les points de la sphère qui sont à une distance donnée r de la droite (A, A').

6314. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Un cône de sommet (s, s') a pour base le parallèle de contour apparent horizontal de l'ellipsoïde. Intersection des deux surfaces.

6315. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical (zz') déterminé par une génératrice (A, A'). Un cône a pour sommet un point (s, s') de la génératrice (A, A') ; sa base dans un plan de bout PQ' est une ellipse qui passe par la trace de la droite (A, A') sur le plan PQ'. Intersection du cône et de l'hyperboloïde.

6316. — On donne un hyperboloïde de révolution autour d'un axe vertical, défini par une droite quelconque (A, A'). — Sur cette génératrice, on prend un point quelconque (s, s') ; les deux génératrices passant par (s, s') rencontrent le cercle de

gorge en deux points α et β. Par ces points α et β, dans le plan du cercle de gorge, on trace une ellipse. Intersection de l'hyperboloïde avec le cône qui a (s, s') pour sommet et l'ellipse pour base.

6317. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe d'axe vertical ; on donne une ellipse tangente au cercle de gorge, dans son plan, et dont le petit axe coïncide avec le diamètre de bout du cercle de gorge. Cette ellipse est la base d'un cylindre dont les génératrices sont de front. — On demande l'intersection des deux surfaces.

6318. — On donne un ellipsoïde d'axe vertical et un cylindre à base elliptique dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces. Trouver un point quelconque et la tangente en ce point. Points particuliers.

6319. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical avec un cylindre hyperbolique ayant sa base dans le plan horizontal et de génératrices quelconques.

6320. — Etant donnée une droite de front, on la fait tourner autour de deux axes verticaux ; trouver l'intersection des deux hyperboloïdes ainsi engendrés.

6321. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et une direction (Δ, Δ'). Un cylindre a pour base l'ellipse de contour apparent vertical de l'ellipsoïde et ses génératrices parallèles à (Δ, Δ'). Intersection des deux surfaces.

6322. — On donne deux sphères dont les centres ont même cote ; elles sont opaques ainsi que les deux plans de projection. Trouver les ombres propres et portées, les rayons lumineux étant parallèles à une direction de front.

6323. — On donne une sphère et un cylindre droit à base circulaire dans le plan horizontal, le cylindre étant près de la sphère, extérieur et à droite. Trouver les ombres de l'ensemble, les rayons lumineux étant parallèles à une direction donnée, venant de gauche.

6324. — Ombre d'un paraboloïde de révolution, parallèlement à une direction donnée, sur les deux plans de projection.

6325. — Ombres propre et portée d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical sur les deux plans de projection, le point lumineux étant pris dans le plan de front de l'axe.

6326. — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical. Dans le plan vertical de projection se trouve un cercle de centre O quelconque ; c'est la base d'un cône de sommet (s, s'). Intersection des deux surfaces.

6327. — Un paraboloïde à plan directeur horizontal est défini par deux génératrices rectilignes dont l'une est verticale ; un second paraboloïde est défini de la même manière. Déterminer leur intersection.

6328. — On donne une hyperbole dans le plan horizontal. C'est la base d'un cylindre dont les génératrices ont une direction donnée. On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, défini par deux génératrices quelconques. Intersection des deux surfaces. Détermination d'un point et de la tangente en ce point ; y a-t-il des points à l'infini, comment les trouve-t-on, et comment construit-on les asymptotes ?

6329. — On donne deux droites dont l'une est verticale. Par le pied de cette verticale, on trace dans le plan horizontal une ellipse, base d'un cylindre à génératrices verticales. Intersection de ce cylindre avec le paraboloïde défini par les deux droites données et le plan horizontal comme plan directeur.

6330. — On donne une verticale et une droite quelconque (Δ, Δ'). On considère un plan horizontal passant par un point (a, a') de (Δ, Δ') et dans ce plan une ellipse passant également par (a, a'). C'est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à (Δ, Δ'). Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal a pour génératrices la verticale et la droite (Δ, Δ'). On demande l'intersection du cylindre et du paraboloïde ; point et tangente en ce point.

6331. — Dessiner une surface topographique avec un col ; lignes de pente ; comment les trace-t-on sur une épure ?

6332. — On donne dans un plan horizontal H quatre points A, B, C, D formant un carré, et on donne dans le tableau trois points a, b, c qui sont les perspectives de A, B, C. Trouver la perspective du quatrième point D.

QUESTIONS PROPOSÉES

2126. — On donne un cercle ayant pour centre le point O et un point A de ce cercle. On considère deux rayons variables et rectangulaires, OM et ON. Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en M avec la droite AN.

Construire ce lieu et évaluer l'aire limitée par la courbe, le diamètre OA et la tangente au cercle au point diamétralement opposé à A.

R. Manen, à Albi.

2127. — La tangente en un point M quelconque d'une ellipse rencontre le diamètre passant par le centre C de courbure en M, au point P. Lieu de ce point P. Son degré. Construire la courbe.

E.-N. Barisien.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet.

Le Rédacteur-Gérant : R. Vuibert.

23e Année. Mars 1913. N° 6.

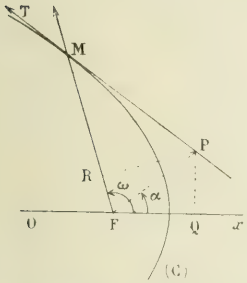
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

TRANSFORMATION D'UNE PROPRIÉTÉ TANGENTIELLE EN PROPRIÉTÉ MÉTRIQUE

par M. **R. Dontot**, élève à l'École normale supérieure.

Considérons une conique (C) de foyer F et d'axe Ox : son équation en coordonnées polaires, le pôle étant au foyer et l'axe polaire étant Ox, est



$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 + e\cos\omega}{p}.$$

Soient M un point (ρ, ω) de la conique, P un point (r, α) de la tangente en M : on sait que l'équation en coordonnées polaires de la tangente est

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\cos(\alpha - \omega) + \left(\frac{1}{\rho}\right)' \sin(\alpha - \omega).$$

Remplaçons $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) ; il vient

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos(\alpha - \omega)}{p} + \frac{e\cos\alpha}{p},$$

puis, enfin,

$$p = r\cos(\alpha - \omega) + er\cos\alpha.$$

Cette égalité s'interprète géométriquement d'une façon très simple : les sens positifs sur l'axe et sur le rayon vecteur étant ceux qui vont de F vers le sommet le plus voisin ou vers M, on a

$$p = \overline{FR} + e\overline{FQ}.$$

Elle suffit évidemment à exprimer que le point P se trouve sur la tangente en M à la conique.

On voit donc qu'*il existe une même relation linéaire entre les projections sur le grand axe d'une conique et sur le rayon vecteur joignant le foyer* F *au point* M *variable de la courbe, du segment joignant* F *à un point quelconque de la tangente en* M.

La réciproque est vraie : étant donnés un point F et une droite Δ, les seules courbes telles qu'il existe entre les projections sur Δ et sur FM (M étant un point variable) du segment joignant F a un point quelconque de la tangente en M sont des coniques de foyer F et dont le grand axe est parallèle à Δ.

Cette propriété si simple permet la résolution élégante d'une grande quantité de problèmes ; nous citerons seulement comme exemples les deux suivants :

I. *Construire une conique connaissant le foyer* F, *l'axe passant par ce foyer, un point et une tangente ne passant pas par ce point.*

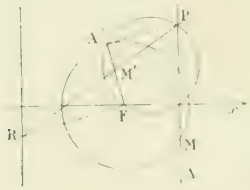
Nous transformerons d'abord la propriété précédente en remarquant que si $\overline{FQ}$ garde une valeur constante a, le point R décrit un cercle de rayon $(p - ea)$. Donc

La projection du point P *d'intersection d'une droite* Δ *perpendiculaire au grand axe d'une conique*

et de la tangente en M *à la courbe, sur le rayon vecteur joignant un foyer à ce point, décrit un cercle ayant pour centre ce foyer.*

Il est évident que ce cercle passe par les points où la droite Δ coupe la conique.

Le problème proposé est dès maintenant résolu : menons par le point donné M la perpendiculaire Δ sur l'axe ; elle coupe la tangente donnée en un point P. La projection du point P sur le rayon vecteur joignant le foyer F au point de contact inconnu de la tangente se trouve sur le cercle de centre F, de rayon FM, et sur le cercle de diamètre FP. Soit A un point d'intersection de ces deux cercles ; FA coupe la tangente donnée en M′ qui est le point où elle touche la conique cherchée. On est dès lors ramené à un problème connu : on élève en F la perpendiculaire sur FA, qui coupe en R la tangente donnée ; le point R est un point de la directrice.



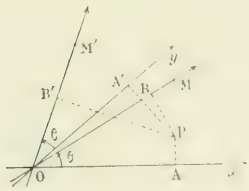
Le problème proposé a donc deux solutions.

II. *Deux coniques ont même foyer* O. *On mène les tangentes* MT, M′T′ *aux points* M *et* M′ *de ces deux coniques,* M *étant situé sur la première,* M′ *sur la seconde, et choisis en sorte que l'angle* MOM′ *demeure constant et égal à l'angle des axes. Trouver le lieu du point d'intersection* P *de ces deux tangentes.*

Choisissons, pour axes de coordonnées, les axes Ox, Oy, des deux coniques ; traçons les droites $OM(\widehat{Ox, OM} = \theta)$, $OM'(\widehat{Oy, OM'} = \theta)$, et soit $P(x, y)$ un point du lieu. Abaissons les perpendiculaires PA, PB, PA′, PB′ sur Ox, OM, Oy, OM′.

Le point P appartenant à la tangente en M, $\qquad p = \overline{OB} + e\overline{OA}$

et de même $\qquad p' = \overline{OB'} + e'\overline{OA}$.



Le théorème des projections donne, α étant l'angle des axes,

$$\overline{OA} = x + y\cos\alpha, \qquad \overline{AP} = y\sin\alpha, \qquad \overline{AP} = -x\sin\alpha.$$

$$\overline{OB} = \overline{OA}\cos\alpha + \overline{AP}\sin\alpha = (x + y\cos\alpha)\cos\theta + y\sin\alpha\sin\theta.$$

$$p = (x + y\cos\alpha)\cos\theta + e) + y\sin\alpha\sin\theta,$$

$$p' = (y + x\cos\alpha)(\cos\theta + e' - y\sin\alpha\sin\theta.$$

L'élimination de $\cos\theta$, $\sin\theta$, entre ces deux équations et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donnera la courbe lieu du point (x, y). Les deux équations sont de la forme

$$A = B\cos\theta + C\sin\theta,$$

$$A' = B'\cos\theta + C'\sin\theta.$$

$$\frac{\cos\theta}{AC' - CA'} = \frac{\sin\theta}{BA' - AB'} = \frac{1}{BC' - CB'}.$$

Le résultat de l'élimination sera

$$(AC' - CA')^2 + (BA' - AB')^2 = (BC' - CB')^2.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté; on trouve en définitive

$$[p - e(y + y\cos\alpha)]^2 + [p' - e'(y + x\cos\alpha)]^2 - 2(p - e(x + y\cos\alpha))(p' - e'(y + x\cos\alpha))\cos\alpha$$
$$= \sin^2\alpha(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha),$$

ce qui est l'équation d'une conique.

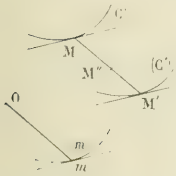
NOTE SUR LES TRAJECTOIRES SOUS UN ANGLE CONSTANT DE DROITES OU DE CERCLES

par M. **J. Mourret**, élève de l'École normale supérieure.

Je me propose d'établir géométriquement les résultats obtenus par mon camarade Dontot (N° 4).

Le théorème II est bien connu ; on sait plus généralement que :

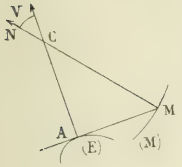
α) Etant données deux courbes C, C′, si on joint deux points M, M′ où les tangentes sont parallèles, la tangente à la courbe lieu du point M tel que $\frac{MM'}{M'M} = C^{\circ}$ est parallèle à la direction commune des tangentes en M, M′;



β) Si, à partir d'un point fixe O on porte le segment O*m* équipollent à MM′, la tangente en *m* au lieu (*m*) de *m* est parallèle aux tangentes en M et M′.

Théorème III. — Considérons le déplacement de l'angle constant V. Le centre instantané sera à l'intersection de la normale AC à l'enveloppe (E) du côté AM et de la normale CM à la trajectoire (M) sous l'angle V, lieu de M. Le centre de courbure en M à (M), point où MN touche son enveloppe, est la projection de C sur MN. Il coïncide avec C. — D'où les théorèmes III, IV, V.

Cercles. — Considérons les trajectoires sous l'angle V d'une famille de cercles. Transformons par inversion en prenant comme pôle un point d'intersection de deux cercles infiniment voisins. Les rapports anharmoniques sur les cercles deviendront des rapports anharmoniques sur deux droites coupées par quatre trajectoires sous l'angle V. D'après ce qu'on a vu, ces deux rapports sont égaux ; il en sera de même des rapports sur le cercle.

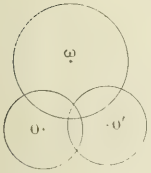


Théorème. — *Les centres de courbure des trajectoires orthogonales de tous les points d'un cercle sont sur une droite* Δ.

Le cercle de courbure, ayant trois points confondus avec la courbe, peut être regardé comme orthogonal à deux positions infiniment voisines du cercle et on sait que les cercles orthogonaux à deux cercles donnés ont leurs centres sur l'axe radical des deux cercles.

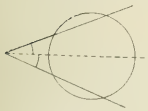
Pour le théorème suivant on a de même à chercher le lieu des centres des cercles qui coupent deux cercles égaux sous un angle V.

Le lieu des points ω est donc l'axe radical de ces deux cercles.



Théorème. — On aura le théorème suivant en cherchant le lieu des centres des cercles passant par un point M et coupant sous le même angle deux cercles infiniment voisins. Transformons les deux cercles en droites. Ces cercles transformés auront leurs centres sur la bissectrice de leur angle, c'est-à-dire sont orthogonaux à une droite. Les cercles cherchés, étant alors orthogonaux à un cercle et passant par un point fixe, ont leurs centres sur l'axe radical du cercle et du point.

Théorème. — Les centres de courbure des trajectoires sous l'angle V de cercles variables en tous les points de l'un d'eux sont sur une conique.



Nous avons à trouver le lieu des centres des cercles coupant deux cercles (infiniment voisins) sous un angle donné.

Transformons ces deux cercles en cercles concentriques. Les cercles cherchés se transforment en cercles ayant pour enveloppes deux cercles concentriques aux précédents ; ils sont donc tangents à deux cercles et leurs centres sont sur une conique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1912.

Algèbre et Trigonométrie.

I. — **2035**. *On donne l'équation différentielle*

$$\sin 2x \frac{dy}{dx} = (3 + 2\cos x - 2\sin x + \cos 2x)\, y + a \sin x + b \cos x + 6.$$

1° *Procéder à la recherche des intégrales de cette équation.*

Déterminer les valeurs que doivent prendre les constantes a et b pour que toutes les fonctions y de la variable x qui vérifient cette équation soient des fonctions rationnelles de $\sin x$ *et de* $\cos x$.

Dans ce cas seulement, achever la recherche de l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

2° *Les fonctions y comprises dans la formule trouvée peuvent être représentées par des courbes* K. *Combien passe-t-il de ces courbes par un point quelconque du plan ?*

Points exceptionnels. Montrer que certains de ces points jouissent de la propriété suivante : Les courbes K *qui passent en un tel point ont, pour ce point, le même centre de courbure.*

II. — **2036**. *Étudier la variation de la fonction* $y = \dfrac{\sin x(1 - \cos x)}{1 + \sin x}$ *et la représenter par une courbe.*

On déterminera les constantes A, B, C *de manière que* $y = \dfrac{A}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2} + \dfrac{B}{x - \frac{3\pi}{2}} + C$ *tende vers zéro lorsque x tend vers* $\dfrac{3\pi}{2}$.

On calculera, avec des erreurs inférieures à 0,1, *le maximum de y et la valeur correspondante de x comprise entre* 0 *et* 2π.

N. B. — Les candidats sont autorisés à se servir de la règle à calcul dans toutes les compositions.

I. — **2035**. 1. Intégrons d'abord l'équation sans second membre qui peut s'écrire, après séparation des variables.

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{3}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) dx.$$

L'intégration est alors immédiate :

$$L\left|y\right| = \frac{3}{2} L\left|\operatorname{tg} x\right| + L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + L\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{2} L\left|\sin 2x\right| + L\left|C_1\right|;$$

d'où

$$y = C_1 \operatorname{tg}\frac{x}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sqrt{\left|\operatorname{tg}^3 x \sin 2x\right|},$$

ou, par des transformations immédiates et en remplaçant $C_1\sqrt{2}$ par C,

$$y = C \operatorname{tg}\frac{x}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

En fonction de $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, y s'écrit

$$y = 4C \frac{t}{(1 - t)^2 (1 + t^2)}.$$

Cette fonction est d'ailleurs rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$ puisque $t = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$. Son expres-

sion en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$ est donc aisée à obtenir, soit par cette remarque, soit en remplaçant, dans la dernière expression de y, t par $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$:

$$y = C\,\frac{\sin x(1-\cos x)}{1+\sin x}.$$

Pour continuer l'intégration de l'équation avec second membre, nous ferons le changement de variable

$$y = z\,\frac{t^3}{(1+t)^2(1+t^2)},$$

qui, on le sait, fait disparaître le terme en z.

Nous allons employer la variable t. Posons

$$f(t) = \frac{t^3}{(1+t)^2(1+t^2)}.$$

On a

$$y = z.f(t).$$

D'où

$$y'_t = y'_t.t'_t = t'_t(z'_t f(t) + z f'(t)),$$

ou, détaillant les parties utiles,

$$y'_t = z'_t\,\frac{1+t^2}{2}\,\frac{t^3}{(1+t)^2(1+t^2)} + z\,t'_t\,f'(t).$$

Portons dans l'équation différentielle ; supprimons les termes en z ; nous aurons

$$\sin 2x.\ \frac{1+t^2}{2}\,\frac{t^3}{(1+t)^2(1+t^2)}\,z'_t = a\sin x + b\cos x + 6.$$

ou, en fonction de t,

$$\frac{2t^4(1-t^2)}{(1+t)^2(1+t^2)^2}\,z'_t = \frac{2at + b(1-t^2) + 6(1+t^2)}{1+t^2},$$

ou, définitivement,

$$2z'_t = \frac{(1+t)(1+t^2)[6+b+2at+(6-b)t^2]}{t^4(1-t)}.$$

Décomposons le second membre en éléments simples. La partie entière, les éléments de la forme $\dfrac{A}{t^4}$, $\dfrac{B}{t^3}$, $\dfrac{C}{t^2}$ donneront, intégrés, des fonctions rationnelles en t et par suite en $\sin x$ et $\cos x$. Seuls, les éléments de la forme $\dfrac{E}{t}$, $\dfrac{F}{1-t}$, donneront, intégrés, des fonctions transcendantes. Les constantes a et b se détermineront donc par l'annulation de E et de F.

Le calcul de F est immédiat ; ce nombre est égal à $8(6+a)$. Donc $a = -6$.

Pour calculer E, nous diviserons le numérateur de $2z'_t$, ordonné suivant les puissances croissantes de t, par $1-t$ et nous annulerons le coefficient de t^3 dans le quotient. Ce calcul revient presque uniquement à ordonner le numérateur de $2z'_t$. Il donne pour E la valeur $36+6a+b$. Par suite $b = 0$.

Avec ces valeurs pour a et b, l'expression de z'_t se simplifie. $1-t$ est en facteur dans les deux termes et il reste

$$z'_t = \frac{3(1-t^4)}{t^4} = \frac{3}{t^4} - 3.$$

Donc

$$z = -\frac{1}{t^3} - 3t + \lambda$$

et par suite,

(1)
$$y = -\frac{1+3t^4}{(1+t)^2(1+t^2)} + \lambda\,\frac{t^3}{(1+t)^2(1+t^2)}.$$

Une remarque intéressante est que le polynome $-1-3t^2-2t$ admet, pour $\lambda=-4$, -1 pour racine double. La fonction $-\dfrac{3t^2-2t+1}{1+t^2}$ est donc une intégrale particulière.

Si, dans la forme (1) de l'intégrale, on remplace t par $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ et si on effectue quelques calculs faciles, on a l'expression de y rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$

$$(2)\qquad y=\frac{1-\cos^2 x-\cos x}{1+\sin x}+\frac{\lambda}{4}\,\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{1+\sin x}.$$

Remarquons encore que l'intégrale particulière $-\dfrac{3t^2-2t+1}{1+t^2}$ s'écrit, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$, $\cos x+\sin x-2$ et il est aisé de vérifier que cette fonction est bien une intégrale de l'équation proposée.

2. Prenons la forme (2) de l'intégrale qui s'écrit encore

$$y(1+\sin x)+(1-\cos x-\cos^2 x)+\mu\sin x\,(1-\cos x)=0.$$

Par un point quelconque du plan, il passe en général une seule courbe intégrale.

Les points exceptionnels sont ceux pour lesquels μ est indéterminé. Pour ces points, x est multiple de π.

Si $x=2K\pi$, $y=-1$.

Si $x=(2K+1)\pi$, $y=-3$.

Donc, il y a deux séries de points exceptionnels.

Différentions deux fois l'identité précédente ; nous aurons

$$y'_x(1+\sin x)+y\cos x+\sin x-2\sin x\cos x+\mu(\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x)=0,$$

$$y''_{x^2}(1+\sin x)+2y'_x\cos x-y\sin x-\cos x+2\sin^2 x-\cos^2 x+\mu(-\sin x+4\sin x\cos x)=0.$$

Pour les points de la première série, on a visiblement $x=2K\pi$, $y=-1$, $y'_x=1$, $y''_{x^2}=-1$, ce qui démontre que la tangente et le centre de courbure sont les mêmes pour toutes les courbes intégrales passant par ces points.

Au contraire, pour les points de la seconde série, y'_x dépend de μ, et les tangentes aux courbes intégrales passant par ces points varient.

En résumé, la vraie raison de ces propriétés est que $x=2K\pi$ est racine triple du coefficient de $\frac{\lambda}{4}$ dans l'intégrale mise sous la forme (2) ; au contraire, $x=(2K+1)\pi$ est une racine simple.

D'ailleurs, au lieu de la variable x, on pourrait prendre la variable t. Les points exceptionnels correspondent aux valeurs nulle et infinie du paramètre et la différence entre les deux sortes de points exceptionnels apparaitrait nettement aussi de cette façon.

Bonnes solutions : MM. A. Courtier, à Sedan ; G. Lacot, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; R. Trévenin, lycée de Reims.

II. — **2036.** Soit la fonction

$$y=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{1+\sin x}.$$

Nous ne nous servirons pas, pour le calcul de la dérivée de cette fonction, de ce qu'elle a été rencontrée dans le problème précédent.

Nous ferons ce calcul directement. Voici le résultat :

$$y'_x = \frac{1 - \cos x}{(1 + \sin x)^2}\,1 + \sin x + 2\cos x + \sin x \cos x\,.$$

La fonction proposée est périodique, de période 2π. Il suffira de l'étudier dans l'intervalle $0,\ 2\pi$. Elle est infinie pour $x = \frac{3\pi}{2}$.

Cherchons le signe de la dérivée. C'est celui de

$$z = 1 + \sin x + 2\cos x - \sin x \cos x.$$

En fonction de $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, on a

$$z = 1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{-t^3+2t^2+4t+3}{(1+t^2)^2}.$$

ou, encore,

$$z = \frac{-(t+1)(t^3-t-3)}{(1+t^2)^2}.$$

On remarquera que y'_x change de signe avec $t+1$ sans s'annuler pour $t = -1$, car au dénominateur de y'_x le facteur $(1+\sin x)^2$ introduit $(t+1)^4$.

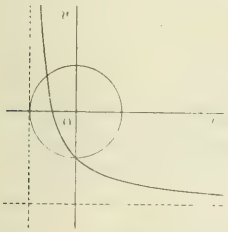
L'équation $t^3 - t^2 - t - 3 = 0$ a une seule racine réelle ; on le voit en remarquant que la dérivée de l'équation en $\theta = \frac{1}{t}$ a ses racines imaginaires. Cette unique racine réelle est comprise entre 2 et 3. Donc la valeur correspondante de x est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

Pour l'évaluer à $\frac{1}{10}$ près, il suffit de faire des substitutions dans

$$z = 1 + \sin x - 2\cos x - \sin x \cos x.$$

En passant, il est intéressant de faire la remarque que l'équation $z = 0$ peut se résoudre en posant $u = \cos x$, $v = \sin x$ et en cherchant les points communs aux deux courbes

$$uv + 2u + v - 1 = 0, \qquad u^2 + v^2 = 1.$$



Ce procédé confirme les résultats précédemment obtenus. Il n'y a qu'à lire la figure. Revenons à la détermination de la racine de x autre que $\frac{3\pi}{2}$. $\frac{3\pi}{4}$ substitué dans z donne comme résultat $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{\pi}{2}$ donnait 2. Vraisemblablement la racine est assez voisine de $\frac{3\pi}{4}$; elle est un peu inférieure.

Faisons des substitutions avec la table

x	$\log \sin x$	$\log -(\cos x)$	$\log -(\sin 2x)$	$\sin x$	$2\cos x$	$\frac{\sin 2x}{2}$	z
145^{gr}	$\bar{1},88105$	$\bar{1},81254$	$\bar{1},99462$	0,76042	$-1,29888$	$-0,49384$	$-0,03230$
144^{gr}	$\bar{1},88678$	$\bar{1},80443$	$\bar{1},99224$	0,77052	$-1,27486$	$-0,49115$	$+0,00451$
$144^{gr}20^{c}$	$\bar{1},88565$	$\bar{1},80607$	$\bar{1},99275$	0,76852	$-1,27968$	$-0,49172$	$-0,00288$

Ces substitutions indiquent nettement que la racine exprimée en grades est comprise entre 144 et 144,2.

Le nombre cherché, valeur de x pour laquelle y est maximum, est donc compris entre

$$\frac{144\pi}{200} \quad \text{et} \quad \frac{144{,}2\pi}{200}.$$

Nous n'insisterons pas sur le détail du calcul qui montre que cette limite inférieure et cette limite supérieure du nombre cherché permettent d'affirmer que sa valeur à $\frac{1}{100}$ près par défaut est 2,26.

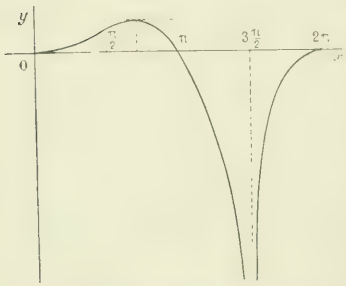
Relativement à la valeur du maximum, nous ne pensons pas qu'on ait demandé son calcul mathématiquement fait à 0,1 près par défaut mais, plus simplement, le résultat obtenu dans y quand on y substitue la valeur approchée trouvée pour x, ce calcul donnant d'ailleurs très probablement l'approximation cherchée.

Il suffit de prendre, dans le tableau de valeurs numériques fait plus haut, des valeurs approchées convenablement choisies de $\sin x$ et de $\cos x$; on obtient ainsi pour y la valeur approchée 0,7.

Traçons maintenant la courbe, après avoir indiqué dans un tableau les particularités de la fonction.

x	0		2,26...		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'	0	+	0	—	— 2	—	|	+	0
y	0	cr.	0,7... (max.)	déc.	0	déc.	$+\infty$	croît	0

Enfin, il nous reste à déterminer les constantes A, B, C. Posons $x = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon$: nous aurons



$$y = \frac{-\cos\varepsilon(1 - \sin\varepsilon)}{1 - \cos\varepsilon};$$

$\cos\varepsilon$, $1 - \sin\varepsilon$, $1 - \cos\varepsilon$ sont développables en série :

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} \cdots,$$

$$1 - \sin\varepsilon = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} \cdots$$

$$1 - \cos\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{24} + \frac{\varepsilon^6}{6!} \cdots$$

Nous pouvons donc affirmer que $\frac{\varepsilon^2 y}{2}$ est une fonction de ε qui possède un développement limité. Ce développement limité est unique et pourra s'obtenir, par exemple, par multiplication et par division, comme si les développements précédents étaient des polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de ε.

Nous aurons donc

$$\frac{\varepsilon^2 y}{2} = -\frac{\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} \cdots\right)\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} \cdots\right)}{1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon^4}{360} \cdots} = -\frac{1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{2}{3}\varepsilon^3 \cdots}{1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + \frac{\varepsilon^4}{360} \cdots}$$

$$= -\left(1 - \varepsilon - \frac{5\varepsilon^2}{12} + \frac{7}{12} \cdots\right).$$

D'où $y = -\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6}$, développement unique qui répond à la question et qui donne $A = -2$, $B = 2$, $C = \frac{5}{6}$.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en Weppes.

Géométrie analytique.

2037. — 1° *Trouver l'équation de la surface réglée* S *qui admet les trois directrices :*

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = x\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 + y = 0\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 - y^2 - y = 0. \end{cases}$$

2° *Montrer que* S *est coupée par la surface* S′ *qui a pour équation*

$$z^2 - x^2 + y = 0$$

suivant la même courbe C *que la surface qui a pour équation*

$$x^2 + y^2 - z^2 - zx - y = 0.$$

Exprimer en fonction du paramètre $t = \dfrac{x}{y}$ *les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe* C.

3° *Trouver toutes les quadriques* Q *ne passant pas par l'origine, ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées et tangentes à la courbe* C *en quatre points.*

1. Les deux coniques données sont situées : l'une, dans le plan des yz et tangente à l'axe des z au point O; l'autre, dans le plan des xy et tangente à l'axe des x au point O. La première est un cercle; la seconde, une hyperbole équilatère ; mais ces remarques n'ont aucun intérêt pour les questions que nous avons à résoudre.

Toute quadrique passant par ces deux coniques aura, pour plan tangent au point O, le plan des zx. La droite donnée est une tangente à ces quadriques ; si donc on détermine une quadrique du faisceau qui contienne un autre point de la droite, par exemple le point $(2,\ 0,\ 1+\sqrt{5})$, elle contiendra la droite tout entière. Or il est visible que la quadrique

$$x^2 - y^2 - z^2 - y = 0$$

passe par les deux coniques ; la quadrique impropre $xz = 0$ y passe aussi ; le faisceau indiqué a donc pour équation

$$x^2 - y^2 - z^2 - y + 2\lambda xz = 0.$$

En exprimant qu'elle passe au point $(2,\ 0,\ 1+\sqrt{5})$, nous avons $\lambda = \dfrac{1}{2}$, et la quadrique

$$x^2 - y^2 - z^2 + xz - y = 0$$

renferme les trois directrices.

Lorsqu'une droite glisse sur ces trois directrices, elle rencontre la quadrique en trois points; elle engendre donc cette quadrique.

2. La surface S′, qui a pour équation

$$z^2 - x^2 + y = 0,$$

coupe cette surface suivant la même biquadratique que le cône

$$xz - y^2 = 0.$$

Elle coupe aussi la surface

$$x^2 + y^2 - z^2 - zx - y = 0$$

sur le même cône, c'est-à-dire suivant la même courbe C.

Posons $t = \dfrac{x}{y}$; nous aurons aussi $t = \dfrac{y}{z}$, et, par suite, $x = ty$, $z = \dfrac{y}{t}$; portons ces valeurs dans l'équation de S′ ; nous aurons

$$\frac{y^2}{t^2} - t^2y^2 + y = 0, \qquad y = \frac{t^2}{t^4 - 1}\,;$$

puis

$$x = \frac{t^3}{t^4 - 1}, \qquad z = \frac{t}{t^4 - 1}.$$

La courbe C est donc unicursale et nous avons ses équations paramétriques.

3. Une quadrique Q, ne passant pas par l'origine et ayant ses axes parallèles aux axes de coordonnées a pour équation $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dx - 2Ey - 2Fz + 1 = 0.$$

Elle coupe la courbe C en huit points donnés par l'équation

$$At^6 + Bt^6 + Ct^6 - 2(Dt^5 + Et^5 + Ft)(1 - t^6) + (1 - t^6)^2 = 0.$$

Comme ces points sont confondus deux à deux, le polynome précédent est un carré parfait : c'est le carré de $$(t^3 + \alpha t^2 + \beta t^2 + \gamma t \pm 1).$$

Identifions les deux polynomes, nous aurons

$$D = -\alpha, \qquad A - 2E = 2\beta + \alpha^2, \qquad -2F = 2\gamma + 2\alpha\beta, \qquad B - 2 = \pm 2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma,$$
$$2D = \pm 2\alpha + 2\beta\gamma, \qquad C + 2E = \gamma^2 + 2\beta, \qquad 2F = \pm 2\gamma.$$

Prenons d'abord la solution qui correspond au signe $-$; elle nous donne $F = -\gamma$ et $\alpha\beta = 0$; puis $D = -\alpha$ et $\beta\gamma = 0$. Nous sommes donc conduits à prendre $\beta = 0$, et alors

$$A - 2E = \alpha^2, \qquad B = 2\alpha\gamma, \qquad C + 2E = \gamma^2$$

Il reste trois paramètres arbitraires α, γ et E.

Si nous prenons ensuite la solution qui correspond au signe $+$, elle donne

$$D = -\alpha, \qquad 2\alpha + \beta\gamma = 0, \qquad F = \gamma, \qquad 2\gamma + \alpha\beta = 0;$$

nous avons donc $\alpha = -\dfrac{\beta\gamma}{2}$, puis $4\gamma - \gamma\beta^2 = 0$; cette dernière relation se décompose en

$$\gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \pm 2.$$

En prenant $\gamma = 0$, on trouve

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad D = 0, \quad A = 2E + 2\beta, \quad F = 0, \quad B = 4 + \beta^2, \quad D = 0, \quad C = 2\beta - 2E.$$

Il reste deux paramètres arbitraires, et ces quadriques forment un réseau.

Pour $\beta = 2$, on trouve $\gamma = -\alpha$, et il ne reste encore que deux paramètres arbitraires. De même pour $\beta = -2$.

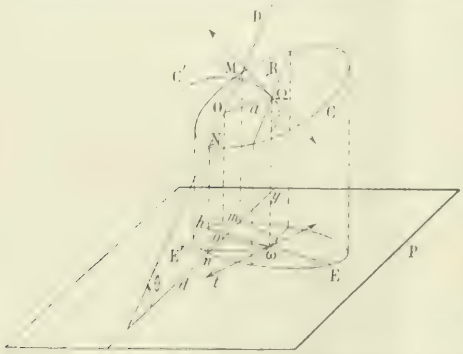
Bonnes solutions : MM. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Jouglens.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2028. — *Un cercle* C *tourne autour d'une droite* D, *située dans son plan. Sa projection sur un plan* P, *qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à* D, *est une ellipse variable* E.

On demande le lieu des foyers de l'ellipse E.

La projection du cercle C sur le plan P est une ellipse E, dont certaines propriétés sont aisées à prévoir. Appelons R le rayon du cercle qui tourne, Ω son centre, a la distance de ce centre à l'axe D, θ l'angle de l'axe D avec le plan P.



1° Le grand axe de l'ellipse E est égal à 2R.

2° Le diamètre du cercle C qui est parallèle à D se projette suivant un diamètre de l'ellipse E, parallèle à d, de longueur constante égale à $2R\cos\theta$.

3° Le cercle C coupe D en deux points fixes, M et N, réels ou imaginaires, dont la distance est $2\sqrt{R^2 - a^2}$; l'ellipse E passe par les points m et n, projections de ces points ; m et n sont sur d ; leur distance est $2\sqrt{R^2 - a^2}\cos\theta$.

4° Le centre ω de l'ellipse E est la projection de Ω ; or Ω décrit, dans un plan perpendiculaire à D, un cercle C dont le centre est le milieu O de MN.

ω décrit donc une ellipse E′, qui a pour centre le milieu o de mn; son demi-grand-axe, perpendiculaire à d, est égal à a, son demi-petit-axe à $a \sin \theta$. La tangente en Ω au cercle C′ est perpendiculaire au plan du cercle C, et par suite à l'horizontale de ce plan. Elle se projette sur P suivant la tangente à l'ellipse E′ en ω, et cette tangente est perpendiculaire au grand axe de l'ellipse E.

Donc l'ellipse E a pour petit axe la tangente en ω à l'ellipse E′, pour grand axe la normale.

Les conditions 3 et 4 suffisent pour déterminer chacune des ellipses E, une ellipse étant bien définie quand on connaît ses deux axes et deux points.

Donnons-nous l'équation de l'ellipse E′, rapportée à ses axes ox et oy,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

($b = a \sin \theta$). Les points m et n sont situés sur le petit axe de cette ellipse, symétriques par rapport à o.

Les équations d'une tangente ωt à l'ellipse E′ et de la normale ωh qui passe au point de contact sont

$$(\omega t) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

et

$$(\omega h) \qquad x \sin \alpha - y \cos \alpha + p' = 0,$$

où

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha},$$

$$p' = -\frac{c^2}{p} \cos \alpha \sin \alpha.$$

L'ellipse variable E dont les axes sont ωt et ωh a pour équation

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)^2}{A^2} + \frac{(x \sin \alpha - y \cos \alpha + p')^2}{B^2} = 1,$$

B étant la longueur du demi-axe dirigé suivant la tangente.

Elle doit passer par deux points fixes de oy; donc pour $x = 0$, l'équation doit donner $y^2 = k$ [en posant $k = (B^2 - a^2) \cos^2 \theta$].

On en déduit que A^2 et B^2 doivent vérifier les équations

$$(1) \qquad k\left(\frac{\cos^2 \alpha}{B^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{A^2}\right) + \frac{p^2}{A^2} + \frac{p'^2}{B^2} - 1 = 0$$

et

$$(2) \qquad \frac{p \sin \alpha}{A^2} + \frac{p' \cos \alpha}{B^2} = 0.$$

De la seconde on tire

$$\frac{\left(\frac{1}{A^2}\right)}{-p' \cos \alpha} = \frac{\left(\frac{1}{B^2}\right)}{p \sin \alpha} = t;$$

remplaçant $\frac{1}{A^2}$ et $\frac{1}{B^2}$ par ces valeurs dans la première, j'ai

$$t[(k \cos^2 \alpha + p'^2) p \sin \alpha - (k \sin^2 \alpha + p^2) p' \cos \alpha] = 1,$$

ce qui s'écrit

$$t(p \cos \alpha - p' \sin \alpha)(k \cos \alpha \sin \alpha - pp') = 1.$$

Or

$$pp' = -c^2 \cos \alpha \sin \alpha$$

et

$$p \cos \alpha - p' \sin \alpha = \frac{1}{p}(p^2 \cos \alpha - pp' \sin \alpha) = \frac{\cos \alpha}{p} a^2.$$

Par conséquent,

$$t = \frac{p}{a^2(k + c^2)} \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin \alpha}$$

et

$$B^2 = \frac{1}{tp \sin \alpha} = a^2 \frac{(k + c^2)}{p^2} \cos^2 \alpha,$$

$$A^2 = \frac{-1}{tp' \cos \alpha} = -\frac{a^2(k + c^2) \cos \alpha \sin \alpha}{pp'} = \frac{a(k + c^2)}{c^2}.$$

L'équation de l'ellipse E est donc déterminée en fonction du paramètre α. Un de ses axes est constant, comme on l'avait prévu au § 1 ; sa valeur doit être 2R. En effet,

$$A^2 = \frac{a^2}{c^2}(k + c^2), \qquad \text{or} \qquad k = (R^2 - a^2)\cos^2\theta,$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2\cos^2\theta,$$

il en résulte bien que $A = R$, et l'on en déduit encore $B = \frac{aR}{p}\cos\theta\cos\alpha = \frac{cR}{p}\cos\alpha$.

Il est facile de s'assurer que l'ellipse E a bien la propriété indiquée au § 2. Soient en effet x_0, y_0 les coordonnées de ω ; elles vérifient les équations

$$x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha = p,$$

$$-x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha = p' ;$$

en remplaçant p et p' par ces valeurs, l'équation de E peut s'écrire

$$\frac{[(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha]^2}{A^2} + \frac{[(x - x_0)\sin\alpha - (y - y_0)\cos\alpha]^2}{B^2} = 1.$$

Si dans cette équation on fait $x = x_0$, il reste une équation en $y - y_0$, qui donne la longueur du demi-diamètre parallèle à d,

$$(y - y_0)^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{A^2} + \frac{\cos^2\alpha}{B^2}\right) = 1,$$

ou

$$\frac{\cos^2\alpha}{B^2} = \frac{p^2}{c^2R^2},$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{A^2} = \frac{\sin^2\alpha}{R^2} ;$$

donc

$$\frac{\cos^2\alpha}{B^2} + \frac{\sin^2\alpha}{A^2} = \frac{p^2 + c^2\sin^2\alpha}{c^2R^2} = \frac{a^2}{c^2R^2},$$

et

$$|y - y_0| = \frac{cR}{a} = R\cos\theta,$$

comme on l'avait prévu.

Calculons maintenant la distance d'un foyer F de l'ellipse E au centre ω, ou, ce qui est la même chose, à la tangente ωt.

$$\overline{F\omega}^2 = A^2 - B^2 = R^2 - R^2\frac{c^2}{p^2}\cos^2\alpha = R^2\frac{b^2}{p^2}.$$

Il se trouve que cette quantité est un carré. On peut donc distinguer les lieux des deux foyers réels F et F'. Si nous regardons p comme positif, la distance de l'origine à la tangente est négative ; la distance du foyer F qui est du même côté de la tangente que l'origine est donc $-\frac{Rb}{p}$; celle de F' est $+\frac{Rb}{p}$.

Le foyer F' est à la rencontre de deux droites

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha + p' = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \pm\frac{Rb}{p}.$$

Les coordonnées sont donc

$$x = \cos\alpha\,\frac{a^2 \pm Rb}{p}, \qquad y = \sin\alpha\,\frac{b^2 \pm Rb}{p},$$

d'où

$$\frac{x}{a \pm \frac{Rb}{a}} = \frac{a\cos\alpha}{p}, \qquad \frac{y}{b + R} = \frac{b\sin\alpha}{p}.$$

En portant les valeurs de $a\cos\alpha$ et $b\sin\alpha$ dans la relation qui définit p,

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$

on trouve l'équation du lieu de F'

$$\frac{x^2}{\left(a+\frac{Rb}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{(b-R)^2}=1;$$

le lieu de F est l'ellipse

$$\frac{x^2}{\left(a-\frac{Rb}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{(b-R)^2}=1.$$

Cherchons les foyers de ces ellipses. Remarquons que

$$a\pm\frac{Rb}{a}=a\pm R\sin\theta,$$

et que

$$b\pm R=a\sin\theta\pm R.$$

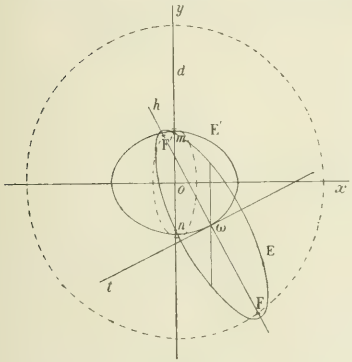
On a donc

$$(a\pm R\sin\theta)^2-(a\sin\theta\pm R)^2=(a^2-R^2)\cos^2\theta.$$

Les deux ellipses trouvées sont homofocales ; les points m et n sont les foyers, réels s'ils sont réels, imaginaires si $R<a$.

Si $R=a$, le cercle qui tourne touche l'axe Δ ; les deux lieux trouvés deviennent alors deux cercles de rayons $a+b$ et $a-b$. Ce sont les cercles de Chasles.

Enfin on peut se proposer de chercher le lieu des foyers imaginaires de l'ellipse variable, ce lieu pouvant avoir une équation réelle, et même être une courbe réelle, qui, bien entendu, ne coupera pas l'axe ωt qui porte ces foyers.



L'équation de ωt est

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0,$$

la distance des foyers à la normale est $\pm i\frac{Rb}{p}$: on obtient donc l'équation du lieu en éliminant α entre l'équation de la tangente et l'équation

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha-p'=\pm i\frac{Rb}{p}.$$

On tire de ces deux équations

$$x=p\cos\alpha-p'\sin\alpha\mp i\frac{Rb}{p}\sin\alpha,$$

$$y=p\sin\alpha-p'\cos\alpha\pm i\frac{Rb}{p}\cos\alpha;$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{p}\left(a\cos\alpha-i\frac{Rb}{a}\sin\alpha\right),$$

$$\frac{y}{b}=\frac{1}{p}\left(b\sin\alpha-i\frac{Ra}{a}\cos\alpha\right);$$

en faisant la somme des carrés, le double produit disparaît ; il reste

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha-\frac{R^2}{a^2}(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)}{p^2}=1-\frac{R^2}{a^2}.$$

C'est une ellipse concentrique et semblable à l'ellipse E' ; elle est réelle si $R<a$, mais toujours intérieure à E', dont elle ne coupe aucune tangente. Ainsi le lieu complet se compose de trois coniques.

A. D.

Autre solution. — Le cercle mobile coupe la droite D en deux points fixes, M et N, réels ou imaginaires. Désignons par O le milieu de MN, et prenons pour plan des xy un plan parallèle au plan P et passant par le point O, pour axe des y la projection de la droite D sur ce plan ; les axes seront alors parfaitement fixés en choisissant le sens de rotation habituel et en fixant Oz de façon que la droite D fasse avec Oy un angle aigu et positif, θ. Désignons maintenant par a la distance du centre Ω du cercle au point O et par R le rayon du cercle.

Nous définirons le cercle variable par une sphère de rayon R ayant pour centre le point Ω et par un plan

contenant à la fois la droite D et le centre de la sphère. Les équations de la droite D sont

$$z - y \operatorname{tg} \theta = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0.$$

Le plan variable aura donc pour équation

$$\lambda x - y \operatorname{tg} \theta + z = 0,$$

λ étant un paramètre variable. De sorte que, en désignant par α, β, γ les coordonnées variables du point Ω, les équations de la sphère seront

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 \qquad \text{et} \qquad \lambda x - y \operatorname{tg} \theta + z = 0.$$

Restent à trouver les relations qui existent entre α, β, γ ; elles sont au nombre de trois : la première exprime que la distance de ce point à l'origine est égale à a ; la deuxième, que ce point est dans le plan que nous venons de trouver ; et la troisième qu'il est dans un plan perpendiculaire à la droite D menée par le point O.

Ces relations sont donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2,$$
$$\lambda\alpha - \beta \operatorname{tg} \theta + \gamma = 0,$$
$$\beta + \gamma \operatorname{tg} \theta = 0.$$

Envisageons maintenant la projection du cercle sur le plan P. Cette projection est une ellipse E qui a pour centre la projection du point Ω, c'est-à-dire le point $(\alpha, \beta, 0)$, qui a pour grand axe une parallèle aux horizontales du plan mobile et pour petit axe une droite perpendiculaire ; la longueur du demi-grand-axe est R, celle du demi-petit-axe est $R \cos \varphi$, en appelant φ l'angle du plan mobile avec le plan des xy, ou, ce qui revient au même, l'angle de la normale à ce plan avec Oz ; nous avons donc

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

Par conséquent, en appelant A et B les deux demi-axes de l'ellipse et C la demi-distance focale,

$$A^2 = R^2,$$
$$B^2 = \frac{R^2}{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$
$$C^2 = \frac{R^2(\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Nous aurons l'horizontale du plan en faisant $z = 0$.

Nous trouvons ainsi $\qquad \lambda x - y \operatorname{tg} \theta = 0$

et l'équation du grand axe est

$$\frac{x - \alpha}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{y - \beta}{\lambda} = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

en désignant par ρ la distance du centre au point mobile (x, y).

Remplaçons maintenant ρ par C ; nous aurons les coordonnées des deux foyers ; elles sont données par les équations

$$\frac{x - \alpha}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{y - \beta}{\lambda} = \frac{\pm R}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$

le double signe correspondant aux deux foyers.

Nous aurons alors le lieu de l'un de ces foyers en éliminant α, β, γ et λ, ou plutôt en calculant x et y en fonction d'un seul paramètre, λ. Servons-nous maintenant des relations qui existent entre α, β et λ : la dernière donne $\beta = -\gamma \operatorname{tg} \theta$; la première donne alors

$$\alpha^2 + \gamma^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = a^2$$

et la seconde,

$$\lambda\alpha + \gamma(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = 0.$$

Nous tirons de là $\alpha = -\frac{\gamma}{\lambda}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$, et, en portant dans la précédente,

$$\frac{\gamma^2}{\lambda^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2 + \gamma^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) = a^2 ;$$

celle-ci donne

$$\gamma^2 = \frac{a^2\lambda^2 \cos^2 \theta}{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

et, par suite,

$$\gamma = \frac{a\lambda \cos \theta}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} ;$$

ceci fournit immédiatement α et β, et, comme conséquence, les coordonnées du foyer. Celles-ci sont

$$x = \frac{a}{\cos \theta \sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} + \frac{R \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}},$$
$$y = \frac{-a\lambda \sin \theta}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} + \frac{R\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

Les deux radicaux qui figurent dans ces formules sont indépendants l'un de l'autre ; par conséquent chacun d'eux a le double signe; donc les expressions de x^2 et de y^2 sont au nombre de deux; si nous prenons d'abord les radicaux avec le même signe, nous avons

$$x^2 = \frac{(R\sin\theta - a)^2}{\cos^2\theta(\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2\theta)},$$

$$y^2 = \frac{\lambda^2(R - a\sin\theta)^2}{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2\theta}.$$

Si nous prenons, au contraire, les radicaux avec des signes différents, nous trouvons

$$x^2 = \frac{(R\sin\theta + a)^2}{\cos^2\theta(\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2\theta)},$$

$$y^2 = \frac{\lambda^2(R + a\sin\theta)^2}{\lambda^2 + 1 + \operatorname{tg}^2\theta}.$$

Donc il y a deux lieux de foyers, et ces deux lieux s'obtiennent en éliminant λ^2 dans chaque groupe d'équations ; rien n'est plus facile d'ailleurs que de faire cette élimination, puisque les deux équations de chaque groupe sont linéaires par rapport à λ^2 ; divisons, à cet effet, les deux équations l'une par l'autre ; nous avons

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\lambda^2\cos^2\theta(R - a\sin\theta)^2}{(R\sin\theta - a)^2};$$

de là, nous tirons λ^2,

$$\lambda^2 = \frac{y^2(R\sin\theta - a)^2}{x^2\cos^2\theta(R - a\sin\theta)^2},$$

et nous portons cette valeur dans la première équation ; nous avons ainsi

$$\frac{y^2(R\sin\theta - a)^2}{x^2\cos^2\theta(R - a\sin\theta)^2} + \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{(R\sin\theta - a)^2}{x^2\cos^2\theta}.$$

Cette équation admet $\frac{1}{\cos^2\theta}$ en facteur; en supprimant ce facteur et multipliant par x^2, on peut écrire

$$\frac{x^2}{(R\sin\theta - a)^2} + \frac{y^2}{(R - a\sin\theta)^2} = 1.$$

L'autre groupe d'équations conduit à une nouvelle ellipse

$$\frac{x^2}{(R\sin\theta + a)^2} + \frac{y^2}{(R + a\sin\theta)^2} = 1.$$

Le lieu total se compose donc de deux ellipses ayant leurs axes situés sur Ox et sur Oy. Il est visible que les axes de la seconde sont plus grands que ceux de la première ; par conséquent, la première est tout entière à l'intérieur de la seconde.

Voyons comment sont placés les foyers de ces ellipses. Pour cela, appelons a' et b' les demi-axes de la première, a'' et b'' les demi-axes de la seconde ; nous aurons

$$a'^2 - b'^2 = (a^2 - R^2)\cos^2\theta;$$

de même

$$a''^2 - b''^2 = (a^2 - R^2)\cos^2\theta.$$

Par conséquent, ces deux ellipses ont les mêmes foyers; leurs grands axes sont situés sur Ox quand a est plus grand que R, c'est-à-dire quand les points M et N sont imaginaires ; au contraire, si a est plus petit que R, c'est-à-dire si les points M et N sont réels, les grands axes sont situés sur Oy. Enfin, quand $a = R$, c'est-à-dire quand le cercle est tangent à la droite D, leurs distances focales sont nulles et par conséquent les ellipses se réduisent à deux cercles.

On trouverait de même le lieu des foyers imaginaires conjugués, c'est-à-dire le lieu des foyers situés sur le petit axe. Ces foyers sont toujours imaginaires, mais il n'est pas certain que leur lieu le soit ; il suffit, si ce lieu existe, qu'il soit toujours rencontré par le petit axe de l'ellipse mobile en des points imaginaires.

Bonne solution de M. Jean Mourret, à Saumur.

QUESTION PROPOSÉE

2128. — 1° Intégrer à l'aide des séries l'équation différentielle

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x.$$

L'intégrer aussi en partant de ce fait que l'équation sans second membre admet la solution $y = x^2$.

2° Déterminer celles des intégrales dont la dérivée première se réduit à 0, et la dérivée seconde à -2,

pour $x = 0$. Construire la courbe représentative de cette fonction, et vérifier qu'elle ne rencontre pas l'axe des x.

3° En appelant y cette intégrale particulière, montrer que la fonction $f(x) = \frac{y'}{y} - \frac{2}{x+1}$ est continue de 0 à $+\infty$ et a une infinité de racines dans cet intervalle. Donner approximativement ces racines, ainsi que la forme de la courbe $y = f(x)$, et en déduire l'explication de ce fait que l'aire de la courbe $y = f(x)$, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, est toujours négative et nulle un nombre infini de fois. E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2033. — *Étudier la série de terme général* $u_n = \operatorname{tg}\left(a + \frac{\alpha}{n}\right)^n$, *$a$ étant compris entre 0 et* $\frac{\pi}{2}$ *et α étant un nombre quelconque.*

La première chose à faire est d'étudier la limite du terme général quand n grandit indéfiniment. Pour cela, il faut d'abord étudier la limite de $\left(a + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ ou de $a^n\left(1 + \frac{\alpha}{an}\right)^n$; la quantité $\left(1 + \frac{\alpha}{an}\right)^n$ peut s'écrire $\left[(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\alpha}{a}}$; elle tend donc vers $e^{\frac{\alpha}{a}}$, quantité bien déterminée et finie.

Voyons l'autre facteur : si a est plus grand que 1, a^n grandit indéfiniment, le terme u_n est indéterminé ; si a est plus petit que 1, a^n tend vers 0, u_n tend vers 0 et la série peut être convergente ; si $a = 1$, u_n tend vers $\operatorname{tg} e^{\frac{\alpha}{a}}$, et, sauf le cas où $e^{\frac{\alpha}{a}}$ est un multiple de π, la série est divergente.

Il ne reste donc que deux cas à étudier : le cas où a est plus petit que 1 et le cas où a est égal à 1 et, en même temps, $e^\alpha = K\pi$.

Supposons d'abord $a < 1$; alors $\left(a + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ tend vers 0 et la série u_n est de la même nature que la série $v_n = \left(a + \frac{\alpha}{n}\right)^n$; celle-ci, de la même nature que la série $w_n = a^n$, et cette dernière est convergente. La série proposée est donc convergente.

Supposons enfin $a = 1$ et $e^\alpha = \pi$, ou $\alpha = L\pi$, par exemple. Nous poserons $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \pi + \varepsilon$; nous aurons $\operatorname{tg}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \operatorname{tg}\varepsilon$: la série est de même espèce que la série $v_n = \varepsilon = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n - \pi$. Il faut donc trouver la partie principale de l'infiniment petit ε. Or $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ peut s'écrire

$$e^{n\left(1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \cdots\right)} = e^{n\left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \cdots\right)}$$

ou

$$e^\alpha e^{-\frac{\alpha^2}{2n}} e^{\frac{\alpha^3}{3n^2}} \cdots,$$

ou enfin

$$e^\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2n} + \frac{\alpha^4}{8n^2} - \cdots\right)\left(1 + \frac{\alpha^3}{3n^2} + \frac{\alpha^6}{18n^4} \cdots\right)\cdots$$

Les deux premiers termes de ce développement en série sont

$$e^\alpha - e^\alpha \frac{\alpha^2}{2n},$$

et, comme $e^\alpha = \pi$, le terme v_n est égal à $-\pi\frac{\alpha^2}{2n} + \cdots$. La série est donc divergente.

Il en est de même pour $e^\alpha = K\pi$.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2032. — *On considère les cordes* MM′ *d'une ellipse qui joignent les extrémités de deux demi-diamètres conjugués, et l'un des sommets* A *du grand axe. Construire les courbes lieux de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle* AMM′, *et calculer leurs aires.*

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes. Désignons par

$$ux+vy-1=0$$

l'équation d'une sécante rencontrant l'ellipse aux points M et M′ ; l'équation de l'ensemble des droites joignant le centre O de la courbe aux points M et M′ est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-(ux+vy)^2=0,$$

et les coefficients angulaires de ces droites vérifient l'équation

$$\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-(u+vm)^2=0.$$

Pour que les droites OM et OM′ soient deux diamètres conjugués de l'ellipse, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires vérifient la relation bien connue $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

On doit donc avoir

$$\frac{\frac{1}{a^2}-u^2}{\frac{1}{b^2}-v^2}=-\frac{b^2}{a^2},$$

ou (1) $$a^2u^2+b^2v^2=2.$$

Cela posé, soit A le sommet de l'ellipse qui a pour abscisse a. Nous allons chercher l'équation du cercle passant par les points A, M, M′. Ce cercle rencontre l'ellipse en un quatrième point N, et l'on sait que les droites AN et MM′ sont en direction symétriques par rapport aux axes de l'ellipse. Donc l'équation de la droite AN est $u(x-a)-vy=0$, et l'équation du cercle est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda(ux+vy-1)(ux-vy-ua)=0;$$

il suffit, pour déterminer λ, d'écrire que les coefficients de x^2 et de y^2 sont égaux. On trouve ainsi

$$\frac{1}{a^2}+\lambda u^2=\frac{1}{b^2}-\lambda v^2, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda=\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{u^2+v^2}.$$

L'équation du cercle est alors

$$(u^2+v^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)(ux+vy-1)(ux-vy-ua)=0,$$

ou, en ordonnant et en tenant compte de l'égalité (1),

$$2(x^2+y^2)-c^2u(ua+1)x-c^2v(ua-1)y-a^2b^2(u^2+v^2)+uac^2=0.$$

Les coordonnées du centre sont alors

$$x=\frac{c^2u(ua+1)}{4}, \qquad y=\frac{c^2v(ua-1)}{4}.$$

Nous allons d'abord étudier le lieu de ce point. De la relation (1) on déduit $ua=\sqrt{2}\cos\varphi$, $vb=\sqrt{2}\sin\varphi$, ou $u=\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{a}$, $v=\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{b}$, et en remplaçant dans les valeurs de x et de y, nous

obtenons les coordonnées d'un point du lieu en fonction du seul paramètre φ.

$$x = \frac{c^2\sqrt{2}}{4a}\cos\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi + 1), \qquad y = \frac{c^2\sqrt{2}}{4b}\sin\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi - 1).$$

Si nous y remplaçons $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, on voit que le lieu est une courbe unicursale du quatrième degré ; mais, pour la construire, il sera plus simple de conserver la variable φ.

Nous obtiendrons toute la courbe en faisant varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à 2π, par exemple de $-\pi$ à $+\pi$. Mais en changeant φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change de signe ; donc à deux valeurs de φ opposées correspondent deux points de la courbe symétriques par rapport à Ox. Il suffira alors de faire varier φ dans l'intervalle $(0, \pi)$, de construire la branche de courbe correspondante, puis de tracer la branche symétrique par rapport à Ox.

Calculons les dérivées de x et de y par rapport à φ ; nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{c^2\sqrt{2}}{4a}\sin\varphi(2\sqrt{2}\cos\varphi + 1), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{c^2\sqrt{2}}{4b}\,2\sqrt{2}\cos^2\varphi - \cos\varphi - \sqrt{2}).$$

Remarquons d'abord que x s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, et que y s'annule pour $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

D'autre part, $\frac{dx}{d\varphi}$ s'annule pour un angle obtus α dont le cosinus est $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; cet angle est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$. Enfin, $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annule pour les racines du trinome $2\sqrt{2}\cos^2\varphi - \cos\varphi - \sqrt{2}$.

Si nous y substituons successivement

$$-1, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad 0, \qquad +\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad +1,$$

nous obtenons les signes

$$+ \qquad - \qquad - \qquad - \qquad +;$$

par suite, le trinome admet une racine comprise entre $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et une autre comprise entre $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $+1$. La première est le cosinus d'un angle β, obtus, compris entre α et $\frac{3\pi}{4}$, et la deuxième est le cosinus d'un angle γ, aigu, inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Nous en déduisons aisément les variations de x et y :

φ	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	α	β	$\frac{3\pi}{4}$	π
x	$\frac{c^2}{4a}(2-\sqrt{2})$	↘	—	↘ $\frac{c^2}{2a}$	↘ 0	↘ $-\frac{c^2}{16a}$ (*min.*)	↗ —	↗ 0	↗ $\frac{c^2}{4a}(2-\sqrt{2})$
y	0	↗ (*max*)	↗ 0	↗ $-\frac{c^2\sqrt{2}}{4b}$	↗ $\frac{3c^2\sqrt{2}}{16b}$	↗ (*min.*)	↗ $\frac{c^2}{2b}$	↗ 0
$\frac{dy}{dx}$	∞		0		∞	0		∞

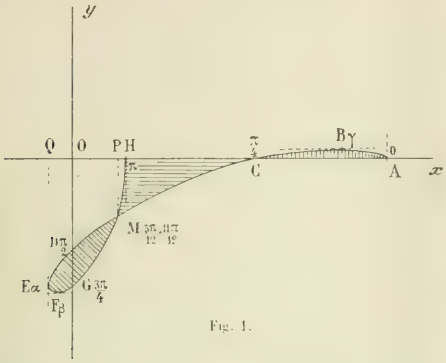


Fig. 1.

Nous obtenons ainsi la forme de courbe (fig. 1).

Nous avons désigné par A, B, C, D, E, F, G, H les points correspondant aux valeurs remarquables de φ : 0, γ, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, α, β, $\frac{3\pi}{4}$, π.

Cette courbe présente un point double M dont il est facile de calculer les coordonnées. Pour cela nous cherchons deux angles *différents* φ et φ', compris entre 0 et π, tels que l'on ait

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi + 1) = \cos\varphi'(\sqrt{2}\cos\varphi' + 1), \\ \sin\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi - 1) = \sin\varphi'(\sqrt{2}\cos\varphi' - 1). \end{cases}$$

La première s'écrit

$$\sqrt{2}(\cos^2\varphi - \cos^2\varphi') + \cos\varphi - \cos\varphi' = 0,$$

et, comme $\cos\varphi - \cos\varphi'$ doit être différent de zéro,

$$(3)\qquad \sqrt{2}(\cos\varphi + \cos\varphi') + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad 2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} + 1 = 0.$$

La deuxième équation du système (2) nous donne

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi') - (\sin\varphi - \sin\varphi') = 0,$$

ou

$$\sqrt{2}\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi') - 2\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0,$$

ou encore

$$2\sqrt{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos(\varphi+\varphi') - 2\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0,$$

ou, enfin, en divisant par $2\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$ qui ne peut être nul,

$$(4)\qquad \sqrt{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos(\varphi+\varphi') - \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0.$$

Le système (2) est équivalent au système (3), (4).

De l'équation (3) nous tirons $\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}$, et en portant cette valeur dans (4), nous obtenons

$$\cos(\varphi - \varphi') + 2\cos^2\frac{\varphi+\varphi'}{2} = 0,$$

ou

$$4\cos^2\frac{\varphi+\varphi'}{2} - 1 = 0, \qquad \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Je puis supposer $\varphi > \varphi'$; par hypothèse $\varphi - \varphi'$ étant plus petit que π, on a $\frac{\varphi-\varphi'}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} > 0$. Donc $\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}$ doit être négatif d'après (3), et l'on a

$$\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit, puisque φ et φ' sont compris entre 0 et π,

$$\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \frac{\varphi-\varphi'}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

et $\qquad \varphi = \frac{11\pi}{12}, \qquad \varphi' = \frac{5\pi}{12}, \qquad$ et $\qquad \varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}.$

$$\text{Or} \quad \cos\varphi' = \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1),$$

$$\sin\varphi' = \sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1).$$

puis,
$$\cos\varphi = \cos\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1),$$

$$\sin\varphi = \sin\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1).$$

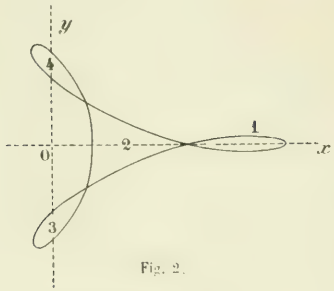


Fig. 2.

On en déduit aisément les coordonnées du point double

$$x = \frac{c^2}{8a}, \qquad y = -\frac{c^2\sqrt{3}}{8b}.$$

En achevant la courbe par symétrie, on obtient la figure 2.

La courbe complète sépare quatre régions du plan (1), (2), (3), (4) dont nous allons calculer les aires

Calculons d'abord l'intégrale indéfinie $\int y\,dx$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= -\frac{c^4}{8ab}\int \sin\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi - 1)\sin\varphi(2\sqrt{2}\cos\varphi + 1)d\varphi \\
&= -\frac{c^4}{8ab}\int \sin^2\varphi(4\cos^2\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi - 1)d\varphi \\
&= -\frac{c^4}{8ab}\int (\sin^2 2\varphi - \sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi)d\varphi \\
&= -\frac{c^4}{8ab}\int\left[\frac{1-\cos 4\varphi}{2} - \sqrt{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right]d\varphi.
\end{aligned}$$

Il est alors facile d'intégrer ; on a

$$\int y\,dx = F(\varphi) = -\frac{c^4}{8ab}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 4\varphi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin^3\varphi - \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]$$

ou, en remplaçant $\sin^3\varphi$ par $\frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$.

$$\int y\,dx = F(\varphi) = \frac{c^4}{192ab}[3\sin 4\varphi - 2\sqrt{2}\sin 3\varphi - 6\sin 2\varphi + 6\sqrt{2}\sin\varphi].$$

Pour simplifier, nous poserons $\frac{c^4}{192ab} = k^2$.

L'aire de la région (1) est égale à deux fois l'aire couverte de hachures parallèles à Oy de la figure 1, et celle-ci est égale à $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} y\,dx$, puisque y est positif, ou à $F(0) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

On a $\qquad F(0) = 0, \qquad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2k^2.$

Donc l'aire de la région (1) est $4k^2$ ou $\frac{c^4}{48ab}$.

Considérons maintenant dans la figure 1 l'aire couverte de hachures parallèles à Ox. Elle est la différence des aires MPC et MPH. Nous avons

$$\text{aire MPC} = -\int_{\frac{5\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} y\,dx, \qquad \text{aire MPH} = -\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} y\,dx,$$

car y est négatif, ou

$$\text{aire MPC} = F\left(\frac{5\pi}{12}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{aire MPH} = F\left(\frac{11\pi}{12}\right) - F(\pi).$$

On trouve facilement

$$F\left(\frac{5\pi}{12}\right) = k^2\left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \qquad F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = k^2\left(-2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \qquad F(\pi) = 0,$$

et par suite

$$\text{aire MPC} - \text{aire MPH} = 6k^2 = \frac{c^4}{32ab}.$$

Donc l'aire de la région (2) (fig. 2) est $12k^2$, ou $\frac{c^4}{16ab}$.

Enfin considérons l'aire couverte de hachures obliques aux axes dans la figure 1. Cette aire est égale à

$$\text{aire QEGMP} - \text{aire QEDMP} :$$

or

$$\text{aire QEGMP} = -\int_{\alpha}^{\frac{11\pi}{12}} y\,dx = F(\alpha) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\text{aire QEDMP} = -\int_{\alpha}^{\frac{5\pi}{12}} y\,dx = F(\alpha) - F\left(\frac{5\pi}{12}\right),$$

et, en retranchant, on voit que l'aire envisagée est égale à

$$F\left(\frac{5\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) \qquad \text{ou} \qquad 4k^2.$$

C'est l'aire des régions (3) et (4) de la figure 2.

En résumé, les régions (1), (3) et (4) ont la même aire $4k^2$, et la région (2) a pour aire $12k^2$.

Lieu de l'orthocentre du triangle AMM'. — Cherchons d'abord les coordonnées du centre de gravité de ce triangle. Si on désigne par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées des points M et M', on a pour le centre de gravité

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{3}.$$

D'autre part, le milieu de MM' est le point de rencontre de la droite MM', $ux + vy - 1 = 0$, et du diamètre conjugué $\frac{x}{a^2} - \frac{u}{v}\cdot\frac{y}{b^2} = 0$; ce milieu a pour coordonnées $\frac{a^2u}{2}$ et $\frac{b^2v}{2}$, car $a^2u^2 + b^2v^2 = 2$. Donc

$$x_1 + x_2 = a^2u, \qquad y_1 + y_2 = b^2v,$$

et les coordonnées du centre de gravité sont

$$x_G = \frac{a(au+1)}{3}, \qquad y_G = \frac{b^2v}{3}.$$

Si on désigne par ω le centre du cercle circonscrit et par H l'orthocentre, on sait que les points ω, G, H sont en ligne droite et que l'on a $\frac{\overline{H\omega}}{\overline{HG}} = \frac{3}{2}$.

On en conclut que les coordonnées du point H sont

$$x = \frac{x_\omega - \frac{3}{2} x_G}{1 - \frac{3}{2}}, \qquad y = \frac{y_\omega - \frac{3}{2} y_G}{1 - \frac{3}{2}},$$

ou, en remplaçant x_ω, y_ω par les coordonnées du point ω que nous avons obtenues plus haut, x_G, y_G par les valeurs que nous venons de calculer,

$$x = -\frac{1}{2}(ua + 1)(c^2u - 2a), \qquad y = -\frac{v}{2}(uac^2 - a^2 - b^2),$$

ou encore, en remplaçant u par $\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{a}$ et v par $\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{b}$,

$$x = -\frac{1}{2a}(\sqrt{2}\cos\varphi + 1)(c^2\sqrt{2}\cos\varphi - 2a^2), \qquad y = -\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2b}(a^2\sqrt{2}\cos\varphi - a^2 - b^2).$$

Ce lieu est encore une courbe unicursale du quatrième degré symétrique par rapport à Ox.

Si on transporte l'origine au point $A(a, 0)$, les équations paramétriques de la courbe deviennent

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{2a}(a^2 + b^2 - c^2\sqrt{2}\cos\varphi), \qquad y = \frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{2b}(a^2 + b^2 - c^2\sqrt{2}\cos\varphi);$$

les valeurs de x et y sont ainsi plus faciles à discuter.

On trouvera une courbe analogue au limaçon de Pascal.

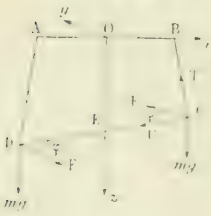
La courbe admet au point A : un point double réel si $a^2 + b^2 < c^2\sqrt{2}$, ou $a > b(\sqrt{2} + 1)$: un point double isolé si $a < b(\sqrt{2} + 1)$; un point de rebroussement si $a = b(\sqrt{2} + 1)$.

CONCOURS DE 1910

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

2129. — *a*) Un quadrilatère articulé ABCD, dont les côtés ont des longueurs invariables $AB = 2a$, $BC = AD = c$, $DC = 2b$, se déforme de sorte que le côté AB reste horizontal et fixe et que le milieu E du côté DC reste sur la verticale Oz du milieu O de AB.



1° Définir la courbe (C) lieu du sommet C (x, y, z) par les équations de ses projections (C_x), (C_y), (C_z) sur le plan horizontal xOy et sur les plans verticaux rectangulaires xOz, yOz (l'axe Ox est dirigé suivant le côté fixe AB).

2° Calculer les coordonnées x, y, z de C en fonction de l'angle θ des plans xOz et COD. Montrer que dans le cas particulier où a, b, c sont liés par une certaine relation R telle que la courbe (C_y), projection de (C) sur yOz, passe par le point O, ces coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un même paramètre.

3° Nature des courbes (C_x) et (C_y).

Construire la courbe (C_x) : étudier sa déformation lorsque c varie, a et b gardant des valeurs constantes.

4° Calculer l'aire de la courbe (C_x) dans le cas où a, b, c sont liés par la relation R.

Calculer la longueur de (C_x) pour $\frac{a}{8} = \frac{c}{9} = b$; vérifier que cette longueur est quadruple de celle de la courbe (C_z).

b) Aux sommets C et D du même quadrilatère articulé, constitué par des barres rigides non pesantes et dont le côté AB est maintenu horizontal et fixe, sont fixés deux points matériels de masses égales m, soumis à l'action de la pesanteur dirigée suivant Oz et d'accélération g.

1° Etablir que les configurations du quadrilatère dépendent de trois paramètres dans le cas général, mais que les configurations, telles que C et D soient symétriques par rapport à Oz, — ou « *configurations* θ » (θ, angle de xOz avec COD) — dépendent du seul paramètre θ.

2° On applique en C et D deux forces horizontales F, F constamment perpendiculaires à la droite CB et formant un couple. Déterminer F par la condition que la *configuration* θ soit une configuration d'équilibre ; on déterminera les expressions en fonction de θ des forces F et des tensions T, U des lignes CB et CD.

3° Même question, lorsque les forces F, F, horizontales et formant toujours un couple, font un angle quelconque φ avec CD.

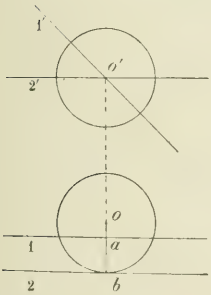
4° Vérifier que lorsqu'on passe de la configuration θ d'équilibre à la configuration $\theta + d\theta$, la somme algébrique des travaux des forces F (définies comme au 3°) et mg, appliquées aux points C et D, est nulle.

Calcul trigonométrique.

On donne les valeurs numériques des trois côtés d'un triangle ; calculer les angles, la surface et le rayon du cercle circonscrit.

Épure.

2130. — Intersection d'une sphère et d'un hyperboloïde de révolution. — *Sphère* de centre (o, o') : distance oo' : 20 centimètres ; rayon de la sphère : 7 centimètres.



Hyperboloïde de révolution : *Axe* (1, 1') de front, incliné de 45° sur la verticale.

La projection horizontale de l'axe passe par le point a tel que $oa = 2$ centimètres.

Génératrice (2, 2') parallèle à la ligne de terre et tangente à la sphère au point (b, o').

Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :

1° En projection horizontale, la partie de la sphère extérieure à l'hyperboloïde ;

2° En projection verticale, le solide commun à la sphère et à l'hyperboloïde.

On entend par volume de l'hyperboloïde la partie de l'espace qui contient l'axe de révolution et est limitée par la surface de l'hyperboloïde.

On demande de représenter en traits noirs discontinus ou en traits rouges les constructions d'un point quelconque, de sa tangente et des points remarquables avec leurs tangentes.

Titre et cadres inutiles. L'emploi du pistolet est interdit.

Physique et chimie.

I. — Formule du nivellement barométrique. Etablir la loi qui donne la pression atmosphérique en fonction de l'altitude.

II. — **2131.** Un aérostat sphérique se trouve en équilibre à l'altitude h. Calculer la tension T de l'enveloppe à la partie supérieure.

On négligera dans ce calcul les variations de masse spécifique de l'air et du gaz sur toute la hauteur du ballon.

Calculer sans avoir recours à l'approximation précédente :

1° La masse totale du ballon ;

2° La masse du gaz contenue dans le ballon ;

3° La tension T de l'enveloppe à la partie supérieure.

Données : R, rayon de l'aérostat qui est supposé de grandeur invariable. On maintient l'égalité de pression entre le gaz et l'atmosphère à l'orifice inférieur du ballon.

d, densité du gaz par rapport à l'air.

g, accélération de la pesanteur, au lieu donné, accélération qu'on supposera indépendante de l'altitude.

a, masse spécifique de l'air, à la température t et sous la pression d'une colonne de mercure de 760^{mm}, observée au lieu donné et supposée à 0°. On admettra que l'atmosphère est tout entière à la température t et immobile.

P, pression atmosphérique du lieu au niveau du sol.

m, masse spécifique du mercure à 0°.

h, altitude du centre de l'aérostat.

III. — Un certain poids de pentachlorure de phosphore est mis en longue digestion dans de l'eau en excès, puis la liqueur est évaporée jusqu'à consistance sirupeuse, à une température voisine de 150° ; on poursuit l'évaporation jusqu'à ce que le poids du résidu R ne varie plus. Les vapeurs dégagées ont été recueillies dans une solution de nitrate d'argent en excès. Le précipité blanc formé pesait, après dessiccation, $1^g,435$.

Le résidu R est redissous dans l'eau, puis additionné de soude en quantité insuffisante pour la neutralisation. La nouvelle liqueur est évaporée à siccité, puis calcinée au rouge et laisse un résidu r pesant $0^g,22$. On constate que la dissolution de r dans l'eau est complète, que la liqueur obtenue est neutre, et qu'elle donne avec le nitrate d'argent un précipité parfaitement blanc. On demande la composition centésimale du résidu r.

On prendra : $H = 1$, $O = 16$, $Cl = 35,5$, $P = 31$, $Na = 23$, $Ag = 108$.

QUESTIONS PROPOSÉES

2132. — Soient y_1, y_2, y_3 les ordonnées des pieds des normales à une parabole $y^2 = 2x$, issues du point $M(\alpha, \beta)$.

1° Le lieu des points M tels que

$$\frac{\Sigma y_1^{13}}{\Sigma y_1^2 + \Sigma y_1^{11}} = \lambda = \text{constante},$$

se compose, en général, d'une développée de parabole.

Si $\lambda = \frac{13}{22}$, le lieu est une droite double ; si $\lambda = \frac{13}{11}$, le lieu est une droite triple.

2° Le lieu des points M tels que

$$\frac{\Sigma y_1^{10}}{\Sigma y_1^2 + \Sigma y_1^{10}} = k,$$

se compose de deux développées de parabole.

3° Le lieu des points M tels que

$$\frac{\Sigma y_1^{24}}{(\Sigma y_1^2)^{10}} = k,$$

se compose de trois développées de parabole.

E.-N. Barisien.

2133. — La normale à une courbe (C) en un point M rencontre les axes de coordonnées aux points P et Q. Par l'origine, on mène les vecteurs OP', OQ' équipollents à MP et à MQ. Déterminer la courbe (C) de façon que les tangentes aux lieux de P' et de Q' soient parallèles.

J. Mourret, élève à l'Ecole normale supérieure.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Avril 1913. N° 7.

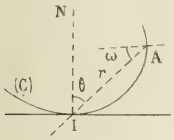
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR UNE FAMILLE DE COURBES

par M. **Raymond Berr**, élève à l'École Polytechnique.

Je me propose de trouver une courbe (C) telle que, si on la fait rouler sur une droite, le rayon de courbure de la trajectoire d'un point invariablement lié à cette courbe soit un multiple du rayon vecteur joignant le point au centre instantané.



Soient A le point jouissant de la propriété ;

ω, r les coordonnées polaires du centre instantané I, rapportées au point A et à un axe polaire quelconque invariablement lié à la courbe C ;

θ l'angle de AI avec la normale en I ;

R le rayon de courbure de la courbe (C) en I ;

ρ celui de la trajectoire du point A.

La formule de Savary s'écrit alors

$$(1) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r} = \frac{1}{R\cos\theta}.$$

Mais

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

et

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r'}{r}.$$

On en déduit, en portant les valeurs de R et de $\cos\theta$ dans (1),

$$(2) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r(r^2 + r'^2)}.$$

La condition imposée à la courbe (C) peut s'écrire

$$\rho = (n+1)r,$$

avec

$$n > -1.$$

parce que le centre de courbure de la trajectoire du point A est nécessairement du même côté que I par rapport à A. L'équation (2) devient alors

$$\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r(r^2 + r'^2)}$$

et, après réductions,

$$(n-1)r'^2 - nrr'' - r^2 = 0.$$

Cette équation se ramène immédiatement au premier ordre en posant

$$r'^2 = p,$$

d'où

$$r'' = \frac{1}{2}\frac{dp}{dr}.$$

Il vient
$$\frac{n}{2} r \frac{dp}{dr} - (n-1)p = -r^2,$$
équation linéaire.

L'équation privée du deuxième membre s'intègre immédiatement :
$$\frac{dp}{p} = \frac{2(n-1)}{n} \frac{dr}{r},$$
$$p = Cr^{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

Faisons maintenant varier la constante.

Il vient
$$\frac{n}{2} r \frac{dC}{dr} r^{\frac{2(n-1)}{n}} = -r^2,$$
$$dC = -\frac{2}{n} r^{\frac{2}{n}} dr,$$
et
$$C = \lambda^2 - r^{\frac{2}{n}},$$
λ^2 désignant une constante arbitraire.

Finalement on a
$$p = \lambda^2 r^{\frac{2(n-1)}{n}} - r^2,$$
d'où
$$d\omega = \frac{dr}{\sqrt{\lambda^2 r^{\frac{2(n-1)}{n}} - r^2}},$$
qu'on peut écrire
$$d\omega = \frac{dr \cdot r^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\lambda^2 - r^{\frac{2}{n}}}},$$
quadrature qui s'effectue aisément en posant
$$r^{\frac{1}{n}} = u$$

Il vient
$$d\omega = \frac{n\,du}{\sqrt{\lambda^2 - u^2}}.$$

Intégrant et désignant par α une constante arbitraire, il vient
$$\omega + \alpha = n \arccos \frac{u}{\lambda}.$$

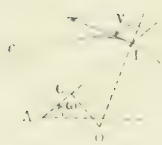
On peut d'ailleurs faire $\alpha = 0$ puisque l'axe polaire est resté jusqu'ici indéterminé.

On obtient donc en définitive
$$\frac{u}{\lambda} = \cos \frac{\omega}{n},$$
$$r = \lambda^n \cos^n \frac{\omega}{n}.$$

Telles sont les courbes cherchées.

Propriétés fondamentales de ces courbes.

Ces courbes jouissent de deux propriétés remarquables, relatives à la normale et au centre de courbure.



I. Si nous revenons à la formule de Savary et que nous y fassions
$$\rho = (n+1)r,$$
elle devient
$$\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{R\cos\theta},$$
$$R = \frac{\frac{n}{n+1} r}{\cos\theta}.$$

tal ; on construit la parabole de sommet c en remarquant que l'ordonnée du point α de la circonférence de rayon 6 et de centre o est donnée par

$$y^2 = 36 - 4 = 32$$

Le paramètre p de la parabole résulte donc de la relation

$$32 = 2p \times 8,$$

puisque l'abscisse du point α par rapport au sommet est $6 + 2 = 8$. Donc $p = 2$. Le paramètre est égal au rayon du cercle de gorge et l'on a ainsi le foyer f et le pied de la directrice d. On peut alors construire la parabole par points.

Le cône ayant pour plan de symétrie le plan de front passant par son sommet, son contour apparent vertical se compose de la génératrice $s'\gamma$ et de la génératrice horizontale $s'h'$, et la courbe d'intersection aura sa projection horizontale symétrique par rapport à cs.

Intersection des solides. — Pour trouver la courbe d'intersection des deux solides, nous les couperons par des plans horizontaux. Chaque plan donne sur le tore deux parallèles qui se projettent suivant des circonférences concentriques, et sur le cône une parabole égale à la base, dont le sommet est à l'intersection de la génératrice ($s'\gamma$, sc) avec le plan du parallèle, l'axe se projetant toujours sur l'axe de la parabole donnée. Pour avoir l'intersection de ces deux sections planes, il suffit de les projeter sur le plan horizontal ou plutôt d'en prendre la perspective en plaçant le point de vue au sommet du cône : toutes les paraboles viennent alors se placer sur la base du cône, les parallèles du tore donnent des cercles concentriques de centre o. Prenons par exemple le plan horizontal qui coupe la méridienne principale du tore au point g' ; la perspective de ce parallèle a pour rayon $\omega g'_1$ et le cercle de rayon og_1 coupe la parabole en m_1, m'_1, qui font connaître la génératrice (sm_1, $s'm'_1$) sur laquelle on prend le point (m, m') d'intersection par le parallèle g'. On a ainsi pour chaque parallèle autant de points qu'il y en a de communs à la parabole et au cercle og_1 correspondant. La tangente en (m, m') est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point : le plan tangent au cône a pour trace horizontale la tangente en m_1 à la parabole et le plan tangent au tore a pour trace une perpendiculaire au rayon om à la même distance du point o que la trace du plan tangent en (g', g) qui est défini par le point (t_2, t'_2) ; c'est donc la droite t_1t dont l'intersection avec la tangente à la parabole en m_1 donne un point de la tangente cherchée (tm, $t'm'$).

On doit remarquer que le parallèle intérieur k' défini par le second point d'intersection de la génératrice $s'g'$ avec la méridienne du tore a la même perspective que le premier, et par suite la construction précédente donne en même temps le point (n, n') de la courbe d'intersection, où la tangente a été construite de la même manière en faisant tourner le plan tangent au tore le long du parallèle k'.

Parallèles limites. — On obtient les rayons des parallèles limites en menant du point o les normales à la parabole ; l'une est évidemment $o\alpha$ qui donne le parallèle passant en α mais qui n'est tangent à la courbe d'intersection qu'au point c, l'autre s'obtient en portant la sous-normale ob qui fait connaître le pied β_2 de la normale ; la perspective du parallèle correspondant est donc la circonférence $o\beta\beta_1$ qui correspond à la génératrice $s'\beta'_1$ et celle-ci fait connaître les deux parallèles limites l'_1 et l'_2 sur chacun desquels on a le point λ' à tangente horizontale à son intersection avec la génératrice $s'\beta'$. En chacun des points λ_1 et λ_2 la courbe est tangente au parallèle qui y passe. Pour la même raison la projection verticale de la courbe est tangente en γ au parallèle le plus bas du tore.

Génératrices limites. — On peut remarquer que la construction d'un point courant donnée plus haut revient à celle que l'on devrait faire si l'on coupait les deux surfaces par des plans verticaux passant par l'axe du tore. Chaque plan donnerait sur le tore une section méridienne, et sur le cône deux génératrices, que l'on pourrait amener dans le plan méridien de front par une rotation autour de l'axe, et les points communs aux génératrices et à la méridienne du tore donneraient des points de la courbe d'intersection. Ces points n'existent que si les génératrices coupent la méridienne correspondante ; on aura donc les génératrices limites en construisant le cône circonscrit au tore par le point s, et en prenant les génératrices communes à ce cône et au cône donné. Il existe en réalité deux cônes circonscrits au tore par le point s, mais celui qui a pour génératrice la tangente à la méridienne dont le point de contact est au-dessous du cercle de gorge est entièrement intérieur au cône donné et par suite ne donnerait rien.

Prenons donc le cône engendré par la tangente $s'u'$ dont le parallèle horizontal de cote zéro a pour rayon ou_1 et coupe la parabole en v_1 qui fait connaître la génératrice limite v_1sv dont le point de contact avec la courbe est sur le parallèle $u'v'$.

Points remarquables. — Les points sur le contour apparent vertical du cône sont à l'intersection des méridiennes des deux surfaces, aux points w' et b' : ce sont en même temps ceux du contour apparent vertical du tore. En chacun de ces points par conséquent la tangente à la courbe de l'espace est de bout et la construction ordinaire de la tangente est en défaut pour la projection verticale, où la courbe n'est pas tangente au contour

apparent du tore, sauf au point γ. On doit alors, pour obtenir la tangente en ces points, chercher la trace verticale du plan osculateur à la courbe d'intersection, qui est un plan de bout, et dont l'axe est défini par les centres de courbure des sections normales à chaque surface menées par la tangente de bout. On obtient d'ailleurs ces centres de courbure soit par la construction directe relative aux coniques en leur sommet, soit en appliquant le théorème de Meusnier.

Par exemple, au point w'_2 la section normale du cône est une hyperbole dont on a les asymptotes, parallèles aux génératrices de profil du cône donné, et le sommet w'_2; on sait que le centre de courbure s'obtient en construisant la troisième proportionnelle aux deux axes de l'hyperbole, soit $\rho = \frac{b^2}{a}$. Nous avons en $s'\delta'_1$ le rabattement de la génératrice de profil $s\delta$ sur le plan méridien, et en lui menant la parallèle par le milieu i' de la corde verticale passant par w'_2 nous obtenons le rabattement de l'asymptote $i'z'_1$ d'où l'axe non transverse $b = w'_2z'_1$ et le centre de courbure η' en menant la perpendiculaire $z'_1\eta'$ à $i'z'_1$. D'autre part le centre de courbure de la section normale au tore est sur le prolongement du rayon $c'w'_2$ et d'après le théorème de Meusnier c'est le point qui se projette sur le plan horizontal w'_2 au centre s' du parallèle. C'est donc le point ζ'. Par suite l'axe du plan osculateur est la droite $\eta'\zeta'$ et la tangente en w'_2 lui est perpendiculaire.

On a les points sur le contour apparent horizontal du tore en appliquant la méthode qui a donné un point courant aux deux parallèles de contour apparent. Nous avons fait les constructions pour le point (r, r') et la tangente en ce point $(\theta r, \theta' r')$.

Enfin nous obtenons les points doubles de la projection horizontale en prenant l'intersection des plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces. Pour le tore, c'est le plan horizontal du centre, et pour le cône c'est le plan de bout qui passe par la droite $s'r'$. Leur intersection est la droite de bout pp', qui est la droite des points doubles.

Ponctuation. — Quand on enlève le cône il ne reste de son contour apparent vertical que les portions de génératrice intérieures au tore, et qui sont cachées. Au contraire les arcs du contour apparent du tore qui sont intérieurs à l'angle formé par les génératrices de contour apparent du cône disparaissent; la ponctuation de la courbe d'intersection ne présente plus aucune difficulté.

QUESTIONS PROPOSÉES

2137. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(E) \qquad x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = \frac{c}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2° Quelle relation y a-t-il entre les courbes intégrales de l'équation (E) et la courbe

$$(C) \qquad y = \frac{-c}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\ ?$$

3° Construire la courbe (C).

4° La courbe (C) coupe-t-elle la droite $y = -\frac{3}{2}$?

(*Certificat de mathématiques générales. Lyon, juin 1912.*)

2138. — On donne un cercle de centre O et un point fixe, A, de ce cercle.

Un diamètre variable MOM′ coupe la tangente en A en un point P.

1° Trouver le lieu des centres des cercles, circonscrits aux triangles PAM et PAM′, et l'enveloppe de ces cercles.

2° Trouver l'enveloppe des bissectrices de l'angle APO.

3° Montrer que le lieu des centres de gravité des triangles PAM et PAM′ est une conchoïde de Nicomède.

4° Construire le lieu des orthocentres des triangles PAM et PAM′.

5° Trouver l'aire comprise entre la courbe et les asymptotes, ainsi que l'aire limitée par le cercle et la courbe.

R. Manen, à Albi.

2139. — A une dissolution d'hyposulfite de soude, on ajoute une dissolution d'iode dans l'iodure de potassium jusqu'à persistance de la couleur de l'iode. On fait ensuite passer du chlore à refus et on chasse l'excès de ce gaz par une ébullition de quelques instants, puis on fait de même avec du gaz sulfureux. L'azotate d'argent produit dans la liqueur finale un précipité qui pèse 0g,393 et l'azotate de baryum un précipité qui pèse 3g,728. Exprimer, en millimolécules, la composition de la dissolution d'iode dans l'iodure de potassium.

O = 16, Az = 14, S = 32, Cl = 35,5, I = 127, K = 39, Ba = 137, Ag = 108.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET. *Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

D'où la construction suivante du centre de courbure en un point I d'une courbe (C) :

On joint I *au pôle* A *et on porte sur* IA *une longueur*

$$IC = \frac{n}{n+1} IA.$$

Le centre de courbure O *est l'intersection de la normale en* I *à la courbe et de la perpendiculaire en* C *à* AI.

II. Cherchons à déterminer sans ambiguïté l'angle V que fait la demi tangente dans le sens des ω croissants avec le rayon vecteur AI.

On a, d'une part,

$$(a) \qquad \operatorname{tg} V = \frac{r'}{r'} = -\cot g \frac{\omega}{n}.$$

et, de l'autre,

$$\sin V = \frac{r d\omega}{ds}.$$

Un calcul facile donne

$$ds = \sqrt{r^2 d\omega^2 + dr^2}$$
$$= \lambda^n \cos^{n-1} \frac{\omega}{n} d\omega.$$

D'où

$$(b) \qquad \sin V = \cos \frac{\omega}{n}.$$

Les relations (a), (b) donnent respectivement

$$V = \frac{\omega}{n} - \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\begin{cases} V + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n} = (2k+1)\pi. \\ V = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n} + 2k\pi. \end{cases}$$

Les seules valeurs pouvant convenir à la première égalité et à l'une des deux autres sont

$$V = \frac{\omega}{n} - \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi,$$

c'est-à-dire

$$V = \frac{\omega}{n} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

et, si on convient de prendre pour V le plus petit angle,

$$V = \frac{\omega}{n} - \frac{\pi}{2},$$

ce qu'on peut énoncer :

L'angle de la demi-normale, qui fait l'angle $-\frac{\pi}{2}$ *avec la demi-tangente dans le sens des* ω *croissants, et du rayon vecteur est égal à* $\frac{\omega}{n}$.

Dans tous les cas où n sera fractionnaire ou entier de la forme 2^p on pourra construire la normale par la règle et le compas.

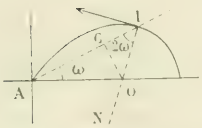
Cas particuliers remarquables.

1. Faisons $n = 1$, $\rho = 2r$.

La courbe (C) est un *cercle*, $r = \lambda \cos \omega$,

et A est un point quelconque de la circonférence.

On retrouve ainsi une propriété connue du rayon de courbure de la cycloïde.



2 Faisons $n = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{3}{2}r$.

La courbe (C) est une *lemniscate*,

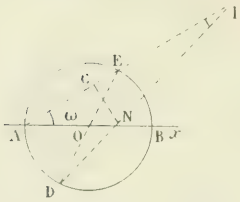
$$r^2 = \lambda \cos 2\omega$$

et A est le point double.

Les propriétés (I) et (II) donnent deux théorèmes intéressants relatifs à la lemniscate :

La normale fait avec le rayon vecteur un angle double de l'angle polaire.

Le centre de courbure en un point I s'obtient en élevant la perpendiculaire au rayon polaire au point situé au tiers de ce rayon à partir du point I, et prenant son intersection avec la normale.



3 Faisons $n = 2$, $\rho = 3r$.

La courbe (C) est une *cardioïde*,

$$r = r^2 \cos^2 \frac{\omega}{2},$$

ou

$$r = \frac{\lambda^2}{2}(1 + \cos \omega),$$

et le point A en est le point de rebroussement.

La propriété (II) exprime que l'angle de la normale et du rayon polaire est la moitié de l'angle polaire IAx.

Considérons le cercle O dont la cardioïde est la conchoïde.

Soit E son intersection avec AI.

Joignons EO, qui rencontre la normale en I au point D.

On a $\widehat{AEO} = \omega$,

et, comme $\widehat{EID} = \frac{\omega}{2}$, on a $\widehat{EDI} = \frac{\omega}{2}$.

Le triangle EID est isocèle et

$$ED = EI = AB.$$

Donc le point D est sur le cercle (O).

D'où la construction connue de la normale à la cardioïde :

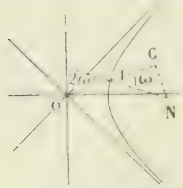
On joint AI qui rencontre ce cercle O en E. On mène le diamètre EOD. La normale est la droite ID.

D'après la propriété (I), *on aura le centre de courbure en portant sur IA une longueur* $IC = \frac{2}{3}IA$ *et en élevant en C la perpendiculaire à IA.*

4. Faisons $n = -\frac{1}{2}$, $\rho = \frac{r}{2}$.

La courbe (C) est une hyperbole équilatère,

$$r^2 = \frac{1}{\lambda \cos 2\omega},$$



dont A est le centre et l'axe polaire l'axe transverse.

Les propriétés I et II se traduisent alors :

La normale en un point I d'une hyperbole équilatère et le rayon central OI sont également inclinés sur l'axe transverse.

Le centre de courbure est sur la perpendiculaire au rayon central qui passe au point C à la distance 2OI du point O sur ce rayon.

La comparaison de ce paragraphe et du paragraphe 2 conduit au théorème suivant :

Si on considère une lemniscate et une hyperbole équilatère ayant même centre et même axe transverse, en tout point d'intersection le rayon central est bissectrice de l'angle des deux courbes.

5. Faisons $$n = \infty, \qquad \rho = \infty.$$

En d'autres termes :

Cherchons une courbe telle que, si on la fait rouler sur une droite, un point invariablement lié à cette courbe décrive une droite.

Revenons à l'équation (2) du début.

Si on y fait $$\rho = \infty,$$

il reste $$r'^2 = rr'',$$

équation qui s'intègre immédiatement :

$$\frac{r'}{r} = \frac{r}{r'}, \qquad \frac{r'}{r} = \lambda,$$

et, intégrant une deuxième fois,

$$r = Be^{\lambda\omega},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

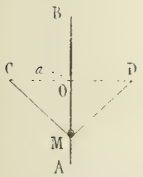
La spirale logarithmique est donc la seule courbe répondant à la question, et le point qui décrit une droite est son pôle.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1912 (*Suite*).

Mécanique.

2038. — *Une sorte d'arbalète est formée d'un tube rectiligne et d'un fil élastique. Le fil* CMD *est fixé par ses extrémités à deux points* C *et* D *de l'arbalète. Il sert, par son élasticité, à lancer un projectile* M *guidé par le tube dont l'axe* AOB *est perpendiculaire au milieu* O *de* CD.



Ouvert en B, *fermé en* A, *le tube est évidé latéralement de* A *en* O, *de façon à laisser libre passage au fil.*

Pour lancer le projectile, on l'amène à l'extrémité A *de sa course, de façon à tendre le fil élastique ; puis on l'abandonne à la réaction du fil.*

On donne $OB = OC = OD = a$; $OA = \frac{4a}{3}$. *Le fil a une section et une masse négligeables. Non tendu, il a pour longueur naturelle* CD. *Tendu suivant la ligne brisée* CMD, *il agit sur* M, *pendant le mouvement, comme la corde agit sur la poulie, dans l'étude statique de la poulie mobile. Sa tension, proportionnelle à l'allongement, a pour expression* $k\frac{CM - CO}{CO}$.

Le projectile est assimilé à un point matériel de masse m ; *l'action du tube sur lui est assimilée à celle d'un plan incliné qui aurait pour ligne de plus grande pente l'axe du tube, le coefficient de frottement* f *ayant la même valeur au départ et pendant le mouvement.*

1° *Déterminer* k *et* f *par les conditions suivantes : l'arme étant verticale, la masse* m *doit être portée à* 112^g *pour que son poids suffise à faire descendre le fil élastique jusqu'au point* A. *Cette masse demeure en* A *pour toutes les positions de* BA *faisant avec la verticale ascendante un angle* θ *inférieur à* $\frac{\pi}{2}$, *mais elle part dès que* θ *dépasse* $\frac{\pi}{2}$.

2° *Avec les valeurs trouvées pour k et f, mais pour les diverses valeurs imaginables de m, étudier en fonction de θ la portée de l'arbalète, c'est-à-dire la distance du point B de l'arbalète au point de chute du projectile sur le plan horizontal du point B.*

Remarquons que $$CA = \frac{5a}{3}.$$

Prenons, sur l'arbalète, comme origine le point O : pour sens positif celui de A vers B. Posons

$$\overline{OM} = x.$$

De A en O, x variera de $-\frac{4a}{3}$ à 0, et l'on aura

$$\cos\widehat{CMO} = \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Donc, dans le mouvement de A en O, l'expression de la force due à la tension du fil sera

$$-2k\left[\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}-1\right]\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2k\left[\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{x}{a}\right].$$

1. L'expression de la force due à la tension du fil est, au point A, $\frac{16k}{15}$. Elle fait équilibre à un poids qui est $112g$; donc $k = 105g$.

Inclinons l'arme. Au moment du départ, l'angle de la résultante des forces directement appliquées sur le point avec la normale à l'arme est égal à l'angle de frottement. Ici, ceci se produit quand l'arme est horizontale.

La composante horizontale et la composante verticale des forces directement appliquées sont toutes deux égales à $112g$. Donc $f = 1$.

Dans ce qui suit, nous prendrons ces valeurs particulières pour k et f.

2. Supposons maintenant que la masse du projectile soit m et que l'inclinaison de l'arbalète sur la verticale soit θ.

Le projectile est soumis à son poids, mg, dont la composante normale à l'arbalète est $mg\sin\theta$ et la composante sur l'arbalète vers le bas est $mg\cos\theta$. En plus, il est soumis à la force due à la tension du fil qui est $112g$.

Pour que ce projectile puisse partir, il faut d'abord que

$$mg\cos\theta < 112g$$

et que $$112g - mg\cos\theta > mg\sin\theta.$$

La seconde condition entraîne la première et donne

$$m > \frac{112}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

Supposons cette condition remplie. Dans le mouvement de A en O, l'équation différentielle à intégrer est $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg(\cos\theta+\sin\theta)+210g\left[\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{x}{a}\right];$$

$-mg\sin\theta$ est la force de frottement.

Dans ce mouvement, nous voulons avoir seulement la vitesse au point O, soit v_0. Nous allons donc appliquer le théorème des forces vives sous la forme intégrale. Nous aurons

$$\frac{mv^2}{2} = -mgx(\cos\theta+\sin\theta)+210g\sqrt{a^2+x^2}-210g\frac{x^2}{2a}+C.$$

Appliquons cette égalité pour le point O où v est égal à v_0 et x nul, et pour le point A où v est nul et x égal à $-\frac{4a}{3}$; il viendra, en retranchant,

$$mv_0^2 = \frac{8ag}{3}\left[35-m(\cos\theta+\sin\theta)\right].$$

Ici, nous devons supposer

$$m < \frac{35}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

Du point O au point B, l'équation différentielle du mouvement est

$$mr'' = -mg(\cos\theta - \sin\theta).$$

Nous ne voulons avoir que la vitesse en B, soit v_1. Le théorème des forces vives donne immédiatement

$$\frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2} = -mga(\cos\theta + \sin\theta) \qquad \text{ou} \qquad v_1^2 = v_0^2 - 2ga(\cos\theta + \sin\theta).$$

Il suffit de remplacer v_0 par sa valeur pour obtenir

$$v_1^2 = \frac{14ag}{3}\left[\frac{20}{m} - \cos\theta - \sin\theta\right].$$

Donc le projectile n'arrivera en B que si

$$m < \frac{20}{\cos\theta - \sin\theta}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule qui donne la portée X dans le mouvement des projectiles dans le vide pour obtenir

$$X = \frac{28a}{3}\sin\theta\cos\theta\left[\frac{20}{m} - \cos\theta - \sin\theta\right].$$

Nous voulons étudier les variations de cette fonction de θ, θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, avec cette restriction que X doit être positif.

X reprend la même valeur pour deux valeurs complémentaires de θ. Il suffit donc de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$ ou de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$. Il est commode de changer de variable et de poser

$$\lambda = \theta - \frac{\pi}{4}.$$

On a alors $\qquad \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos\lambda, \qquad \sin 2\theta = \cos 2\lambda,$

et, par suite,

$$X = \frac{14a\sqrt{2}}{3}\cos 2\lambda\left[\frac{10\sqrt{2}}{m} - \cos\lambda\right].$$

Si θ varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, λ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Occupons-nous du signe de X.

1° $m < 10\sqrt{2}$. X est toujours positif quel que soit λ. On peut se servir de l'arme avec toute inclinaison.

2° $m > 10\sqrt{2}$. Pour que la valeur aigüe de λ donnée par $\cos\lambda = \frac{10\sqrt{2}}{m}$ soit acceptable, il suffit alors qu'elle soit supérieure (ou, à la limite, égale) à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne $m < 20$. Donc si m est supérieur à 20, on ne peut jamais se servir de l'arme quelle que soit la valeur de θ, X étant toujours négatif. Au contraire, si $20 > m > 10\sqrt{2}$, on peut poser $\cos\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{m}$, α étant compris entre $\frac{\pi}{4}$ et 0, et l'on a

$$X = \frac{14a\sqrt{2}}{3}\cos 2\lambda(\cos\alpha - \cos\lambda).$$

et X est positif à condition que λ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Prenons maintenant la dérivée. Tous calculs faits, on obtient

$$X' = \frac{14a\sqrt{2}}{3}\sin\lambda\left[6\cos^2\lambda - \frac{40\sqrt{2}}{m}\cos\lambda - 1\right].$$

$\sin\lambda$ est positif ou nul dans l'intervalle que nous considérons. Posons

$$f(\lambda) = 6\cos^2\lambda - \frac{40\sqrt{2}}{m}\cos\lambda - 1.$$

L'équation $f(\lambda) = 0$ ne peut avoir au plus qu'une racine comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Il suffira, pour préciser ce point, de substituer 0 et $\frac{\pi}{4}$:

$$f(0) = \frac{5}{m}(m - 8\sqrt{2}), \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{m}(m - 20),$$

et de comparer les signes des résultats.

Voici des tableaux résumant la discussion :

$m < 8\sqrt{2}$

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
λ	0		$\frac{\pi}{4}$
X'		négatif	
X	$\frac{14a\sqrt{2}}{3}\left(\frac{10\sqrt{2}}{m} - 1\right)$	décroît	0

$8\sqrt{2} < m < 10\sqrt{2}$

θ	$\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{2}$
λ	0		α		$\frac{\pi}{4}$
X'	0	+	0	—	
X		croît	maximum	décroît	0

$10\sqrt{2} < m < 20$

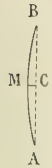
θ	$\frac{\pi}{4}$					$\frac{\pi}{2}$
λ	0	α		α'		$\frac{\pi}{4}$
X'	+		0	—		
X	négatif	0 croît	positif	maximum	décroît	0

Très bonne solution : M. Thévenin, élève au lycée de Reims.
Bonne solution : M. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

Calcul.

2040. — *La corde* AB *et la flèche* CM *d'un arc de cercle* AMB *ont pour longueurs*

$$AB = 31^{m},30 \qquad \text{et} \qquad CM = 1^{m},16.$$



1° *Calculer la longueur* l *de l'arc* AMB *par les tables de logarithmes à cinq décimales, avec l'approximation que ces tables comportent.*

2° *Calculer* l *avec la même approximation, sans faire usage des tables.*

Données $\begin{cases} AB = 3130^{cm} \\ CM = 116^{cm} \end{cases}$ Inconnue : $\widehat{AMB} = 31^{m},415$

Formules : $CB = R \sin\varphi$; $CM = R(1 - \cos\varphi) = 2R \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{CM}{CB} = \frac{2CM}{AB} : \qquad \widehat{AMB} = 2R\varphi = \frac{\varphi}{\sin\varphi} AB.$$

Calcul de φ en grades.

$\log 2 = 0,30103$
$\log 116 = 2,06446$
$\operatorname{colog} 3130 = \overline{4},50446$

$\log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \overline{2},86995 \qquad \Delta = 93$

pour $\overline{2},86993 \quad 4^{\circ}\,71'$
$\qquad\qquad \overline{2} \qquad\quad 2$

$\frac{\varphi}{2} = 4^{\circ}\,71'\,02''$

$\varphi = 9^{\circ}\,42'\,04''$

Calcul de $\widehat{AMB}$.

$\log 0,1479 = \overline{1},16997 \qquad \Delta = 29$
$\qquad 8 \qquad\qquad 23$

$\log \varphi = \overline{1},17020$
$\log \sin 9^{\circ}\,42' = \overline{1},16858 \qquad \Delta = 44$
$\qquad 4' \qquad\qquad 2$

$\log \sin\varphi = \overline{1},16860$
$\operatorname{colog} \sin\varphi = 0,83140$

Calcul de φ en radians.

$9^{\circ} = 0,1413717$
$40' = 0,0062831$
$2' = 0,0003141$
$4'' = 0,0000063$

$\varphi = 0,1479752$
$\varphi = 0,14798$

$\overline{1},17020$
$3,49554$
$0,83140$

$3,49714 \qquad \Delta = 14$
pour $3,49707 \qquad 3141$
$\qquad 7 \qquad\qquad 5$

$\widehat{AMB} = 3141^{cm},5$

Pour faire ce calcul, sans faire usage des tables, il suffit de poser $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = x = \frac{2CM}{AB}$ et de développer arc tg x en série ; on a ainsi

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Comme x est plus petit que $\frac{1}{10}$, il suffira évidemment de prendre les deux premiers termes et on aura ainsi

$$\widehat{AMB} = 4Rx\left(1 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Or $4R = \dfrac{2CM}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 2CM \dfrac{1 + x^2}{x^2}$, et, comme $2CM = x \cdot AB$, nous avons

$$\widehat{AMB} = AB(1 + x^2)\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = AB\left(1 + \frac{2x^2}{3}\right).$$

Ce calcul facile donne

$$\widehat{AMB} = 31^m,4145\ldots$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, A. Rousseau ; B. Frolert, à Paris ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; A. Courtois.

QUESTIONS PROPOSÉES

2134. — Reconnaître la convergence ou la divergence de la série

$$\frac{x}{3!} + \frac{x(1-x)}{4!} + \frac{x(1-x)(2-x)}{5!} + \frac{x(1-x)(2-x)(3-x)}{6!} + \cdots$$

et, dans le cas où elle est convergente, démontrer que la somme a pour valeur $\dfrac{x}{2(x+2)}$; on suppose que, si x est positif, x n'est pas un nombre entier.

A. Macé de Lépinay.

2135. — Etant donnée l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + 4m(m+1)y = 0,$$

on demande :

1° de démontrer que cette équation admet comme solution particulière

$$y_1 = \frac{\cos[(2m+1)\arcsin x]}{\sqrt{1 - x^2}} ;$$

2° de trouver l'intégrale générale de l'équation ;

3° de démontrer que, si m est un nombre entier et positif, on peut satisfaire à l'équation différentielle par un polynome entier en x ; trouver son degré, puis calculer ses coefficients.

A. Macé de Lépinay.

2136. — On considère la surface qui, rapportée à trois axes rectangulaires, a pour équation

$$z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

1° Montrer que sur cette surface il y a une infinité de droites.

2° Construire, à l'aide si l'on veut des coordonnées polaires, les projections sur le plan des xy des sections (courbes de niveau) faites par des plans parallèles à xOy.

3° Déterminer la projection sur le plan xOy des lignes de plus grande pente de la surface.

4° Déterminer le volume compris entre le plan $z = 0$, la surface donnée et la surface prismatique dont les faces ont respectivement pour équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

On appelle lignes de plus grande pente des courbes tracées sur la surface et coupant à angle droit les lignes de niveau.

(Certificat de mathématiques générales, Lyon, juin 1912.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1912.

Mathématiques.

2071. – *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires fixes* Ox *et* Oy *et un point* A *fixe, d'abscisse donnée, négative,* $-a$, *sur* Ox.

1° *Former l'équation de l'hyperbole équilatère* (H) *ayant pour centre le point* A *et un sommet à l'origine* O, *et celle de la parabole* (P) *ayant pour foyer l'origine* O *et pour directrice la perpendiculaire à* Ox *en* A.

2° *En un point* M$(x = \alpha,\ y = \beta)$ *de* (H), *on lui mène la tangente* (T) ; M *décrivant* (H), *trouver et construire le lieu du pôle* S *de* (T) *par rapport à* (P).

3° *Trouver et construire le lieu du point* S′ *intersection de* (T) *et de la droite* OS.

1. L'équation de l'hyperbole équilatère (H) est de la forme

$$(x+a)^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

ou

$$\text{(H)} \qquad x^2 - y^2 + 2ax = 0,$$

et celle de la parabole P,

$$x^2 + y^2 = (x+a)^2,$$

ou

$$\text{(P)} \qquad y^2 - 2ax - a^2 = 0.$$

2. La tangente à l'hyperbole (H) en un point M(α, β) a pour équation

$$\text{(T)} \qquad (\alpha + a)x - \beta y + \alpha a = 0.$$

Soient x, y les coordonnées du pôle S de cette tangente par rapport à la parabole (P), on a

$$\frac{-a}{\alpha + a} = \frac{y}{-\beta} = \frac{-ax - a^2}{\alpha a},$$

d'où on déduit

$$\text{(S)} \qquad x = -\frac{a^2}{\alpha + a}, \quad y = \frac{a\beta}{\alpha + a}.$$

On aura l'équation du lieu de S en éliminant α et β entre les expressions des coordonnées de S et l'équation de condition

$$\text{(1)} \qquad \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha = 0$$

qui exprime que M(α, β) est un point de l'hyperbole (H). On a aisément $\alpha = -\dfrac{a(x+a)}{x}$, $\beta = \dfrac{-ay}{x}$, d'où l'équation du lieu

$$a^2(x+a)^2 - a^2y^2 - 2a^2x(x+a) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{(S)} \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0\,;$$

c'est l'équation du cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon.

3. S′ est l'intersection de OS dont l'équation est

$$\beta x + ay = 0$$

avec la tangente (T). Des équations de ces deux droites on tire

$$\beta = -\frac{ay}{x}, \qquad \alpha = -a\frac{x^2+y^2}{x(x+a)}.$$

Portant dans l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad (x^2+y^2)^2 - y^2(x+a)^2 - 2x(x+a)(x^2-y^2) = 0$$

ou bien

$$(S) \qquad (x^2+y^2)(y^2-x^2-2ax) - y^2(x+a)^2 = 0.$$

Le lieu du point S′ est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport à Ox et présentant à l'origine un point de rebroussement. Comme on pouvait le prévoir, elle est tout entière dans la région extérieure à l'hyperbole H $(x^2-y^2+2ax<0)$.

En ordonnant par rapport à y, il vient

$$y^4 - [(x+a)^2+2ax]y^2 - x^2(x+a)^2 = a^2 = 0.$$

La discussion de cette équation bicarrée en y nous montre que, de $-\infty$ à $-2a$, on aura deux valeurs réelles de y égales et de signes contraires ; de $-2a$ à $-\frac{a}{5}$, les valeurs de y sont imaginaires ; de $-\frac{a}{5}$ à 0, on a quatre valeurs réelles, égales et de signes contraires ; enfin de 0 à $+\infty$, deux valeurs réelles seulement, égales et de signes contraires. C'est à peu près tout ce qu'on peut tirer de l'équation cartésienne.

Pour construire la courbe, nous ferons usage de coordonnées polaires. En groupant dans l'équation (2) les termes extrêmes, on obtient

$$x^2+y^2-x(x+a)^2 - x^2+y^2(x+a)^2 = 0$$

ou mieux

$$(y^2-ax)^2 - x^2+y^2)(x+a)^2 = 0.$$

Transformant en coordonnées polaires, il vient

$$\rho^2(\rho\sin^2\omega - a\cos\omega)^2 - \rho^2(\rho\cos\omega+a)^2 = 0$$

ou, suppression faite du facteur ρ^2 qui correspond au point double situé à l'origine,

$$\rho\sin^2\omega - a\cos\omega = \pm(\rho\cos\omega+a).$$

On trouve ainsi deux équations distinctes :

$$\rho = \frac{a(1+\cos\omega)}{\sin^2\omega-\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{a(1-\cos\omega)}{\sin^2\omega+\cos\omega},$$

qui toutes deux représentent la courbe ; on passe de l'une à l'autre en remplaçant ω et ρ par $\omega+\pi$ et $-\rho$.

Prenons l'équation

$$\rho = a\frac{1+\cos\omega}{\sin^2\omega-\cos\omega} = a\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega-\cos^2\omega}.$$

Pour avoir toute la courbe, il suffira de faire varier ω dans un intervalle 2π, par exemple de $-\pi$ à $+\pi$. D'ailleurs ρ ne change pas quand on change ω en $-\omega$ (symétrie par rapport à Ox) ; il suffit donc d'étudier la courbe pour

$$0 \leq \omega \leq \pi.$$

ρ s'annule pour $\cos\omega = -1$ $(\omega = \pi)$ et devient infini pour $\cos\omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \cos\varphi$, (ou $-\varphi$, nous conserverons l'angle φ dans les calculs). Enfin, la dérivée

$$\rho' = -a\sin\omega\frac{2+2\cos\omega+\cos^2\omega}{(1-\cos\omega-\cos^2\omega)^2}$$

est toujours négative, et ρ décroît constamment.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\rho = a$, $\rho' = -2a$, $\operatorname{tg} V = -\frac{1}{2}$; la courbe passe au point B sur l'axe des y et la tangente en ce point est la droite BI qui joint le point B au milieu I de OA.

ω	ρ
0	$-2a$
	décroît
φ	$-\infty$
	$+\infty$
	décroît
$\frac{\pi}{2}$	a
	décroît
π	0

Le point S' s'éloigne à l'infini pour $\omega = \varphi \left(\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Remarquons que $IB = a\frac{\sqrt{5}}{2}$; rabattant IB sur l'axe des x, en IC, on aura $OC = IC - IO = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$; les directions asymptotiques de la courbe sont OD et OD'.

Cherchons l'asymptote qui correspond à la direction OD. Les racines de $1 - \cos\omega - \cos^2\omega$ sont $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $-1 - \cos\varphi = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On a donc

$$1 - \cos\omega - \cos^2\omega = (\cos\varphi - \cos\omega)(1 + \cos\varphi + \cos\omega).$$

Nous devons considérer l'expression

$$\rho\sin(\omega-\varphi) = a\frac{1+\cos\omega}{1+\cos\varphi+\cos\omega}\times\frac{\sin(\omega-\varphi)}{\cos\varphi-\cos\omega} = a\frac{1+\cos\omega}{1+\cos\varphi+\cos\omega}\cdot\frac{\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}}$$

dont la limite pour $\omega = \varphi$ est

$$h = a\frac{1+\cos\varphi}{1+2\cos\varphi}\times\frac{1}{\sin\varphi} = a\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}}{\sqrt{5}} = a\times 0{,}92\ldots$$

En prenant, sur la direction directement perpendiculaire à OD, $\overline{OH} = h$, on a le pied H de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'asymptote. On en déduit l'asymptote Δ.

Pour étudier la disposition de la courbe par rapport à son asymptote, il faut étudier le signe de la différence

$$\delta = \rho\sin(\omega-\varphi) - h = a\left[\frac{1+\cos\omega}{1+\cos\varphi+\cos\omega}\cdot\frac{\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}} - \frac{1+\cos\varphi}{1+2\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\right].$$

Pour cela posons $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = m$, il vient

$$\frac{1+\cos\omega}{1+\cos\varphi+\cos\omega}\cdot\frac{\cos\frac{\omega-\varphi}{2}}{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}} = \frac{2(1+m^2)}{3+m^2+(1-m^2)t^2}\cdot\frac{1+mt}{m+t}.$$

$$\frac{1+\cos\varphi}{1+2\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\varphi} = \frac{2(1+m^2)}{(1+m^2)(3-m^2)}\cdot\frac{1+m^2}{2m} = \frac{2(1+m^2)}{2m(3-m^2)}.$$

$$\delta = 2a(1+m^2)\left[\frac{1+mt}{(m+t)[3+m^2+(1-m^2)t^2]} - \frac{1}{2m(3-m^2)}\right]$$

$$= 2a(1+m^2)\frac{2m(3-m^2)(1+mt)-(m+t)[3+m^2+(1-m^2)t^2]}{2m(3-m^2)(m+t)[3+m^2+(1-m^2)t^2]}$$

$$= a\frac{(1-m^4)}{m(3-m^2)}\times\frac{(m-t)(3+2mt+t^2)}{(m+t)[3+m^2+(1-m^2)t^2]}.$$

t variant de 0 à $+\infty$, ζ s'annule pour $t = m$ ($\omega = \varphi$) en passant du positif au négatif. Entre $\omega = 0$ et $\omega = \varphi$, la courbe est au-dessus de son asymptote ; de $\omega = \varphi$ à $\omega = \pi$, elle est au-dessous. Les deux points de rencontre à distance finie de la courbe avec son asymptote correspondent aux racines de l'équation $t^2 + 2mt + 3 = 0$; ces racines sont imaginaires, car

$$m^2 - 3 = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 3 = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 3\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{-2 - 4\cos\varphi}{1 + \cos\varphi} < 0.$$

On peut remplacer cette discussion un peu laborieuse par l'étude de la concavité. On a

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{a}\,\frac{1 - \cos\omega - \cos^2\omega}{1 + \cos\omega} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1 + \cos\omega} - \cos\omega\right],$$

$$\left(\frac{1}{\zeta}\right)' = \frac{1}{a}\left[\frac{\sin\omega}{(1 + \cos\omega)^2} + \sin\omega\right],$$

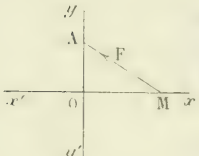
$$\left(\frac{1}{\zeta}\right)'' = \frac{1}{a}\left[\frac{\cos\omega(1 + \cos\omega) + 2\sin^2\omega}{(1 + \cos\omega)^3} + \cos\omega\right],$$

$$\frac{1}{\zeta} + \left(\frac{1}{\zeta}\right)'' = \frac{1}{a}\,\frac{(1 + \cos\omega)^2 + \cos\omega(1 + \cos\omega) + 2\sin^2\omega}{(1 + \cos\omega)^3} = \frac{1}{a}\cdot\frac{3}{(1 + \cos\omega)^2}.$$

L'expression caractéristique $\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{\zeta} + \left(\frac{1}{\zeta}\right)''\right]$ a donc le signe de ζ. ω variant de 0 à φ, ζ est négatif, la courbe tourne sa convexité vers le pôle ; de φ à π, ρ est positif et la courbe tourne sa concavité vers le pôle. P. L.

Bonne solution de M. A. Le Marchand, à Paris. Autres solutions de MM. André Courtois, au 147e d'Infanterie, à Sedan ; G. Lagh, à Douai ; A. Rousseau, à Tournes-en-Weppes ; Marcel Ullmann, à Besançon.

2072. — *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires fixes $x'Ox$, $y'Oy$, et A un point fixe sur $y'Oy$, d'ordonnée positive donnée, a. Un point matériel M supposé non pesant et de masse égale à l'unité est assujetti à rester sur l'axe $x'Ox$. Il est attiré vers le centre A par une force MF = k².MA, proportionnelle à la distance MA, k étant un nombre constant donné. A l'instant pris pour origine du temps, le mobile M est à l'origine O et il est lancé le long de $x'Ox$ avec une vitesse positive donnée V_0.*

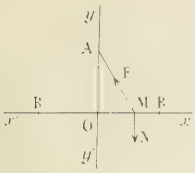


1° Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de M sur $x'Ox$, trouver l'équation du mouvement de M et discuter ce mouvement.

2° Dans l'hypothèse où il y a un frottement de M sur $x'Ox$, dont le coefficient f donné est supposé le même au repos et pendant le mouvement, on donne $V_0 = k.a.f\,\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$. Discuter le mouvement de M.

Calculer, à $\frac{1}{100}$ de seconde sexagésimale près, la durée totale de ce mouvement jusqu'à l'arrêt définitif, en supposant $k = \frac{1}{4}$ et adoptant les unités du système C. G. S.

1. S'il n'y a pas de frottement sur $x'Ox$, les seules forces qui sollicitent le point M sont la force MF = K².MA dont les composantes sont $-K^2x$ et $+K^2a$ et la réaction normale N, supposée dirigée vers le bas. On a donc



$$\frac{d^2x}{dt^2} = K^2x, \qquad \text{d'où} \qquad x = A\cos Kt + B\sin Kt,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = K^2a - N = 0, \qquad \text{d'où} \qquad N = K^2a.$$

Déterminons les constantes A et B par les conditions initiales. Au temps $t = 0$, $x = 0$, donc $A = 0$; de plus la vitesse est V_0. Or

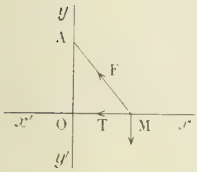
$$V = \frac{dx}{dt} = -AK\sin Kt + BK\cos Kt,$$

donc $B = \frac{V_0}{K}$, et l'équation du mouvement est

$$x = \frac{V_0}{K}\sin Kt.$$

Le mouvement du point M est un mouvement oscillatoire de centre O, de période $\frac{2\pi}{K}$, entre deux points B et B' d'abscisses $\pm\frac{V_0}{K}$, d'abord direct et retardé de O en B $\left(0 < t < \frac{\pi}{2K}\right)$, puis rétrograde, accéléré de B en O $\left(\frac{\pi}{2K} < t < \frac{\pi}{K}\right)$, et retardé de O en B' $\left(\frac{\pi}{K} < t < \frac{3\pi}{2K}\right)$; enfin direct et accéléré de B' en O $\left(\frac{3\pi}{2K} < t < \frac{2\pi}{K}\right)$ et ainsi de suite.

2. S'il y a frottement, la réaction de l'axe $x'Ox$ est oblique et fait avec la normale un angle φ tel que $\operatorname{tg}\varphi = f$, en sens contraire du mouvement. Ses composantes sont donc, l'une normale N, dirigée vers le bas, l'autre tangentielle $T = fN$, dirigée en sens contraire du mouvement, soit $-\varepsilon fN$ ($\varepsilon = +1$ si le mouvement est direct, $\varepsilon = -1$ s'il est rétrograde).



On aura dans ce cas

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x - \varepsilon fN,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = K^2a - N = 0, \qquad \text{d'où} \qquad N = K^2a.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc la suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x - \varepsilon fK^2a = -K^2(x + \varepsilon af).$$

Par suite,

$$x + \varepsilon af = A\cos Kt + B\sin Kt,$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -AK\sin Kt + BK\cos Kt.$$

Le mobile est lancé de l'origine avec une vitesse $V_0 = Kaf\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; le mouvement commence dans le sens direct ; il faut prendre $\varepsilon = +1$, et on a

$$A = af,$$

$$B = af\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = af.\operatorname{tg}\alpha,$$

en posant $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$ $\left(\alpha = \frac{5\pi}{12}\right)$.

L'équation horaire dans cette première phase du mouvement est donc

$$x = -af + af\cos Kt + af\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin Kt = -af + \frac{af}{\cos\alpha}\cos(Kt - \alpha);$$

c'est l'équation d'un mouvement vibratoire dont le centre serait le point d'abscisse $x = -af$ et l'amplitude $\frac{af}{\cos\alpha}$; la vitesse, d'abord positive, s'annule pour $Kt = \alpha$; le point M arrive sans vitesse en un point B d'abscisse positive

$$x_B = -af + \frac{af}{\cos\alpha},$$

au bout d'un temps $t_1 = \frac{\alpha}{K} = \frac{5\pi}{12K}$.

La force qui le sollicite fait avec la normale à la trajectoire un angle β tel que

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{x_B}{a} = -f + \frac{f}{\cos\alpha};$$

on vérifie que cet angle β est supérieur à l'angle de frottement ; en effet l'inégalité

$$-f + \frac{f}{\cos\alpha} > f$$

équivaut à $$\cos\alpha < \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \qquad \left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right).$$

Le mobile repart vers la gauche $(\varepsilon = -1)$; la loi de son mouvement étant

$$x = af + A\cos Kt' + B\sin Kt',$$

et la vitesse $$V = \frac{dx}{dt} = -AK\sin Kt' + BK\cos Kt';$$

t' désigne le temps compté à partir du passage en B.

Pour $t' = 0$, x se réduit à x_B et la vitesse à 0. On a donc

$$-af + \frac{af}{\cos\alpha} = af + A, \qquad A = -2af + \frac{af}{\cos\alpha},$$

$$0 = BK, \qquad B = 0,$$

et la loi du mouvement devient

$$x = af + af\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\right)\cos Kt,$$

la vitesse étant $$V = -afK\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\right)\sin Kt'.$$

Elle s'annule pour $t' = \frac{\pi}{K}$, le mobile étant arrivé en un point B′ d'abscisse

$$x_{B'} = af - af\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\right) = -af\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 3\right);$$

cette abscisse est négative ; on vérifie en effet que

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3}.$$

La force qui sollicite le mobile fait alors avec la normale un angle β' tel que

$$\mathrm{tg}\,\beta' = \frac{|x_{B'}|}{a} = f\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 3\right).$$

Cet angle β' est plus petit que l'angle de frottement ; en effet l'inégalité

$$f\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 3\right) < f$$

équivaut à $$\cos\alpha > \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire à $$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{4},$$

ou $$\sqrt{6}-\sqrt{2} > 1,$$

ou enfin $$3 > 2\sqrt{2},$$

inégalité qui est évidemment vérifiée.

L'angle β' étant inférieur à l'angle de frottement, la force F qui sollicite le mobile quand il est arrivé en B′ tombe à l'intérieur du cône de frottement et le mobile s'arrête en B′, au bout d'un temps

$$T = t_0 + t_0' = \frac{5\pi}{12K} + \frac{\pi}{K} = \frac{17\pi}{12K}.$$

Faisant $K = \frac{1}{4}$, on a

$$T = \frac{17\pi}{3} = 17^{\text{sec}},80.$$

P. L.

Bonne solution de M. André Courtois, 147e d'infanterie, à Sedan.

Trigonométrie.

2073. — *On considère un triangle* ABC *dans lequel la tangente de l'angle* A *est égale à la demi-somme des tangentes des deux autres angles* B *et* C.

1° *Trouver la relation qui existe entre* tg B *et* tg C *et exprimer* $\cos(B-C)$ *en fonction de* $\cos A$.

2° *Trouver les limites entre lesquelles doit être compris l'angle* A *et étudier la variation de* $\cos B + \cos C$ *quand on fait varier l'angle* A *entre ces limites.*

3° *Déterminer l'angle* A *de façon que le rapport* $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$ *soit égal à un nombre donné* k; *discussion.*

Partons de la relation donnée :

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

et remplaçons $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ par sa valeur $\frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\cos B \cos C}$, il vient

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin A}{\cos B.\cos C}$$

et, comme $\sin A \neq 0$ $(0 < A < \pi)$,

$$2\cos B\cos C = \cos A = -\cos(B+C) = -\cos B\cos C + \sin B\sin C,$$

d'où l'on déduit $$\operatorname{tg} B.\operatorname{tg} C = 3.$$

D'autre part, $$\cos(B-C) = \cos B\cos C + \sin B\sin C.$$

Or on a $$\sin B\sin C - \cos B\cos C = \cos A$$

et $$\frac{\sin B\sin C}{3} = \frac{\cos B\cos C}{1};$$

on en déduit, par combinaisons de rapports égaux,

$$\frac{\sin B\sin C}{3} = \frac{\cos B\cos C}{1} = \frac{\cos A}{2} = \frac{\cos(B-C)}{4},$$

d'où $$\cos(B-C) = 2\cos A.$$

Supposons l'angle A donné et proposons nous de calculer les angles B et C du triangle. Il faut d'abord que la valeur trouvée pour $\cos(B-C)$ soit acceptable ; par conséquent

$$-\frac{1}{2} < \cos A < \frac{1}{2}.$$

Supposons cette condition remplie, et soit pour fixer les idées $(B-C)$; nous aurons un angle α compris entre 0 et π, tel que

$$\cos\alpha = 2\cos A$$

et nous en déduirons la valeur de la différence $B-C$, elle-même comprise entre 0 et π :

$$B-C=\alpha.$$

Combinant avec la relation $B+C=\pi-A$, nous aurons, pour B et C,

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{\alpha}{2}, \qquad C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Ces valeurs devront être comprises entre 0 et π.

Il suffit d'écrire que la valeur du plus petit angle C est positive, ou encore que

$$\alpha < \pi - A,$$

d'où $\cos\alpha = 2\cos A > \cos(\pi - A) = -\cos A,$

et par conséquent $\cos A > 0$. Les conditions nécessaires et suffisantes cherchées sont donc

$$0 < \cos A < \frac{1}{2} \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}.$$

Pour $A=\frac{\pi}{3}$, on aurait un triangle équilatéral.

Etudions maintenant la variation de $y=\cos B+\cos C$ quand A varie de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$. Pour cela exprimons y en fonction de A :

$$y=\cos B+\cos C=2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Or $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$; d'autre part, la relation $\cos(B-C)=2\cos A$ nous donne

$$2\cos^2\frac{B-C}{2}-1=2\cos A,$$

d'où $$\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{\cos A+\frac{1}{2}} \qquad \left(0<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{2}\right);$$

on a donc

$$y=2\sin\frac{A}{2}\sqrt{\cos A+\frac{1}{2}}=\sqrt{1+\cos A+2\cos A}\,;$$

y varie dans le même sens que son carré

$$1+\cos A+2\cos^2 A=\frac{9}{8}-2\left(\cos A-\frac{1}{4}\right)^2.$$

A	cos A	y
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
croît	décroît	croît
$\arccos\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	Max. : $\frac{3}{2\sqrt{2}}$
croît	décroît	décroît
$\frac{\pi}{2}$	0	1

En se reportant au tableau ci-contre, on voit que y croît de 1 à un maximum $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (pour la valeur $A=\arccos\frac{1}{4}$) et décroît ensuite jusqu'à 1.

Enfin, soit à déterminer A de façon que $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=k$. On a

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\cos A+\frac{1}{2}}}{\sin\frac{A}{2}}\,;$$

on est conduit à l'équation $$\sqrt{\cos A + \frac{1}{2}} = k \sin \frac{A}{2},$$

ou encore, les deux membres étant essentiellement positifs,

$$2 \cos A + 1 = 2k^2 \sin^2 \frac{A}{2} = k^2(1 - \cos A),$$

d'où $$\cos A = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 2}.$$

Cette valeur de cos A doit être comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$:

$$0 < \frac{k^2 - 1}{k^2 + 2} < \frac{1}{2},$$

ce qui exige $1 < k^2 < 4$ ou enfin $1 < k < 2$.

Bonnes solutions de MM. A. Courtois, 147e d'infanterie, à Sedan ; R. Manen, à Albi ; A. Le Marchand, à Paris ; G. Moufflet, à Lyon ; R. Dufresne, lycée Charlemagne.

Calcul.

2074. — *Calculer :*

1° *Tous les angles x compris entre zéro et douze angles droits qui vérifient l'équation*

$$\sin x = \frac{2}{3};$$

2° *Les valeurs correspondantes du nombre y défini par la formule*

$$y = \frac{\sin \frac{x}{3}}{4 - \sqrt{8}}.$$

1. *Calcul à la règle* *.

On sait que la relation entre le nombre A lu sur l'échelle supérieure de la règle, le nombre a lu sur l'échelle supérieure de la réglette, et l'angle x lu sur l'échelle des sinus est de la forme : $\log A = \log a + \operatorname{colog} \sin x$, d'où $a = A \sin x$.

Amenons le chiffre 2 de la réglette en coïncidence avec le chiffre 3 de la règle, nous lirons, sur l'échelle des sinus, la valeur correspondante de x prise entre 0° et 90°, savoir $x_0 = 42°$, d'où

$$x = k.\,360° + 42°, \qquad x' = k.\,360° + 138°.$$

On aura les valeurs de x comprises entre 0 et 12 angles droits (1080°) en donnant à k dans les deux formules les valeurs $k = 0, 1, 2$.

La formule qui définit y peut être transformée en

$$y = \frac{\sin \frac{x}{3}}{4 - \sqrt{8}} = \frac{4 + \sqrt{8}}{8} \sin \frac{x}{3} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \sin \frac{x}{3} = 0{,}854 \sin \frac{x}{3}.$$

On amènera le curseur sur la division 0,854 de la règle, et on lira sur la réglette les valeurs de y qui correspondent aux différentes valeurs de $\frac{x}{3}$. On trouve trois valeurs différentes pour y, ce qui s'explique aisément.

* A partir du concours de 1913, le calcul devra être fait, suivant ce qui sera spécifié, soit par la règle à calcul, soit au moyen des tables.

x	$\frac{x}{3}$	$\sin\frac{x}{3}$	y
$x_0 = 42°$	$14°$	$\sin 14°$	$y_0 = 0{,}854 \sin 14° = 0{,}206$
$x_1 = 402°$	$134°$	$\sin 46°$	$y_1 = 0{,}854 \sin 46° = 0{,}614$
$x_2 = 762°$	$254°$	$-\sin 74°$	$y_2 = -0{,}854 \sin 74° = -0{,}820$
$x_0 = 138°$	$46°$	$\sin 46°$	$y_0 = 0{,}854 \sin 46° = 0{,}614 = y_1$
$x_1' = 498°$	$166°$	$\sin 14°$	$y_1 = 0{,}854 \sin 14° = 0{,}206 = y_0$
$x_2 = 858°$	$286°$	$-\sin 74°$	$y_2 = -0{,}854 \sin 74° = -0{,}820 = y_2$

2° *Calcul par logarithmes.*

Soit α l'angle aigu défini par l'équation $\sin x = \frac{2}{3}$; on a

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\text{colog}\, 3 = \bar{1}{,}52288$$
$$\log \sin \alpha = \bar{1}{,}82391$$
$$41° 48'\ldots\ldots\ 82 \qquad \Delta = 14$$
$$39''\ldots\ 9$$
$$\alpha = 41° 48' 39'', \qquad \frac{\alpha}{3} = 13° 56' 13''.$$

Ecrivons les valeurs de x comprises entre 0 et douze angles droits et les valeurs correspondantes de $\sin \frac{x}{3}$:

$x_0 = 41° 48' 39''$	$\frac{x_0}{3} = 13° 56' 13''$	$\sin \frac{x_0}{3} = \sin 13° 56' 13''$
$x_1 = 401° 48' 39''$	$\frac{x_1}{3} = 133° 56' 13''$	$\sin \frac{x_1}{3} = \sin 46° 3' 47''$
$x_2 = 761° 48' 39$	$\frac{x_2}{3} = 253° 56' 13''$	$\sin \frac{x_2}{3} = -\sin 73° 56' 13''$
$x_0 = 138° 11' 21''$	$\frac{x_0'}{3} = 46° 3' 47''$	$\sin \frac{x_0}{3} = \sin 46° 3' 47''$
$x_1 = 498° 11' 21'$	$\frac{x_1}{3} = 166° 3' 47''$	$\sin \frac{x_1}{3} = \sin 13° 56' 13''$
$x_2 = 858° 11' 21''$	$\frac{x_2}{3} = 286° 3' 47''$	$\sin \frac{x_2}{3} = -\sin 73° 56' 13''$

Il nous reste maintenant à calculer les trois valeurs correspondantes de y, savoir y_0, y_1, y_2. Calculons d'abord $\log(4 - \sqrt{8})$:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}82842$$
$$4 - \sqrt{8} = 1{,}17158$$
$$\log(4 - \sqrt{8}) = 0{,}06878$$
$$\text{colog}\,(4 - \sqrt{8}) = \bar{1}{,}93122.$$

Calcul des valeurs de y.

$\log \sin 13^\circ 56' \ldots$	$\bar{1},38164$	$\Delta = 51$	$\log \sin 46^\circ 3' \ldots$	$\bar{1},85730$	$\Delta = 12$
$13 \ldots$	8,5		$47'' \ldots$	8	
	2,55			1,4	
$\log \sin \frac{x_0}{3} =$	$\bar{1},38175$		$\log \sin \frac{x_1}{3} =$	$\bar{1},85739,4$	
$\operatorname{colog}(4-\sqrt{8}) =$	$\bar{1},93122$		$\operatorname{colog}(4-\sqrt{8}) =$	$\bar{1},93122$	
$\log y_0 =$	$\bar{1},31297$		$\log y_1$	$\bar{1},78861,4$	
$0,2055 \ldots\ldots$	81	$\Delta = 21$	$0,6146 \ldots\ldots$	59	$\Delta = 7$
	16			2,4	
$7 \ldots\ldots$	14,7		$3 \ldots\ldots$	2,1	
$6 \ldots\ldots$	1,3		$4 \ldots\ldots$	0,3	
$y_0 = 0,205576$			$y_1 = 0,614634$		

$\log \sin 73^\circ 56' \ldots\ldots \quad \bar{1},98270 \qquad \Delta = 3$

$13'' \ldots \quad 0,5$

$0,15$

$$\log \left| \sin \frac{x_2}{3} \right| = \bar{1},98270,65$$

$$\operatorname{colog}(4-\sqrt{8}) = \bar{1},93122$$

$$\log |y_2| = \bar{1},91392,65$$

$$|y_2| = 0,8202$$

$$y_2 = -0,8202$$

P. L.

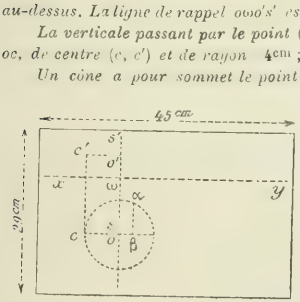
Bonnes solutions de MM. G. Mouffelet, à Lyon ; L. Simon, à Fourmies.

Géométrie descriptive.

2075. — *Cadre* 29cm *sur* 45cm. *La ligne de terre (en rouge) xy est parallèle au grand axe du cadre et à* 6cm *au-dessus. La ligne de rappel ωω's' est à* 8cm *à gauche du centre du cadre ;* $\omega o = 10^{\text{cm}}$, $\omega o' = 4^{\text{cm}}$, $\omega s' = 6^{\text{cm}}$.

La verticale passant par le point (o, o') est l'axe d'un tore engendré par un cercle situé dans le plan de front oc, de centre (c, c') et de rayon 4cm ; $\omega\gamma = 6^{\text{cm}}$, $\gamma\gamma' = 4^{\text{cm}}$.

Un cône a pour sommet le point (s, s') de l'axe du tore et pour base dans le plan horizontal une parabole dont l'axe est $co\xi$, *le sommet c, et qui passe par le point* α ; α *est sur la circonférence décrite de o comme centre avec oc pour rayon et sur la perpendiculaire à oc menée par* ξ, $o\xi = 2^{\text{cm}}$.



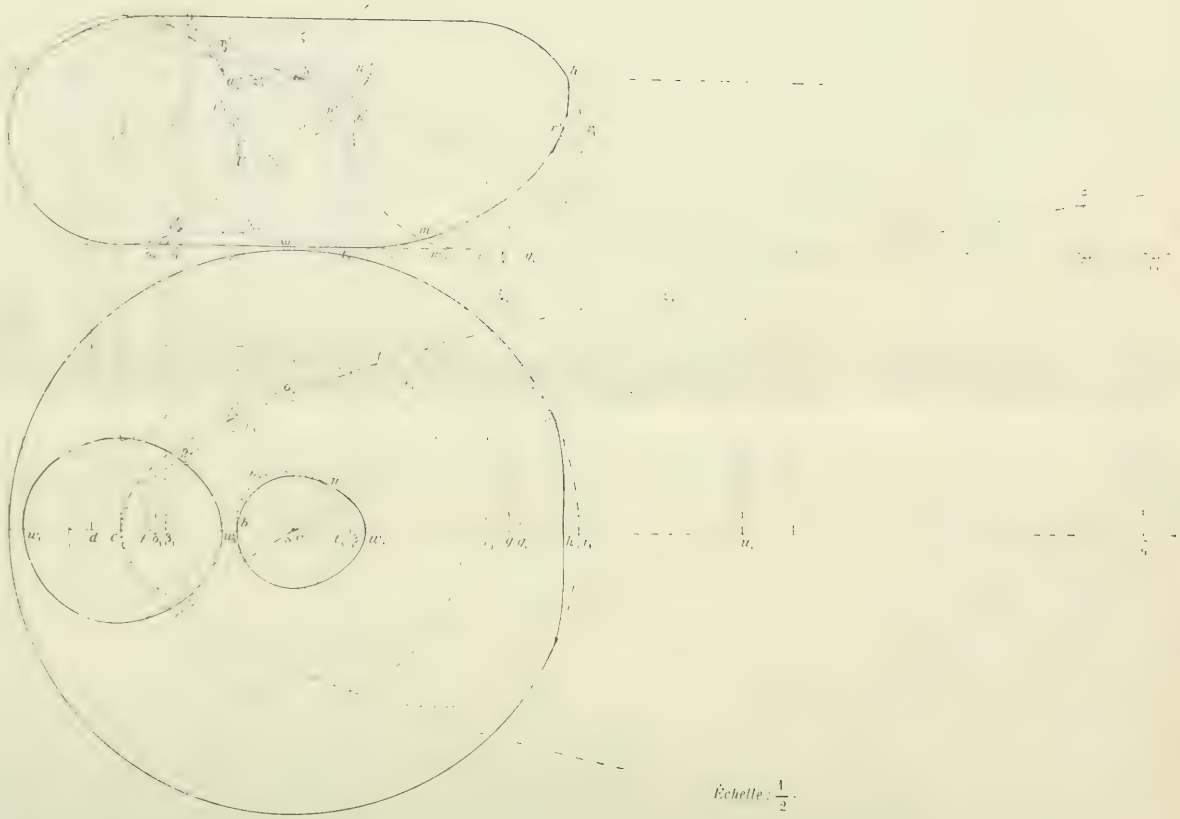
On déterminera l'intersection du tore et du cône et on représentera la partie du tore, supposé solide et opaque, extérieure au cône.

Nota. — *Le corps demandé sera seul dessiné à l'encre noire, les lignes vues en traits pleins et les lignes cachées en points ronds. Les constructions seront faites à l'encre rouge (trait plein, plutôt fin), en particulier, celles nécessaires pour la détermination d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables (parallèles limites, génératrices limites, contours apparents, points doubles en projection).*

Les tangentes seront tracées à l'encre rouge en trait un peu plus accentué aux environs des points de contact (de 1cm *à* 2cm *de chaque côté du point de contact) et* sans aucune flèche.

Pas de titre extérieur au cadre. Titre intérieur dans la partie laissée libre à droite : Tore entaillé par un cône.

Le contour apparent du tore sur chaque plan de projection résulte immédiatement des données. Le cône ayant son sommet projeté à l'intérieur de la parabole qui lui sert de base n'a pas de contour apparent horizon-



Échelle : $\frac{1}{2}$.

23e Année. Mai 1913. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

REMARQUE SUR LA NOTE DE M. RAYMOND BERR

par M. **J. Haag**, chargé de cours à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand.

Dans le numéro d'avril, M. Berr se propose de trouver les courbes caractérisées par une équation de la forme

$$(1) \qquad R \sin V = mr,$$

où R désigne le rayon de courbure, r le rayon vecteur, V l'angle de celui-ci avec la demi-tangente positive et m une constante. On peut les obtenir très rapidement et sans aucune intégration d'équations différentielles, de la manière suivante.

Si α est l'angle polaire de la demi-tangente, on a

$$(2) \qquad \alpha = \omega + V,$$

$$(3) \qquad R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\omega + dV}.$$

Portant dans (1), il vient

$$(4) \qquad ds \sin V = mr(d\omega + dV).$$

Or, $\qquad ds \sin V = r d\omega; \qquad$ donc, $\qquad d\omega = m(d\omega + dV),$

$$(5) \qquad \omega = nV,$$

en appelant n la constante de M. Berr $\left(n = \frac{m}{1-m}\right)$ et négligeant une rotation arbitraire autour du pôle.

Puis, $\qquad \frac{dr}{r d\omega} = \operatorname{cotg} V, \qquad \frac{dr}{r} = n \operatorname{cotg} V dV, \qquad \log r = n \log |\sin V|,$

en négligeant une homothétie arbitraire relativement au pôle. Finalement, on a

$$(6) \qquad r = \left(\sin \frac{\omega}{n}\right)^n.$$

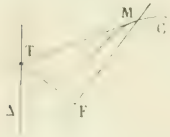
Observons de plus que la formule (5) nous donne la propriété établie par M. Berr à la page 163.

GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ DES CONIQUES

par M. **Carette**, professeur au lycée de Valenciennes.

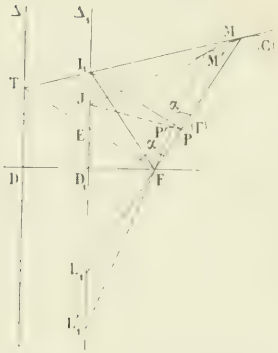
Soient Δ et F une droite et un point donnés. La tangente en M à la courbe C_1 de leur plan coupant Δ au point T, les courbes C_1 telles que $\widehat{TFM}$ soit droit sont, comme l'on sait, les coniques de foyer F et de directrice Δ. Plus généralement, on peut étudier les courbes C telles que la droite FT

se déduise de la droite FM par la rotation de centre F et d'angle α, α étant un angle de grandeur et de sens donnés.



Soient D la projection orthogonale de F sur Δ et Δ_1 la parallèle à Δ menée par le milieu D_1 de FD. Soit C une courbe possédant la propriété considérée, M étant un point quelconque de C, la droite FM coupe Δ_1 au point L_1 et l'on désigne par P le conjugué harmonique de L_1 par rapport à F et M. M décrivant C, P décrit une courbe Γ que l'on va démontrer être une spirale logarithmique (cette spirale se réduisant à un cercle de centre F si α est droit).

Tout d'abord M′ désignant un point voisin de M sur C, L'_1 le point où FM′ coupe Δ_1, P′ le point conjugué harmonique de L'_1 par rapport à F et M′, P′ est voisin de P sur Γ, et les droites MM′ et PP′ se coupent en J sur Δ_1 puisque les deux divisions (L_1PFM) et $(L'_1P'FM')$ sont deux divisions de même rapport anharmonique ayant un couple de points homologues confondus. En faisant tendre M′ vers M, on voit que, la tangente MT à C coupant Δ_1 en I_1, la droite I_1P est la tangente en P à Γ. Le faisceau (I_1, L_1PFM) est harmonique, la sécante TF coupe le rayon I_1L_1 au point E milieu de TF. Donc TF est parallèle à I_1P rayon conjugué de I_1L_1. Alors on voit que la tangente en P à Γ s'obtient en faisant tourner la droite FP autour de P de l'angle α (de grandeur et de sens donnés). La ligne Γ coupant sous cet angle α les droites passant par F est donc l'une quelconque des spirales logarithmiques de point asymptote F.

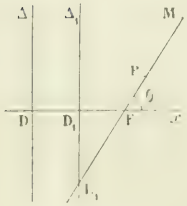


Si l'angle α est droit la spirale se réduit évidemment à un cercle de centre F, trajectoire orthogonale des droites passant par F. Réciproquement, le point P décrivant la courbe Γ, trajectoire sous l'angle α des droites passant par F, le point M conjugué harmonique de F par rapport à P et L_1 décrit une courbe C possédant la propriété envisagée. On le démontre en adaptant convenablement le raisonnement précédent.

On voit donc comment on obtient toutes les courbes C.

Équation générale des courbes C.

On prend comme sens positif sur DF le sens de D vers F, et l'on pose $DF = a$: soit Fx l'axe polaire obtenu. Soit θ l'angle de Fx et d'un sens positif quelconque pris sur $L_1\Gamma$. Le lieu Γ de P a, comme l'on sait, pour équation $\overline{FP} = \lambda e^{\frac{\theta}{\tan\alpha}}$, λ étant une constante $\left(\alpha \text{ étant différent de } \frac{\pi}{2}\right)$.



On a

$$\frac{2}{\overline{FM}} = \frac{1}{\overline{FP}} + \frac{1}{\overline{FL_1}} \qquad \text{et} \qquad \overline{FL_1} = -\frac{a}{2\cos\theta},$$

donc

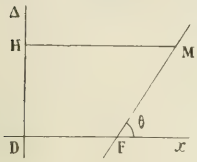
$$\frac{2}{\overline{FM}} = \frac{1}{\lambda e^{\frac{\theta}{\tan\alpha}}} - \frac{2\cos\theta}{a};$$

En posant $2\lambda = m$, $\overline{FM} = \rho$, on a enfin $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{me^{\frac{\theta}{\tan\alpha}}} - \frac{\cos\theta}{a}$.

Cas où l'angle α est droit.

On doit alors poser $\overline{FP} = \lambda$, λ étant une constante de signe quelconque et l'on arrive à $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m} - \frac{\cos\theta}{a}$. (Cette équation se déduit d'ailleurs de la précédente en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$.)

L'équation $\frac{1}{\overline{FM}} = \frac{1}{m} - \frac{\cos\theta}{a}$ représente bien une conique de foyer F et directrice Δ. En effet, si l'on



appelle H la projection orthogonale de M sur D, on a $\overline{HM} = \overline{DF} + \overline{FM}\cos\theta$, $\overline{HM} = a + \overline{FM}\cos\theta$.

Or, $$\overline{FM} = \frac{am}{a - m\cos\theta},$$

donc $$\overline{HM} = a + \frac{am\cos\theta}{a - m\cos\theta} = \frac{a^2}{a - m\cos\theta},$$

et $$\frac{\overline{FM}}{\overline{HM}} = \frac{am}{a^2} = \frac{m}{a}. \qquad \text{donc} \qquad \frac{FM}{HM} = \left|\frac{m}{a}\right|,$$

ce qui démontre la proposition.

Si l'on traite la question par le calcul, en prenant Δ pour axe des y, et un axe des x passant par F et perpendiculaire en D à Δ, on obtient de suite pour déterminer les courbes C l'équation différentielle

$$h = \frac{(x-a)(xy' - y) - ay}{a(x-a) + y(xy' - y)} \qquad (h = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \overline{DF} = a).$$

On pose $\overline{FM} = \rho$, $x - a = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. On arrive a

$$h(a\rho' + \rho^2\sin\theta) = a\rho + \rho^2\cos\theta \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}\right).$$

On divise par ρ^2 et l'on pose $\frac{a}{\rho} = r$, et l'on obtient une équation linéaire du premier ordre :

$$hr' + r + \cos\theta - h\sin\theta = 0,$$

dont la solution est

$$r = e^{-\frac{\theta}{h}}\left(\mu - e^{\frac{\theta}{h}}\cos\theta\right) \qquad \text{ou} \qquad r = \mu e^{-\frac{\theta}{h}} - \cos\theta; \qquad \text{finalement,} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{me^{\frac{\theta}{\operatorname{tg}\alpha}}} - \frac{\cos\theta}{a}.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2050. — *On donne une ellipse* (E) *et un point* P *dans son plan.*

1° *Montrer qu'il existe une infinité de triangles circonscrits à* (E) *et conjugués à l'hyperbole d'Apollonius relative au point* P.

2° *Trouver le lieu des sommets de ces triangles, le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits, du centre du cercle circonscrit et l'enveloppe de ce cercle.*

Si l'ellipse (E) est harmoniquement inscrite dans l'hyperbole (H), réciproquement l'hyperbole est harmoniquement circonscrite à (E), et il suffit de constater ceci sur un seul triangle.

Or l'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

celle de l'hyperbole d'Apollonius est

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

en appelant α et β les coordonnées du point P. Il est visible que cette courbe est circonscrite au triangle formé par le point O et les points à l'infini sur les axes, et ce triangle est l'un des triangles conjugués de l'ellipse. La propriété est donc établie.

Pour avoir le lieu des sommets d'un tel triangle, il suffit de remarquer que toute tangente à l'ellipse est bonne, c'est-à-dire peut servir de côté à un triangle circonscrit à l'ellipse et conjugué à l'hyperbole. Le sommet opposé de ce triangle est donc le pôle de cette tangente par rapport à l'hyperbole. Le lieu des sommets est donc la courbe polaire réciproque de l'ellipse par rapport à l'hyperbole (H). Nous ne nous arrêterons pas à chercher son équation.

Quant à la partie suivante, elle ne peut s'aborder utilement que par des procédés qui ne font plus partie de l'enseignement actuel.

Considérons deux coniques $f = 0$, $g = 0$, et le faisceau linéaire $\lambda f + g = 0$. L'équation en λ de ce faisceau est

$$\Delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \theta'\lambda + \Delta' = 0.$$

Les quatre fonctions des coefficients Δ, θ, θ', Δ', sont des invariants communs aux deux coniques. La signification géométrique des relations $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ est connue, $\theta = 0$ exprime que la conique f est harmoniquement circonscrite à g ou que g est harmoniquement inscrite dans f; $\theta' = 0$ exprime des conditions analogues.

Enfin la condition

$$\theta^2 - 4\theta\Delta' = 0$$

exprime que la conique g est inscrite dans un triangle inscrit dans f.

Considérons alors, et, par exemple, le cercle circonscrit au triangle circonscrit à l'ellipse E.

Soit $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + r = 0$ l'équation de ce cercle. Ses coefficients ponctuels sont

$$1, \quad 1, \quad r, \quad -q, \quad -p, \quad 0;$$

ses coefficients tangentiels,

$$q^2 - r, \quad p^2 - r, \quad -1, \quad -q, \quad -p, \quad -pq.$$

Pour l'ellipse :

$$b^2, \quad a^2, \quad -a^2b^2, \quad 0, \quad 0, \quad 0,$$

$$-a^2b^2, \quad -a^2b^2, \quad a^2b^2, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

Pour l'hyperbole d'Apollonius du point (α, β) :

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad -a^2\alpha, \quad b^2\beta, \quad c^2,$$

$$-a^4\alpha^2, \quad -b^4\beta^2, \quad -c^4, \quad b^2c^2\beta, \quad -a^2c^2\alpha, \quad -a^2b^2\alpha\beta.$$

Il est facile de vérifier alors la propriété indiquée et d'établir les relations utiles pour le cercle.

Ce sont :

$$-a^4\alpha^2 - b^4\beta^2 - c^4r - b^2c^2\beta q + a^2c^2\alpha p = 0,$$

qui exprime que le cercle est harmoniquement circonscrit à (H); et

$$b^2(q^2 - r) + a^2(p^2 - r) + a^2b^2(p^2 + 4a^2b^2(r - a^2 - b^2) = 0,$$

qui exprime que le cercle est circonscrit à un triangle circonscrit à (E). Ce cercle est donc orthogonal à un cercle fixe et le lieu de son centre est immédiat.

2051. — *On considère une conique* C *et les tangentes* PA, PB *issues du point* P. *Le cercle circonscrit au triangle* PAB *rencontre* (C) *en deux autres points*, C *et* D.

1° *Montrer que le pôle* P′ *de* CD *par rapport à la conique* (C) *est sur le cercle* PAB.

2° P *décrivant une courbe* (Γ), P′ *décrit une courbe* (Γ′); *relation entre* (Γ) *et* (Γ′).

C'est une propriété connue et très générale que si on considère deux cordes AB, CD d'une conique et leurs pôles P et P′, ces six points sont sur une même conique.

Démontrons d'abord ce fait. Pour cela, appelons (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du pôle, P, de AB, (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du pôle, P', de CD et représentons la conique (C) par son équation cartésienne ponctuelle $f(x, y, z) = 0$. Les cordes AB et CD auront pour équations

$$P_0 = x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0, \qquad P_1 = x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0,$$

et le faisceau ayant pour points de base les points A, B, C, D aura pour équation

$$f(x, y, z) + \lambda P_0 P_1 = 0$$

En exprimant que la conique du faisceau passe au point P ou au point P' et remarquant que

$$2f(x_0, y_0, z_0) = P_{00}, \qquad \text{et} \qquad 2f(x_1, y_1, z_1) = P_{11},$$

on trouve la même valeur de λ :

$$1 + 2\lambda P_{01} = 0, \qquad 1 + 2\lambda P_{10} = 0.$$

La propriété est donc démontrée.

Revenons alors au problème, et supposons, par exemple, que la conique (C) soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La conique du faisceau aura, dans ce cas, pour équation

$$\left(\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right) = 0,$$

et, pour que ce soit un cercle, il faudra que le terme en xy soit nul et que les coefficients des carrés soient égaux. Ceci donne

$$x_0y_1 + y_0x_1 = 0. \qquad \left(\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - \frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} = 0.$$

La première s'écrit

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{y_0}{-y_1} = \lambda,$$

et la seconde,

$$\frac{y_0y_1 - x_0x_1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad y_0y_1 - x_0x_1 + c^2 = 0.$$

Nous avons donc

$$\lambda = \frac{c^2}{x_1^2 + y_1^2}, \qquad \text{et} \qquad x_0 = \frac{c^2x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \qquad y_0 = -\frac{c^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

On voit donc que la correspondance entre P et P' est une inversion de centre O, ayant pour puissance c^2, suivie d'une symétrie par rapport à Ox.

En appelant z l'affixe du point P, z', celle du point P', la transformation actuelle équivaut à la transformation

$$zz' = c^2,$$

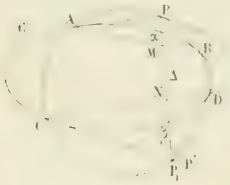
qui est classique.

Solution géométrique. — 1. La droite AB coupe la tangente en P au cercle au point I; soit M le conjugué harmonique de ce point par rapport à AB. La droite PM est la polaire du point I par rapport au cercle et à la conique (C); I, étant ainsi un pôle double, se trouve sur CD. Par suite la droite Δ PM passe aussi par les points : N conjugué de I par rapport à CD, P', et P_1 point de contact de la deuxième tangente au cercle menée par I.

Je dis que les points P_1, P' sont confondus.

En effet, les trois coniques qui passent par les quatre points A, B, C, D : 1° droites AB, CD, 2° conique (C), 3° cercle PAB, déterminent sur Δ des couples en involution. Par un choix convenable d'origine on a, entre les

abscisses de ces points,



$$mn = \alpha\beta = pp' = k.$$

D'autre part, on a

$$(PM\alpha\beta) = -1, \qquad (P'N\alpha\beta) = -1,$$

ou

$$(1) \qquad 2(pm + \alpha\beta) = 2(p + m)(\alpha + \beta),$$
$$2(p'n + \alpha\beta) = 2(p' + n)(\alpha + \beta).$$

Il faut montrer que

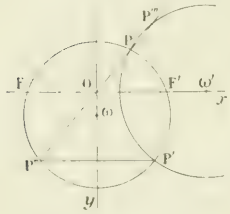
$$p' = \frac{n(\alpha + \beta) - 2k}{2n - \alpha - \beta} = p_1 = \frac{k}{p}$$

ou, comme $k = mn$,

$$p(\alpha + \beta) - 2mp = 2mn - m(\alpha + \beta)$$

et, comme $mn = \alpha\beta$, $2(\alpha\beta + mp) = (\alpha + \beta)(m + p)$, ce qui a bien lieu d'après (1).

2. On sait (voir Revue : concours de l'Ecole Normale, 1891) que les points P, P′ et les deux foyers réels sont sur un même cercle ω, de même P, P′ et les deux foyers imaginaires sont sur un même cercle ω′.



La droite OP rencontre à nouveau les cercles ω, ω′ en P″ et P‴.

Et on a

$$OP.OP'' = -c^2 \qquad OP.OP''' = c^2.$$

D'où

$$OP'' = -OP'''.$$

Les symétriques des points P″, P‴ par rapport aux deux axes Oy, Ox qui sont respectivement sur les cercles ω, ω′ et qui sont confondus puisque $OP'' = -OP'''$, sont confondus avec le point P′.

On a donc $OP.OP' = c^2$. P′ étant sur la droite symétrique de OP par rapport aux axes.

En résumé, le lieu de P′ est la courbe symétrique par rapport au grand axe de (C) de la courbe inverse de (Γ), le centre de (C) étant le pôle, le carré de la demi-distance focale, la puissance d'inversion.

JEAN MOUBRET, à Saumur.

Bonne solution de M. LEROY, lycée Hoche, à Versailles.
Solutions analogues de MM. L. NAUCELLE, à La Châtre et A. COURTOIS, à Sedan.
Très bonne solution géométrique de M. BIGARD, au lycée de Besançon.
MM. BIGARD et LEROY examinent aussi le cas de la parabole.

QUESTIONS PROPOSÉES

2140. — Dans un triangle variable OAM de sommet fixe O et dont le côté OA fait l'angle θ avec l'axe Ox, on donne :

$$OA = a, \qquad AM = b, \qquad \widehat{OAM} = \pi - \theta.$$

1° On demande le lieu de M lorsque θ varie, le lieu du centre du cercle circonscrit, du centre de gravité du triangle OAM et l'enveloppe de AM.

2° Si θ est proportionnel au temps, déterminer l'hodographe du mouvement et le lieu des extrémités des vecteurs vitesse et accélération.

3° Si l'accélération de M passe constamment par O, construire l'hodographe dans le cas où $a = b$.

M. F.

2141. — 1° Condition pour que l'équation :

$$(1) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ait une racine égale au carré d'une autre.

2° Soit $\varphi(p, q, r) = 0$ cette condition. On suppose que p, q, r soient les coordonnées d'un point quelconque de l'espace ; étudier la surface (S) représentée par l'équation :

$$\varphi(p, q, r) = 0.$$

a) Construire ses sections par les plans de coordonnées.

b) Montrer que (S) est réglée et chercher les équations des génératrices rectilignes en fonction d'un paramètre.

c) (S) est unicursale ; on exprimera les coordonnées de l'un quelconque de ses points en fonction rationnelle de deux des racines α et β de l'équation (1).

3° Soient $x = f_1(\alpha, \beta)$, $y = f_2(\alpha, \beta)$, $z = f_3(\alpha, \beta)$ les formules obtenues. Supposant alors que α, β soient les coordonnées courantes d'un point dans le plan, on demande d'étudier succinctement les courbes :

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0.$$

4° Points multiples de (S).

A. Darmon.

2142. — La perpendiculaire élevée au milieu du rayon de courbure d'une parabole enveloppe une courbe du quatrième degré. La construire.

E.-N. Barisien.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1912.

Algèbre, Analyse et Trigonométrie.

2052. — 1° *Etudier la variation de la fonction*

$$y = \mathrm{L}\frac{1-x}{1-ax},$$

où a est une constante positive inférieure à l'unité ; L désigne le logarithme népérien.

2° *Développer cette fonction en série entière en x ; dans quel intervalle la méthode suivie est-elle applicable ?*

3° *Déterminer l'intervalle de convergence par l'application à la série des théorèmes classiques sur la convergence des séries à termes numériques, et étudier la série pour les limites de l'intervalle.*

1. La fonction
$$y = \mathrm{L}\frac{1-x}{1-ax}$$
est définie seulement pour les valeurs de x qui rendent positive la fraction $\frac{1-x}{1-ax}$, c'est-à-dire pour les valeurs de x extérieures à l'intervalle $\left(1, \frac{1}{a}\right)$. Nous ferons donc varier x de $-\infty$ à 1 et de $\frac{1}{a}$ à $+\infty$.

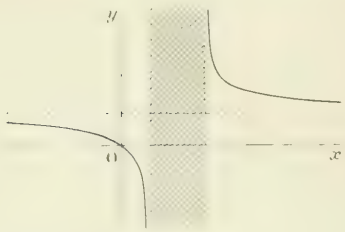
Dans ces intervalles la fonction admet une dérivée,

$$y' = \frac{a-1}{(1-x)(1-ax)},$$

qui est toujours négative, puisque $a < 1$, et que le produit $(1-x)(1-ax)$ a le même signe que le quotient $\frac{1-x}{1-ax}$ qui est positif. Donc la fonction est décroissante.

Quand x croît de $-\infty$ à 1, y décroît de $L\frac{1}{a}$ à $-\infty$, en s'annulant pour $x = 0$; quand x croît de $\frac{1}{a}$ à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à $L\frac{1}{a}$.

La courbe correspondante se trace aisément. On peut remarquer que $L\frac{1}{a}$ est positif, puisque $\frac{1}{a}$ est supérieur à 1.



2. Pour toute valeur de x moindre que 1 en valeur absolue, $L(1-x)$ est développable en série entière, et l'on a

$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots;$$

on a de même, pour $|ax| < 1$,

$$L(1-ax) = -\frac{ax}{1} - \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^3x^3}{3} - \cdots - \frac{a^nx^n}{n} - \cdots.$$

Comme a est inférieur à 1, ces deux développements sont valables pour $|x| < 1$, et, en les retranchant, on a

$$y = L\frac{1-x}{1-ax} = \frac{(a-1)x}{1} + \frac{(a^2-1)x^2}{2} + \frac{(a^3-1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a^n-1)x^n}{n} + \cdots.$$

Nous avons ainsi le développement en série entière de la fonction y pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

3. Etudions maintenant la série

$$(1) \qquad \frac{(a-1)x}{1} + \frac{(a^2-1)x^2}{2} + \frac{(a^3-1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a^n-1)x^n}{n} + \cdots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{\dfrac{(a^{n+1}-1)x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(a^n-1)x^n}{n}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a^{n+1}-1}{a^n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot x.$$

Quand n augmente indéfiniment, a^{n+1} et a^n ont pour limite zéro, donc le rapport a pour limite x.

On en conclut que si $|x| < 1$, la série (1) est absolument convergente, et que si $|x| > 1$, elle est divergente.

L'intervalle de convergence est donc $(-1, +1)$.

Supposons maintenant $x = +1$.

La somme S_n des n premiers termes de la série peut s'écrire

$$S_n = \frac{a-1}{1} + \frac{a^2-1}{2} + \cdots + \frac{a^n-1}{n},$$

ou

$$S_n = S'_n - S''_n,$$

en posant

$$S'_n = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}, \qquad S''_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Quand n augmente indéfiniment, S'_n a une limite, car la série qui a pour terme général $\frac{a^n}{n}$ est convergente; d'autre part S''_n augmente indéfiniment, puisque la série harmonique est divergente. Donc S_n croît indéfiniment. Par suite, la série (1) est divergente pour $x = +1$.

Pour $x = -1$, la somme S_n des n premiers termes de cette série s'écrit

$$S_n = -\frac{a-1}{1} + \frac{a^2-1}{2} - \frac{a^3-1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{a^n-1}{n},$$

ou

$$S_n = S'_n + S''_n,$$

en posant

$$S'_n = -\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{a^n}{n},$$

$$S''_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Quand n augmente indéfiniment S'_n et S''_n ont des limites, donc S_n a une limite, et la série (1) est convergente. C'est une série à termes alternés qui est semi-convergente.

En résumé, la série (1) est absolument convergente pour $|x| < 1$, semi-convergente pour $x = -1$ et divergente pour $|x| > 1$ et $x = +1$.

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions par MM. Raymond Chirol, à Moulins ; H. Frobert, à Paris; A. Le Marchand, à Paris ; L. Naucelle, à la Châtre ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; L. Simon, à Fourmies.

2053. — 1° *Montrer que la fonction*

$$y = \frac{1}{\cos 4t - \cos 4a},$$

où a désigne un arc donné, est une fraction rationnelle en $x = \cos t$.

Décomposer cette fraction en éléments simples. Dans quels cas la formule de décomposition correspondant au cas général est-elle en défaut, et comment faut-il alors modifier les résultats obtenus?

De la formule de Moivre

$$\cos 4t + i \sin 4t = (\cos t + i \sin t)^4,$$

on déduit, en égalant les parties réelles des deux membres,

$$\cos 4t = \cos^4 t - 6 \cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t,$$

ou, en remplaçant $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$,

$$\cos 4t = 8 \cos^4 t - 8 \cos^2 t + 1;$$

on a de même

$$\cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1,$$

et par suite, en retranchant,

$$\cos 4t - \cos 4a = 8(\cos^4 t - \cos^4 a) - 8(\cos^2 t - \cos^2 a),$$

ou

$$\cos 4t - \cos 4a = 8(\cos^2 t - \cos^2 a)(\cos^2 t - \sin^2 a).$$

Si l'on pose alors $\cos t = x$, on a

$$y = \frac{1}{8(x^2 - \cos^2 a)(x^2 - \sin^2 a)},$$

ce qui montre que y est fonction rationnelle de x.

Nous allons la décomposer en éléments simples.

Les racines du dénominateur, toujours réelles, sont égales à $\pm \cos a$ et $\pm \sin a$. Différents cas sont à distinguer suivant que ces racines sont distinctes, ou que quelques-unes d'entre elles sont égales.

Premier cas. — On a $\cos a \neq 0$, $\sin a \neq 0$, $|\cos a| \neq |\sin a|$. Les quatre racines sont distinctes.

La décomposition sera de la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{8(x^2 - \cos^2 a)(x^2 - \sin^2 a)} \equiv \frac{A}{x - \cos a} + \frac{B}{x + \cos a} + \frac{C}{x - \sin a} + \frac{D}{x + \sin a},$$

A, B, C, D étant des constantes qu'il s'agit de calculer.

Dans l'identité (1) changeons x en $-x$, nous obtenons

$$(2)\qquad \frac{1}{8(x^2-\cos^2 a)(x^2-\sin^2 a)} = -\frac{A}{x+\cos a} - \frac{B}{x-\cos a} - \frac{C}{x+\sin a} - \frac{D}{x-\sin a}.$$

Or, on sait que la décomposition d'une fraction rationnelle n'est possible que d'une seule manière; comme les deux premiers membres des identités (1) et (2) sont identiques à la même fraction rationnelle, les seconds membres doivent contenir les mêmes fractions simples. On doit donc avoir $B = -A$, et $D = -C$; par suite, l'identité (1) devient

$$(3)\qquad \frac{1}{8(x^2-\cos^2 a)(x^2-\sin^2 a)} = \frac{A}{x-\cos a} - \frac{A}{x+\cos a} + \frac{C}{x-\sin a} - \frac{C}{x+\sin a},$$

et nous n'avons à calculer que A et C.

Chassons le dénominateur, nous avons

$$1 = 8A(x^2-\sin^2 a)(x+\cos a) - 8A(x^2-\sin^2 a)(x-\cos a)$$
$$+ 8C(x^2-\cos^2 a)(x+\sin a) - 8C(x^2-\cos^2 a)(x-\sin a);$$

puis, dans cette identité faisons successivement $x = \cos a$, et $x = \sin a$.

Nous obtenons $1 = 16A\cos 2a\cos a$, et $1 = -16C\cos 2a\sin a$, d'où nous tirons

$$A = \frac{1}{16\cos 2a\cos a}, \qquad C = \frac{-1}{16\cos 2a\sin a},$$

et l'identité (3) devient

$$y = \frac{1}{16\cos 2a\cos a}\left[\frac{1}{x-\cos a} - \frac{1}{x+\cos a}\right] - \frac{1}{16\cos 2a\sin a}\left[\frac{1}{x-\sin a} - \frac{1}{x+\sin a}\right].$$

La décomposition est effectuée.

On remarquera que les valeurs de A et de C existent toujours dans l'hypothèse où nous sommes placés, $\cos a = 0$, $\sin a = 0$, $|\cos a| \neq |\sin a|$.

Deuxième Cas. — $\cos a = 0$. On a alors $|\sin a| = 1$, et

$$y = \frac{1}{8x^2(x^2-1)}.$$

La décomposition est alors de la forme

$$\frac{1}{8x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1},$$

et, en changeant x en $-x$,

$$\frac{1}{8x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} - \frac{C}{x+1} - \frac{D}{x-1}.$$

En comparant les seconds membres, on doit avoir $B = 0$, $D = -C$; par suite,

$$(4)\qquad \frac{1}{8x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{C}{x-1} - \frac{C}{x+1}.$$

Chassons le dénominateur; nous avons

$$1 = 8A(x^2-1) + 8Cx^2(x+1) - 8Cx^2(x-1);$$

faisons $x = 0$, $x = 1$, nous obtenons successivement $1 = -8A$, $1 = 16C$, d'où nous tirons $A = -\frac{1}{8}$, $C = \frac{1}{16}$; en portant ces valeurs dans l'identité (4), nous avons la décomposition

$$y = -\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16(x-1)} - \frac{1}{16(x+1)}.$$

Troisième Cas. — $\sin a = 0$. On a alors $|\cos a| = 1$, et

$$y = \frac{1}{8x^2(x^2-1)}.$$

Même décomposition que dans le deuxième cas.

Quatrième Cas. — $|\cos a| = |\sin a|$. — On a alors $|\cos a| = |\sin a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et

$$y = \frac{1}{8\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

La décomposition en éléments simples est alors de la forme

$$\frac{1}{8\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} \equiv \frac{A}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{B}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{C}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{D}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Changeons encore x en $-x$; l'identité devient

$$\frac{1}{8\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} \equiv \frac{A}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{B}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{C}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{D}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}};$$

et, comme les seconds membres doivent contenir les mêmes fractions simples, on doit avoir $C = A$, $D = -B$, et, par suite,

$$\frac{1}{8\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{A}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{B}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{A}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{B}{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Chassons les dénominateurs, nous avons

$$1 \equiv 8A\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 8B\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 8A\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8B\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Faisons d'abord $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; nous avons $1 = 16A$, ou $A = \frac{1}{16}$.

Pour avoir B, nous ferons $x = 0$, ce qui donne

$$1 = 4A - \frac{4B}{\sqrt{2}} + 4A - \frac{4B}{\sqrt{2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{8B}{\sqrt{2}} = 8A - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad B = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

On a donc

$$y = \frac{1}{16\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{16\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{1}{16\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2}}{16\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

L. SIMON, à Fourmies.

Bonnes solutions par MM. Raymond Chirol, à Moulins; André Courtois, 147e d'infanterie, à Sedan; H. Frobert, à Paris; Jouglens; G. Lach, à Douai; A. Le Marchand, à Paris; L. Naucelle, à la Châtre; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; N. Savary, 61e d'artillerie; M. Roux, à Chalon-sur-Saône.

Géométrie Analytique.

2054. — *Dans un plan, où l'on a choisi deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère un cercle variable* C *dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - m^2x - 2my + 1 = 0,$$

m désignant un paramètre variable.

1° *Montrer que la polaire* D, *par rapport au cercle variable* C, *d'un point fixe* A *donné dans le plan, reste, en général, tangente à une conique* S; *discuter la nature de cette conique. Trouver le lieu des positions particulières de* A *pour chacune desquelles la polaire* D *tourne autour d'un point fixe* (*). *Trouver le lieu*

(*) Le mot *tourner* autour d'un point fixe a trompé quelques candidats, qui ont cherché la condition pour que Δ reste à une distance constante d'un point fixe. Il fallait comprendre *passer* par un point fixe.

des positions de A *pour lesquelles la conique* S *est une ellipse semblable à une ellipse donnée.*

2° *Par un point* P *donné dans le plan, il passe en général deux des circonférences* C ; *soient* C_1 *et* C_2 *ces deux circonférences. Discuter leur réalité. — Trouver le lieu des positions du point* P *pour lesquelles les cercles* C_1 *et* C_2 *sont orthogonaux. — Trouver le lieu que doit décrire le point* P *pour que la droite joignant les centres de* C_1 *et* C_2 *tourne autour d'un point fixe donné.*

L'équation de la polaire Δ du point $A(x_0, y_0)$,

$$(1) \qquad xx_0 + yy_0 - \frac{m^2}{2}(x + x_0) - m(y + y_0) + 1 = 0,$$

contient le paramètre m au second degré ; cette droite variable enveloppe donc la courbe dont on obtient l'équation en exprimant que le polynome en m a une racine double. Cette courbe est du second degré, son équation,

$$(2) \qquad (y + y_0)^2 + 2(x + x_0)(xx_0 + yy_0 + 1) = 0,$$

montre qu'elle passe par le point B, symétrique de A par rapport à l'origine et qu'elle touche les droites $x + x_0 = 0$ et $xx_0 + yy_0 + 1 = 0$ aux points d'intersection avec la droite $y + y_0 = 0$. La droite $xx_0 + yy_0 + 1 = 0$ est symétrique par rapport à O de la polaire de A relative au cercle Γ décrit de O pour centre avec un rayon égal à l'unité (*fig.* 1).

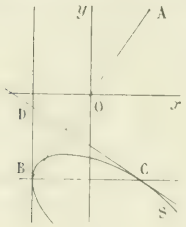


Fig. 1

Les coordonnées du point de contact de la droite avec son enveloppe vérifient l'équation (1) et l'équation dérivée par rapport à m,

$$(3) \qquad m(x + x_0) + (y + y_0) = 0.$$

Pour que les coordonnées de ce point ne dépendent pas de m il faut et il suffit que

$$x + x_0 = 0, \qquad y + y_0 = 0, \qquad xx_0 + yy_0 + 1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0.$$

Le point fixe est alors B, et A est un point du cercle Γ. Quand cette condition est remplie, l'équation de la conique S se décompose ; en effet, les droites BC, CD et DB sont alors concourantes, car, si $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$, on peut poser

$$xx_0 + yy_0 + 1 \equiv x_0(x + x_0) + y_0(y + y_0) ;$$

l'équation de la conique S devient

$$(y + y_0)^2 + 2(x + x_0)[x_0(x + x_0) + y_0(y + y_0)] = 0,$$

ou

$$(y + y_0)^2 + 2y_0(x + x_0)(y + y_0) + 2x_0(x + x_0)^2 = 0 ;$$

elle représente deux droites, réelles ou imaginaires, passant par le point B. Si de plus $y_0^2 = 2x_0$, ces deux droites sont confondues, le polynome précédent étant le carré de

$$y + y_0 + y_0(x + x_0).$$

L'équation (2) représente en général une conique S ; les coordonnées d'un point de cette courbe sont définies en fonction rationnelle du paramètre m par les équations (1) et (3), qui sont du premier degré en x et y ; les valeurs tirées de ce système sont évidemment réelles. Donc l'équation ne représentera jamais une ellipse imaginaire. De plus nous avons reconnu précédemment que la conique S se décompose en deux droites passant par le point B quand A est un point du cercle Γ, c'est-à-dire quand $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$. Le discriminant de l'équation sera donc divisible par $x_0^2 + y_0^2 - 1$.

L'équation développée est

$$(4) \qquad 2x_0x^2 + 2y_0xy + y^2 + 2(1 + x_0^2)x + 2y_0(1 + x_0)y + y_0^2 + 2x_0 = 0,$$

le discriminant δ de la forme homogène du second degré est

$$\delta = 2x_0 - y_0^2,$$

il est nul lorsque A est sur une parabole P dont Ox est l'axe, Oy la tangente au sommet ; le paramètre est l'unité de longueur, de sorte que le foyer F a pour coordonnées $\frac{1}{2}$ et 0, la directrice DD' a pour

équation $x_0 + \frac{1}{2} = 0$. Si A est extérieur à cette parabole, δ est négatif, S est du genre hyperbole, si A est intérieur, S est du genre ellipse, enfin si A est sur P, S est du genre parabole.

Le discriminant de S est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 & 1 + x_0^2 \\ y_0 & 1 & y_0 + y_0 x_0 \\ 1 + x_0^2 & y_0 + y_0 x_0 & y_0^2 + 2x_0 \end{vmatrix}$$

On sait d'avance qu'il sera divisible par $x_0^2 + y_0^2 - 1$: on peut mettre ce facteur en évidence en développant Δ (*), mais il est plus élégant de le faire apparaître sur le déterminant. En remplaçant la troisième ligne par la somme obtenue en lui ajoutant les éléments de la première multipliés par $-x_0$ et ceux de la seconde multipliés par $-y_0$, on a d'abord

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 & 1 + x_0^2 \\ y_0 & 1 & y_0 + y_0 x_0 \\ 1 - x_0^2 - y_0^2 & 0 & x_0(1 - x_0^2 - y_0^2) \end{vmatrix} = (1 - x_0^2 - y_0^2) \begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 & 1 + x_0^2 \\ y_0 & 1 & y_0 + x_0 y_0 \\ 1 & 0 & x_0 \end{vmatrix}$$

En ajoutant aux éléments de la troisième colonne ceux de la première multipliés par $-x_0$ et ceux de la seconde multipliés par $-y_0$, on a

$$\Delta = (1 - x_0^2 - y_0^2) \begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 & 1 - x_0^2 - y_0^2 \\ y_0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1 - x_0^2 - y_0^2)^2.$$

Donc la conique S ne se décompose en deux droites que si le point A appartient au cercle Γ.

Enfin l'équation qui donne les coefficients de la forme réduite à laquelle peut se ramener l'équation de S est

$$S^2 - (2x_0 + 1)S + 2x_0 - y_0^2 = 0 ; \tag{5}$$

en désignant ses racines par S_1 et S_2 l'équation réduite est

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{6}$$

Lorsque A est intérieur à la parabole, les deux racines de l'équation (5) ont même signe, or leur somme est positive, car pour tout point de la région intérieure à la parabole $2x_0 + 1$ est positif. La forme réduite (6) représente une ellipse réelle, puisque S_1, S_2, Δ et δ sont positifs.

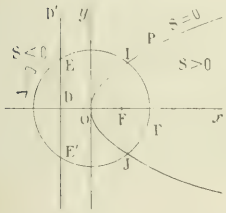


Fig. 2.

Lorsque A est extérieur à la parabole, la forme réduite représente une hyperbole qui se décompose en deux droites réelles si A est sur le cercle Γ. Si A est sur la directrice de la parabole, $2x_0 + 1 = 0$, les racines de l'équation (5) sont égales et de signes contraires, la conique S est une hyperbole équilatère.

Lorsque le point A est commun au cercle et à la parabole P, la conique se réduit à deux droites confondues, comme on l'a vu plus haut (*fig.* 2).

Lorsque la conique est une ellipse, les carrés des demi-axes sont proportionnels à $\frac{1}{S_1}$ et $\frac{1}{S_2}$; donc, si la conique S est semblable à une ellipse donnée, dont les demi-axes sont a et b, on a

$$\frac{S_1}{a^2} = \frac{S_2}{b^2} = \frac{S_1 + S_2}{a^2 + b^2} = \frac{2x_0 + 1}{a^2 + b^2}.$$

(*) L'étude des déterminants ne figure pas au programme de l'Ecole navale, mais il n'est sans doute pas de cours où l'on n'ait appris aux candidats à se servir de déterminants, tout au moins de ceux du troisième ordre.

d'où $$S_1 = a^2\,\frac{2x_0+1}{a^2+b^2}, \qquad S_2 = b^2\,\frac{2x_0+1}{a^2+b^2},$$

et $$S_1S_2 = 2x_0 - y_0^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Cette équation est celle d'une conique, bitangente à la parabole P aux points où elle est coupée par la droite $2x_0+1=0$, qui est précisément sa directrice. C'est donc une conique qui a un foyer en F et dont la directrice correspondante est la même que celle de la parabole. On peut d'ailleurs le constater autrement, en mettant le premier membre de l'équation sous la forme

$$\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2 - y_0^2 = 2x_0 - y_0^2;$$

(cette identité est facile à trouver, car elle exprime justement que tout point de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice). L'équation devient alors

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\left(x_0+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2 + y_0^2;$$

on reconnait que c'est celle d'une ellipse qui a même foyer et même directrice que la parabole et dont l'excentricité est $$\left|\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right|.$$

Lorsque A est pris au foyer même de la parabole, la conique S est un cercle, son équation est en effet (pour $x=\frac{1}{2}$, $y=0$),

$$x^2+y^2+\frac{5x}{2}+1=0 \qquad \text{ou} \qquad \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

2. L'équation de la circonférence C contient le paramètre m au second degré ; si les coordonnées d'un point de cette circonférence sont données, on obtient pour déterminer m une équation du second degré. Puisque les circonférences ont un point réel, le point donné P, il suffit pour qu'elles soient réelles, que les coefficients de l'équation le soient, c'est-à-dire que m soit réel. Pour que l'équation en m ait deux racines m_1 et m_2, il faut que les coordonnées de P satisfassent à l'inégalité

$$H \equiv y^2 + x(x^2+y^2+1) \geqslant 0, \qquad \text{ou} \qquad y^2(x+1)+x(x^2+1) \geqslant 0.$$

Construisons la courbe dont l'équation est

$$y^2 = -(x^2+1)\,\frac{x}{x+1};$$

pour chaque valeur de x comprise entre -1 et 0, y a deux valeurs égales et de signes contraires ; on a $$2yy' = -\frac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2},$$

la dérivée du numérateur est $6x(x+1)$, elle est négative quand x varie de -1 à 0, le polynome décroît donc de 2 à $+1$, il reste positif. Donc la dérivée de la valeur positive de y est négative. Quand x varie de -1 à 0, cette valeur de y décroît de $+\infty$ à 0 ; y' est infinie pour $x=0$. La courbe a la forme indiquée sur la figure 3. C'est l'enveloppe des cercles C.

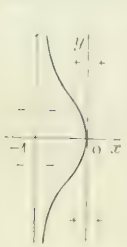


Fig. 3

Si $x \geqslant 0$, il est clair que $H \geqslant 0$; si $x \leqslant -1$, la deuxième forme de H montre que $H \leqslant 0$; enfin x étant compris entre -1 et 0, H est positif si la valeur absolue de y est supérieure à l'ordonnée du point de la courbe tracée qui a le même x. Donc H est positif dans la région du plan limitée par la courbe, du côté des x positifs.

Pour exprimer que les deux circonférences qui correspondent aux valeurs m_1 et m_2 du paramètre sont orthogonales, appliquons la condition

$$2aa' + 2bb' = c + c',$$

nous trouvons ainsi $$\frac{1}{2}(m_1m_2^2 + 2m_1m_2 - 2$$

ou $$(m_1m_2 + 2)^2 = 8,$$
d'où l'on tire $$m_1m_2 = 2(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Or le produit des deux racines de l'équation en m est $-\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x}$, l'équation du lieu se décompose donc en

$$x^2 + y^2 + 1 = 2x(1 \mp \sqrt{2}), \qquad \text{ou} \qquad [x - (1 \mp \sqrt{2})]^2 + y^2 = (1 \mp \sqrt{2})^2 - 1 = 2(1 \mp \sqrt{2})\ ;$$

comme $1 - \sqrt{2}$ est négatif, un seul de ces cercles est réel ; le lieu est donc formé du cercle

$$(x - 1 - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Les centres des deux cercles C_1 et C_2 ont respectivement pour coordonnées $+\dfrac{m_1^2}{2}$ et m_1, $+\dfrac{m_2^2}{2}$ et m_2 ; en écrivant que la droite qui les joint passe par le point fixe $Q(x_0, y_0)$ on a

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}m_1^2 & m_1 & 1 \\ \frac{1}{2}m_2^2 & m_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

en développant on met $(m_1 - m_2)$ en facteur, et comme les deux cercles sont distincts, on peut diviser par ce facteur qui n'est pas nul ; il reste

$$2x_0 - y_0(m_1 + m_2) + m_1m_2 = 0.$$

ce qui donne, en remplaçant la somme et le produit des racines en fonction des coefficients,

$$2x_0 + y_0\frac{2y}{x} - \frac{x^2 + y^2 + 1}{x} = 0,$$

ce qui est l'équation du lieu. En la rendant entière on voit que c'est un cercle

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + 1 = 0\ ;$$

on peut écrire cette équation de façon à mettre le centre et le rayon en évidence,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 - 1.$$

Ce cercle n'existe donc que si le point Q est extérieur au cercle Γ ; il a alors pour centre le point Q et pour rayon la longueur de la tangente menée de Q au cercle Γ.

(A. D.)

Bonnes solutions de MM. H. Frobert ; G. Lach ; L. Naucelle ; A. Rousseau ; L. Simon.
Assez bonne solution de M. Roux.
Solution passable de M. A. Courtois.

Mécanique.

2055. — *Une table de poids* P *repose sur un plan horizontal fixe* (H). *Cette table, dont la partie supérieure a la forme d'un cercle* (Γ), *est munie de trois pieds égaux dont les extrémités inférieures, réduites à des points, sont les projections sur le plan* (H) *des sommets d'un triangle* ABC *inscrit dans le cercle* (Γ).

La table est reliée à un point fixe O *par un fil flexible, inextensible et de poids négligeable, attaché au sommet* A *du triangle* ABC. *On suppose la table dans une position telle que le fil soit tendu.*

Démontrer qu'on peut, sans détruire l'équilibre de la table, faire agir sur elle une force Q *qui soit horizontale et dont le point d'application* M, *supposé différent de* A, *appartienne à la circonférence du cercle* (Γ). *Déterminer ce point* M, *la direction et le sens de la force* Q.

Déterminer l'intensité de la force Q *à partir de laquelle la table cesse d'être en équilibre.*

N. B. — *On désigne par* α *l'angle du fil* AO *avec la verticale : on supposera le point* O *plus élevé que le point* A. *On supposera de plus que le centre de gravité de la table, qui n'est pas homogène, est sur la verticale du centre de gravité du triangle* ABC. *Enfin on négligera les frottements.*

La table est un corps solide sur lequel agissent six forces, savoir : la tension T du fil, dirigée de A vers O, la force inconnue Q, appliquée en M, le poids P, appliqué au centre de gravité, G, et les réactions X, Y, Z du sol, verticales, dirigées de bas en haut, appliquées aux trois pieds A', B', C' de la table. Ces pieds étant eux-mêmes verticaux, les trois forces X, Y, Z peuvent être transportées en A, B et C.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la somme algébrique des projections des forces sur un axe quelconque soit nulle, ainsi que la somme de leurs moments.

Prenons d'abord comme axe la verticale Az : les moments de toutes les forces connues par rapport à cet axe sont nuls, donc le moment de la force inconnue doit être nul aussi. la ligne d'action de cette force passe en A.

Prenons un deuxième axe Ay, horizontal et perpendiculaire à OA, les projections de toutes les forces connues sur cet axe sont nulles, donc la force Q est perpendiculaire à cet axe. Sa ligne d'action est la trace sur le plan ABC du plan vertical projetant la ligne OA ; cette trace Ax coupant le cercle en A le coupe en un second point M.

Projetons les forces sur ce troisième axe, qui forme avec les précédents un trièdre trirectangle ; les projections de P, X, Y, Z étant nulles, celles de T et de Q doivent être égales et opposées. La direction de la force Q est donc opposée à celle de la projection du vecteur AO et $Q = -T \sin \alpha$.

Ecrivons maintenant que la somme des moments par rapport au côté BC est nulle : le moment de T est la somme des moments des deux composantes $T \sin \alpha$, horizontale et $T \cos \alpha$, verticale ; les moments de Q et de $T \sin \alpha$ sont égaux et de signes contraires ; ceux de Y et Z sont nuls ; il ne subsiste dans l'équation que ceux de P, X et $T \cos \alpha$.

En remarquant que la distance de G à BC est le tiers de la hauteur AH, nous avons

$$-P \times \frac{h}{3} + (X + T \cos \alpha)h = 0, \qquad \text{d'où} \qquad X = \frac{P}{3} - T \cos \alpha = \frac{P}{3} - Q \operatorname{cotg} \alpha.$$

Or la force X ne peut avoir que le sens ascendant, c'est-à-dire que X doit être positif, il faut donc que

$$Q \leqslant \frac{P}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Si cette condition n'est pas remplie, la force X nécessaire pour l'équilibre serait dirigée de haut en bas, cette force ne pouvant être produite par la résistance du sol, la table basculera autour de B'C', le pied A'A se soulevant.

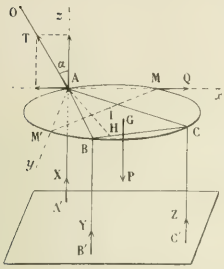
Il est facile de voir que l'existence de la force Q ne changera pas les réactions Y et Z ; en effet, pour déterminer ces réactions, on peut prendre les moments par rapport aux axes AC et BC successivement ; relativement à ces deux axes les moments de T et de Q sont nuls, on voit alors que Z et Y sont l'un et l'autre égaux à $\frac{1}{3}$ P et dirigés vers le haut.

Les conditions trouvées sont nécessaires et sont bien suffisantes : si elles sont vérifiées par les forces du système, la somme des projections des forces sur Ax est nulle, ainsi que sur Ay ; la somme des projections sur Az est

$$-P + X + Y + Z + T \cos \alpha = -P + \frac{P}{3} - Q \operatorname{cotg} \alpha + P + P + Q \operatorname{cotg} \alpha = 0,$$

la résultante générale du système est donc nulle.

La somme des moments par rapport à AB et à BC est nulle, donc l'axe du couple résultant est nul ou perpendiculaire au plan ABC ; mais la somme des moments par rapport à Az est nulle aussi, donc le couple résultant est nul.



Solution analogue : G. Lacu, à Douai et A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

Remarque. — Il était nécessaire de déterminer les réactions Y et Z, ou du moins de s'assurer que leur signe ne dépend pas de la force Q. S'il en avait été autrement, il aurait fallu rechercher les conditions nécessaires pour que ces forces Y et Z aient le sens ascendant.

Quelques correspondants ont bien indiqué les conditions que doit vérifier la force Q, mais leurs raisonnements prouvent seulement qu'elles sont suffisantes.

Assez bonnes solutions de MM. A Courtois ; Marescalchi.

2056. — *Un point matériel* M, *de masse* m, *est soumis à l'action d'une force* (F) *dont les projections* X, Y, Z *sur trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz *sont*

$$X = -\frac{mk^2x}{x^2+y^2+a^2}, \qquad Y = -\frac{mk^2y}{x^2+y^2+a^2}, \qquad Z = 0,$$

a désignant une longueur donnée et k une vitesse donnée.

1° *Le point* M *étant supposé abandonné sans vitesse initiale en un point donné* M_0 *de* Ox, *démontrer que le point* M *reste constamment sur* Ox *et calculer la vitesse avec laquelle il arrive en* O.

2° *La position initiale du point* M *étant toujours supposée sur* Ox, *démontrer qu'on peut le lancer avec une vitesse initiale parallèle à* Oy *de manière à lui faire décrire une circonférence de centre* O ; *déterminer la grandeur de cette vitesse initiale.*

3° *Déterminer toutes les trajectoires du point* M *pour lesquelles le mouvement est uniforme et de vitesse* k.

1. Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{x^2+y^2+a^2},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{x^2+y^2+a^2},$$

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

La troisième peut être intégrée deux fois de suite et donne

$$(4) \qquad z = ct + z_0,$$

c désignant la projection sur Oz de la vitesse à l'époque $t = 0$ et z_0 la valeur de la coordonnée z au même instant. Ces deux données étant nulles, z et $\frac{dz}{dt}$ restent constamment nuls. Ainsi lorsque la vitesse initiale est perpendiculaire à Oz ou nulle, la trajectoire est dans le plan P perpendiculaire à Oz mené par le point initial.

On peut former avec les équations (1) et (2) deux combinaisons intégrables. En multipliant la première par y, la seconde par x et faisant la différence, on a d'abord

$$(5) \qquad y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

ou $$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = 0, \qquad \text{donc} \qquad y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = C^{te}.$$

Cette propriété s'énonce ainsi : le moment de la vitesse par rapport à l'axe Oz est constant. Si à l'époque $t = 0$ la vitesse est nulle ou située dans un même plan avec l'axe, son moment restera toujours nul. On aura donc

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{y} - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{x} = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$Ly - Lx = LC^{te}$$

et

$$y = Cx.$$

Le mobile reste donc dans le plan fixe P′ contenant l'axe et la position initiale. Dans le cas particulier où la vitesse initiale est nulle, le mobile décrit l'intersection des plans P et P′, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe.

La deuxième combinaison intégrable se forme en multipliant les deux premières équations par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ respectivement, puis en en faisant la somme ; on obtient ainsi

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2 + a^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -k^2\frac{\frac{d}{dt}(r^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + a^2};$$

posons $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ et $r^2 = x^2 + y^2$, r est la distance du mobile M à l'axe, v est la vitesse du point m, projection de M sur le plan $z = 0$. L'équation précédente devient alors

$$\frac{d(v^2)}{dt} = -k^2\frac{d(r^2)}{dt}\frac{1}{r^2 + a^2}. \tag{6}$$

On intègre aisément et l'on trouve

$$v^2 = -k^2 L(r^2 + a^2) + C^{te}.$$

On détermine la constante en écrivant que la vitesse est nulle quand le point M est à la distance r_0 de l'axe ; la constante est $k^2 L(r_0^2 + a^2)$. Donc

$$v^2 = k^2 L\left(\frac{r_0^2 + a^2}{r^2 + a^2}\right).$$

On obtient la vitesse avec laquelle le mobile arrive en O en faisant $r = 0$, ce qui donne

$$v^2 = k^2 L\left(1 + \frac{r_0^2}{a^2}\right).$$

2. Si le mobile décrit un cercle ayant O pour centre, r est constant, la formule (6) montre alors que v est constant aussi, ce cercle est donc parcouru d'un mouvement uniforme ; il suffit alors que la force à laquelle est soumis le mobile soit dirigée vers le centre et égale à $m\frac{v^2}{r}$. Examinons d'autre part la façon dont est déterminée géométriquement la force qui agit sur le mobile. On remarque que

$$Z = 0, \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = -k^2\frac{m}{r^2 + a^2} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{r};$$

donc la force est dirigée de M vers l'axe perpendiculairement, sa grandeur ne dépend que de la distance de M à l'axe, par la relation

$$F = -k^2 m\frac{r}{r^2 + a^2}.$$

En égalant la force à $-\frac{mv^2}{r}$, on trouve $v = \frac{k^2 r^2}{r^2 + a^2}$, d'où $v = \frac{kr}{\sqrt{r^2 + a^2}}$

(6) L désignant le logarithme népérien.

La vitesse initiale doit donc être perpendiculaire à OM et égale à $\frac{kr}{\sqrt{r^2+a^2}}$.

3° Si le mouvement de M est uniforme, V étant la vitesse de M, on aura

$$V^2 = v^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

or $\frac{dz}{dt}$ est constant, donc v l'est aussi, ce qui entraîne que r l'est également, comme on l'a vu précédemment. Donc le mobile se déplace sur un cylindre de révolution ayant Oz pour axe. Son mouvement est un mouvement hélicoïdal uniforme, puisque les projections de la vitesse sur l'axe du cylindre et sur un plan perpendiculaire à l'axe sont constantes.

Si r est le rayon du cylindre, on a vu que

$$v^2 = k^2\frac{r^2}{r^2+a^2}.$$

donc

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = V^2 - \frac{k^2r^2}{r^2+a^2}.$$

Ces équations donnent les deux composantes de la vitesse initiale, l'une suivant la génératrice du cylindre, l'autre suivant la tangente au parallèle mené par M à condition que V soit donné supérieur à $\frac{kr}{\sqrt{r^2+a^2}}$. Si $v = k$, on aura

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{k^2a^2}{a^2+r^2}, \qquad v^2 = \frac{k^2r^2}{a^2+r^2}.$$

Il y a une infinité de mouvements satisfaisant à ces conditions ; par un point M quelconque il passe deux trajectoires hélicoïdales, l'une dextrorsum, l'autre sinistrorsum ; les formules précédentes donnent les composantes de la vitesse initiale. On voit que la pente p de l'hélice est $\frac{a}{r}$, elle décroît en raison inverse de r. Toutes ces hélices ont même pas, car le pas est

$$2\pi r \times p = 2\pi a.$$

(A. D.)

Bonnes solutions de MM. G. Lach ; A. Rousseau.
Assez bonnes solutions de MM. G. Bétier ; A. Courtois ; Mabescalchi.
Solution passable de M. P. Rémondin.

Calcul *.

2057. — *On donne les angles*

$$a = 50^\circ\,10'\,30'',$$
$$b = 40^\circ\,0'\,10'',$$
$$C = 121^\circ\,36'\,20''.$$

Calculer les angles A, B, c *par les formules*

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}.$$

N. B. — A, B, c *sont compris entre* 0 *et* 180°.

* Le programme de l'École Navale indique que le calcul doit être effectué avec des tables sexagésimales, à cinq décimales, mais il est dit en note que les candidats qui désirent employer des tables à sept décimales sont libres de le faire. On remarquera que les angles sont donnés avec les secondes, mais le nombre des secondes est multiple de 10. Le premier calcul a été effectué avec cinq décimales, le second avec sept.

Résultats.

$A = 42^\circ\ 15'\ 14''$.
$B = 34^\circ\ 15'\ 4''$,
$c = 76^\circ\ 35'\ 46''$.

Calculs préliminaires.

$a = 50^\circ\ 10'\ 30''$ $\quad C = 121^\circ\ 36'\ 20''$
$b = 40^\circ\ 0'\ 10''$ $\quad \frac{C}{2} = 60^\circ\ 48'\ 10''$
$a + b = 90^\circ\ 10'\ 40''$
$\frac{a+b}{2} = 45^\circ\ 5'\ 20''$
$a - b = 10^\circ\ 10'\ 20''$
$\frac{a-b}{2} = 5^\circ\ 5'\ 10''$

$\log \sin 45^\circ\ 5' = \bar{1},85012$ $\quad \delta = 12$
pour $20''$ $\quad 4$
$\log \sin \frac{a+b}{2} = \bar{1},85016$
$\text{colog} \sin \frac{a+b}{2} = 0,14984$
$\log \cos 45^\circ\ 6' = \bar{1},84873$ $\quad \delta = 12$
pour $-40''$ $\quad 8$
$\log \cos \frac{a+b}{2} = \bar{1},84881$

$\text{colog} \cos \frac{a+b}{2} = 0,15119$
$\log \sin 5^\circ\ 5' = \bar{2},94746$ $\quad \delta = 141$
pour $10''$ $\quad 23.5$
$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94769.5$
$\log \cos 5^\circ\ 5'\ 10'' = \bar{1},99829$ $\quad \delta = 1$
$\text{colog} \cos \frac{a-b}{2} = 0,00171$
$\log \text{tg}\, 60^\circ\ 48' = 0,25268$ $\quad \delta = 30$
pour $10''$ $\quad 5$
$\log \text{tg} \frac{C}{2} = 0,25273$
$\text{colog tg} \frac{C}{2} = \bar{1},74727$

Calculs définitifs.

1° Calcul de $\frac{1}{2}(A + B)$.

$\text{colog tg} \frac{C}{2} = \bar{1},74727$
$\log \cos \frac{a-b}{2} = \bar{1},99829$
$\text{colog} \cos \frac{a+b}{2} = 0,15119$
$\log \text{tg} \frac{A+B}{2} = \bar{1},89675$
$\log \text{tg}\, 38^\circ\ 15' = \bar{1},89671$ $\quad \delta = 26$
$9''$ pour 4
$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\ 15'\ 9''$, $\quad \log \sin 38^\circ\ 15'\ 9'' = \bar{1},79178.4$

2° Calcul de $\frac{1}{2}(A - B)$.

$\text{colog tg} \frac{C}{2} = \bar{1},74727$
$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94769.5$
$\text{colog} \sin \frac{a+b}{2} = 0,14984$
$\log \text{tg} \frac{A-B}{2} = \bar{2},84480.5$

$\log \text{tg}\ 4^\circ\ 0' = \bar{2},84464$ $\quad \delta = 182$
$5''$ pour 16.5
$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\ 0'\ 5''$ $\quad \log \sin 4^\circ\ 0'\ 5'' = \bar{2},84373$
$\frac{A+B}{2} = 38^\circ\ 15'\ 9''$ $\quad \text{colog} \sin \frac{A-B}{2} = 1,15627$
$A = 42^\circ\ 15'\ 14''$
$B = 34^\circ\ 15'\ 4''$

3° Calcul de c.

$\log \sin \frac{a-b}{2} = \bar{2},94769.5$
$\text{colog} \cos \frac{a-b}{2} = 0,00171$
$\log \sin \frac{A+B}{2} = \bar{1},79178.4$
$\text{colog} \sin \frac{A-B}{2} = 1,15627$
$\log \text{tg} \frac{c}{2} = \bar{1},89745.9$
$\log \text{tg}\, 38^\circ\ 17' = \bar{1},89723$ $\quad \delta = 26$
$53''$ pour 22.9
$\frac{c}{2} = 38^\circ\ 17'\ 53''$
$c = 76^\circ\ 35'\ 46''$

G. LACH, à Douai et A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Bonnes solutions de MM. A. Courtois ; H. Frobert.
Assez bonne solution de M. Roux.

2058. — *Calculer la valeur de l'intégrale* $I = \int_0^a \sin^2 x dx = \frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4}$, *sachant que a est le plus petit angle positif dont la tangente est donnée par* $\operatorname{tg} a = 2{,}017$.

On trouve

$$\log 2{,}017 = 0{,}3047059$$

$$\log \operatorname{tg} 63^\circ 37' 40'' = 0{,}3046933 \qquad \delta = 529$$

pour $2''$ $\quad 105{,}8$

— $0'',4$ $\quad 20{,}2$

donc

$$a = 63^\circ 37' 42'',4$$

$$\frac{a}{2} = 31^\circ 48' 51'',2$$

$$2a = 127^\circ 15' 24'',8 = 180^\circ - (52^\circ 44' 35'',2)$$

Pour le calcul de la mesure en radians de l'arc $\frac{a}{2}$, on consulte la table qui donne les longueurs des arcs du cercle dont le rayon est l'unité :

$$30^\circ = 0{,}52359878$$
$$1^\circ = 0{,}01745329$$
$$40' = 0{,}01163553$$
$$8' = 0{,}00232711$$
$$50'' = 0{,}00024241$$
$$1'' = 0{,}00000485$$
$$0'',2 = 0{,}00000097$$

$$\frac{a}{2} = 0{,}55526294$$

Calcul de $\frac{1}{4} \sin 2a$:

$$\log \sin 52^\circ 44' 30'' = \bar{1}{,}9008661 \qquad \delta = 160$$

pour $5''$ $\quad 80$

— $0'',2$ $\quad 3{,}2$

$$\text{colog } 4 = \bar{1}{,}3979400$$

$$\log \frac{1}{4} \sin 2a = \bar{1}{,}2988144{,}2$$

$$\log 0{,}1989800 = \bar{1}{,}2988094 \qquad \delta = 219$$

$20 \quad 50{,}2$

$03 \quad 6{,}4$

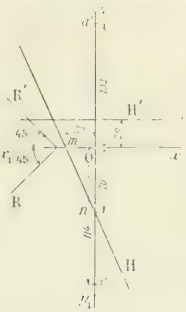
$$0{,}1989823 = \frac{1}{4} \sin 2a$$

$$I = 0{,}5552629 - 0{,}1989823$$
$$= 0{,}3562806.$$

Bonnes solutions de MM. G. Lach ; A. Rousseau.
Assez bonnes solutions de MM. A. Courtois ; H. Frobert.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2087. *Le petit axe de la feuille étant xx_1 et le grand axe yy_1, on donne :*



1° Sur le grand axe, le point (a, a') tel que $Oa' = 132^{mm}$, $Oa = 114^{mm}$;

2° L'horizontale (H, H') de cote 29^{mm}, dont la projection horizontale coupe les axes aux points m et n tels que $Om = 32^{mm}$, $On = 70^{mm}$.

On considère :

1° Le tétraèdre régulier ayant un sommet en (a, a'), une arête dirigée suivant (H, H'), et dont le quatrième sommet est à droite du grand axe de la feuille ;

2° La sphère de centre (a, a') dont le rayon est de 65^{mm}.

Représenter le solide formé par l'ensemble de ce tétraèdre et de cette sphère supposés opaques et limités chacun à la partie extérieure à leur intersection commune, et indiquer les ombres (propres et portées par la sphère sur le tétraèdre) produites par des rayons lumineux parallèles à (R, R').

N. B. — *Les lignes de construction étant tracées en rouge, on figurera en noir les arêtes du solide représenté (celles qui sont cachées étant en pointillé), en bleu les limites des ombres (considérées seulement sur les parties vues), les ombres elles-mêmes étant indiquées par une teinte légère ou des hachures bleues.*

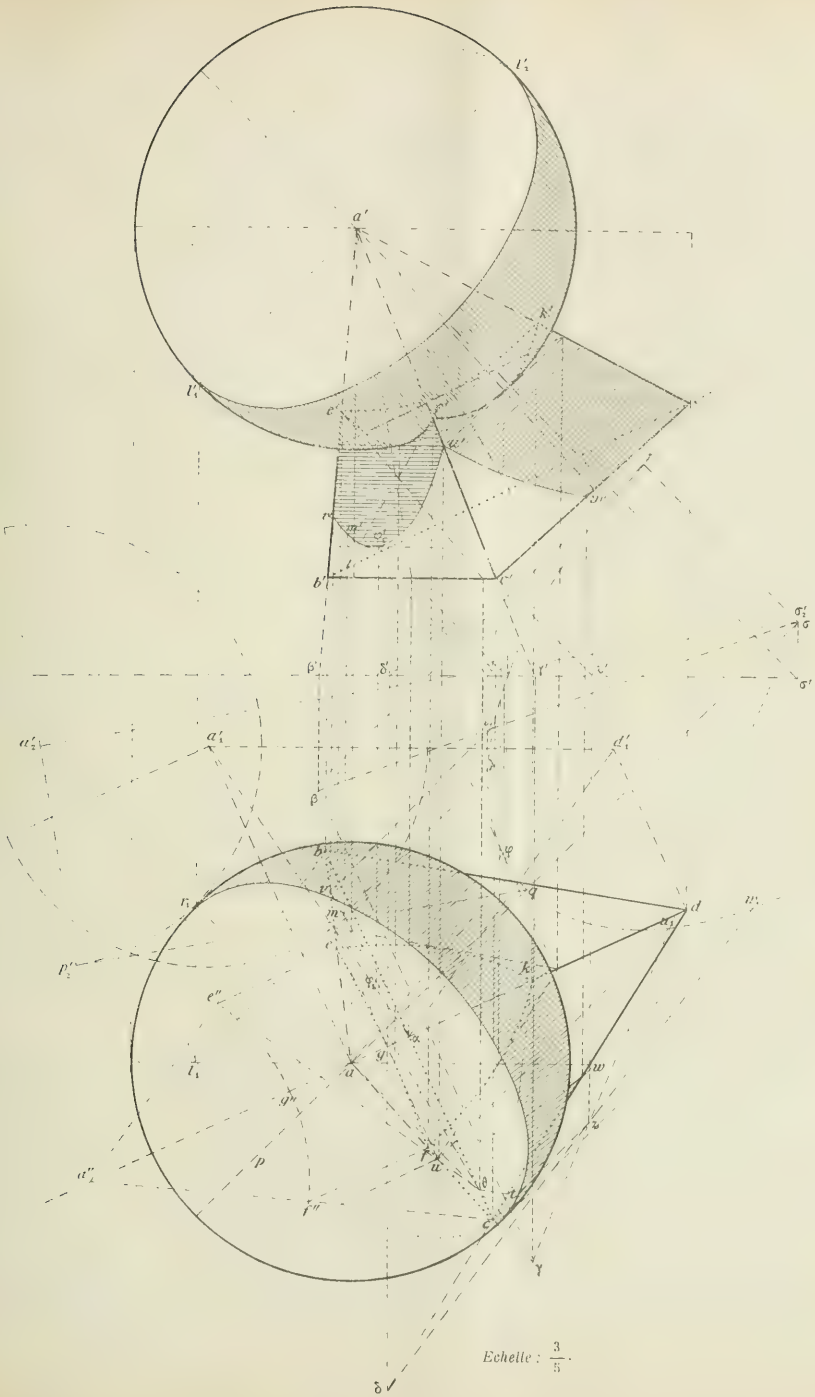
(*École des ponts et chaussées, cours préparatoires, concours de 1912.*)

Construction du tétraèdre. — Prenons pour plan vertical auxiliaire de projection le plan mené par le sommet (a, a') et perpendiculaire à l'arête horizontale $(bc, b'c')$ dont la position est donnée. Nous avons en a_1' la projection du point A et par suite nous pouvons rabattre ce sommet autour de l'horizontale bc en a''. Connaissant alors la hauteur $a''\alpha$ du triangle équilatéral dont le côté est sur bc, nous en déduisons immédiatement les sommets b et c. Si maintenant nous considérons le triangle de l'espace AαD, nous en connaissons les deux côtés $A\alpha = a_1'\alpha$ et $AD = bc$. Donc nous pouvons déterminer la projection d_1' du quatrième sommet en prenant l'intersection des deux arcs de cercles décrits des points α et a_1' comme centres avec ces longueurs pour rayons. Nous en déduisons les projections d et d' du sommet D et le tétraèdre est déterminé.

Intersection de la sphère et du tétraèdre. — La sphère de centre A coupe les trois faces du tétraèdre suivant trois arcs de grand cercle égaux qui se projetteront suivant trois arcs d'ellipse sur les deux plans de projection. Si du point a'' comme centre nous traçons la circonférence ayant pour rayon le rayon de la sphère, elle nous donne l'arc $e''f''$ que nous pouvons immédiatement relever en ef et la tangente en e par exemple est le relèvement $e\theta$ de la tangente $e''\theta$. L'arc d'ellipse a un sommet en g, relèvement du point g'' et l'horizontale de ce point fait connaître sur les arêtes AB et AC les points par où il suffira de mener des parallèles aux arêtes BD et CD pour avoir, au milieu de chacune de ces parallèles, un point de l'ellipse correspondante et la tangente en ce point. Pareillement, il suffira de mener par l'un des points e ou f situés sur les arêtes la parallèle à bd ou à cd pour avoir le point d'intersection de l'arête ad avec la sphère. On a la tangente en k dans la face adc, par exemple, en remarquant qu'elle coupe l'arête CD à une distance du point c égale à la distance θc ; on mènera donc par θ une parallèle à bd et on obtiendra le point t qu'il faut joindre à k pour avoir la tangente en k. Construction analogue pour les autres tangentes. On déduit les projections verticales des trois sections planes de leurs projections horizontales et les tangentes aux points remarquables sans aucune difficulté.

Ombre propre et ombre portée. — L'ombre propre de la sphère est la circonférence de grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la direction des rayons lumineux. Menons par le centre de la sphère la parallèle $(a\sigma, a'\sigma')$ aux rayons lumineux ; c'est l'axe du cylindre circonscrit à la sphère le long de l'ombre propre. Prenons comme plan vertical de projection auxiliaire le plan $a\sigma$ qui projette l'axe du cylindre ; nous obtenons en $a_2'\sigma_2'$ la nouvelle projection verticale de l'axe, et en traçant la circonférence de centre a_2' et de rayon égal au rayon de la sphère, il suffit de lui mener les tangentes parallèles à $a_2'\sigma_2'$ pour avoir les génératrices dont la trace horizontale donne les sommets du grand axe de la section du cylindre par le plan horizontal. Soit q l'un de ces sommets, il fait connaître le demi-grand axe de l'ellipse dont l'autre demi-axe est σr, et que nous pouvons par conséquent tracer. Le grand cercle d'ombre propre a pour projection verticale auxiliaire la droite $p_2'a_2'$ et par suite l'ellipse projection horizontale de l'ombre propre a pour demi-axes ar_1 et ap ; on peut donc la tracer. L'ellipse projection verticale de l'ombre propre est égale à celle que nous venons de trouver à cause de la symétrie que présente la direction des rayons lumineux par rapport aux deux plans de projection, son grand axe étant le diamètre l_1l_2 perpendiculaire à $a'\sigma'$.

Pour trouver l'ombre portée sur le tétraèdre, nous commencerons par prendre l'intersection de chaque



Echelle : $\frac{3}{5}$.

arête avec le cylindre. Il est d'ailleurs visible, en raison de la position du tétraèdre, que les faces ABC et ACD seules donneront des courbes d'ombre portée.

Si nous prenons la trace horizontale (γ', γ) de l'arête AC, l'intersection de la droite $\sigma\gamma$ avec la base du cylindre nous donne le pied de la génératrice u_1u sur laquelle est le point (u, u'). Si nous menons maintenant la trace horizontale $\gamma\beta$ du plan de la face ABC, elle passe par la trace β de l'arête AB, et la droite $\beta\sigma$ coupe l'ellipse au point v_1 qui nous donne de la même manière le point (v, v'). Nous déterminons dans la face ABC le point sur la génératrice de contour apparent vertical du cylindre en appliquant la construction précédente à la génératrice dont le pied est (λ', λ), mais ici nous avons, pour obtenir le point où elle perce la face du tétraèdre, pris comme plan auxiliaire le plan qui projette verticalement cette génératrice, et dont l'intersection avec les arêtes $b'c'$ et $b'a'$ nous a donné une droite coupant la génératrice au point cherché (m, m'). Dans la même face nous avons déterminé le point le plus bas en menant le plan tangent au cylindre parallèle à BC. Sa trace horizontale est la tangente à l'ellipse parallèle à bc et fait connaître la génératrice $\varphi\varphi_1$ qui passe au point cherché (φ_1, φ'_1).

Le point d'intersection de l'arête CD et du cylindre s'obtient en menant par cette arête le plan parallèle aux génératrices et prenant l'intersection w_1 de sa trace horizontale δz avec l'ellipse, d'où le point (w, w'). On peut déterminer dans cette face un autre point de l'arc $u'w'$ en prenant une génératrice quelconque du cylindre qui traverse cet arc.

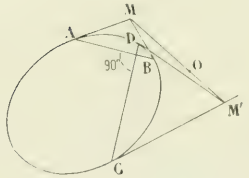
La distinction des parties vues et des parties cachées ne présente aucune difficulté ; nous avons déterminé les points où les deux arcs d'ellipse $(ef, e'f')$ et $(fk, f'k')$ touchent le contour apparent vertical de la sphère et limitent l'arc caché de ce contour apparent. Ces points sont sur les droites de front correspondantes dans chaque face du tétraèdre.

QUESTIONS PROPOSÉES

2143. — On donne une ellipse et un point O fixe. Au point M du plan on fait correspondre le point M′ tel que la droite MM′ passe par le point O et que les polaires des points M, M′ soient perpendiculaires.

Etudier la correspondance entre les points M et M′.

JEAN MOURREL.

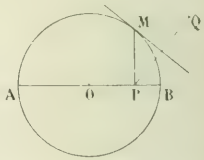


2144. — En désignant par ρ le rayon de courbure d'une courbe et par α l'angle que fait la tangente au point correspondant avec Ox, trouver les courbes telles que

$$\rho \cos \alpha = k,$$
$$\rho \cos^2 \alpha = k,$$
$$\rho \cos^3 \alpha = k,$$
$$\frac{\rho}{\cos \alpha} = k.$$

k désignant à chaque fois une constante [1].

AMBLARD, à Ruines.



2145. — On considère un cercle O et un diamètre fixe AB. D'un point variable M de la circonférence on abaisse la perpendiculaire MP sur AB. Le lieu du point Q symétrique de P par rapport à la tangente en M est une néphroïde (épicycloïde à deux rebroussements).

E.-N. BARISIEN.

[1] Bien que ces questions n'aient rien d'inédit, elles n'en constituent pas moins des exercices utiles pour les élèves qui ne les ont pas rencontrées, et c'est à ce titre que nous les publions.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Juin 1913. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1912.

Groupe I.

Mathématiques.

2043. — *On considère trois axes* Ox, Oy, Oz, *les axes* Ox *et* Oy *étant rectangulaires.*

On donne trois circonférences réelles (C_1), (C_2), (C_3) *rencontrant l'axe* Oz *et situées dans des plans distincts, parallèles au plan* xOy *; on désigne par* O_1, O_2, O_3 *les centres de ces circonférences et par* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ *leurs coordonnées.*

1° *Former l'équation des quadriques passant par deux des courbes* (C_1), (C_2), (C_3).

Toute conique rencontrant chacune des courbes (C_1), (C_2) *en deux points à distance finie est située avec* (C_1) *et* (C_2) *sur une même quadrique.*

A quelles conditions doivent satisfaire les données pour que (C_1), (C_2), (C_3) *soient situées sur une même quadrique ?*

On supposera dans la suite que ces conditions ne sont pas vérifiées.

2° *Déterminer les plans* P *coupant chacune des trois courbes* (C_1), (C_2), (C_3) *en deux points à distance finie, les six points obtenus étant situés sur une même conique, soit* (Σ).

Montrer que les plans P *sont parallèles à une direction fixe.*

Lorsqu'on assujettit les plans P *à passer par un point donné* R, *la conique* (Σ) *engendre une surface cubique* (S).

Pour quels points R *la surface* (S) *est-elle décomposée, c'est-à-dire formée d'un plan et d'une quadrique ?*

Comment se coupent deux surfaces (S) ?

3° *Toute surface cubique passant par* (C_1), (C_2), (C_3) *peut-elle être obtenue d'après la génération précédente ?*

On formera l'équation de la surface et on cherchera à l'écrire à l'aide de surfaces cubiques décomposées vérifiant les conditions imposées.

4° *On choisit les circonférences* (C_1) *et* (C_2) *de rayon nul* (O_1 *et* O_2 *étant alors sur* Oz), *les plans de ces circonférences étant symétriques par rapport au plan* xOy, *et le centre de la circonférence* (C_3) *dans le plan* xOz.

On désigne par (S_1) *la surface* (S) *correspondant à ces données et passant par les axes* Oz *et* Oy.

Les sections de la surface (S_1) *par les plans parallèles à* xOy *et par les plans passant par* Oz *comprennent des circonférences* (C) *et des hyperboles* (H).

Indiquer la forme de la surface (S_1) *en traçant ces sections.*

5° *Exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface* (S_1) *à l'aide de deux paramètres fixant la position des plans des courbes* (C) *et* (H) *passant par ce point.*

Les tangentes aux courbes de l'une des familles (C) *ou* (H) *aux points de rencontre avec une courbe*

arbitrairement choisie dans l'autre famille engendrent une surface réglée. De quelle nature sont les surfaces réglées ainsi obtenues?

Comment sont constitués les cônes circonscrits à la surface (S_1) *et dont les sommets sont situés sur* Oz *? les cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles au plan* xOy *?*

1. Les équations du cercle (C_1) sont

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y = 0, \qquad z - \gamma_1 = 0,$$

et il suffit d'y remplacer l'indice 1 par les indices 2 et 3 pour en déduire les équations des cercles (C_2) et (C_3).

L'équation générale des quadriques passant par le cercle (C_1) est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + (z - \gamma_1)(ux + vy + wz + r) = 0,$$

u, v, w, r étant des paramètres. Ecrivons que le plan $z = \gamma_2$ coupe cette quadrique suivant le cercle (C_2) ; pour cela, nous remplaçons z par γ_2 dans l'équation précédente, nous avons

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + (\gamma_2 - \gamma_1)(ux + vy + w\gamma_2 + r) = 0,$$

puis nous écrivons que cette équation est identique à

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y = 0.$$

Nous obtenons ainsi

$$-2\alpha_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)u = -2\alpha_2, \qquad -2\beta_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)v = -2\beta_2, \qquad \gamma_2 - \gamma_1)(w\gamma_2 + r) = 0\,;$$

et comme on suppose $\gamma_2 - \gamma_1 \neq 0$, nous en tirons

$$u = -\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \qquad v = -\frac{2(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \qquad r = -w\gamma_2$$

Il en résulte que l'équation générale des quadriques passant par les cercles (C_1) et (C_2) est

$$(1) \quad \left[x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + (z - \gamma_1)\left[-\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}x - \frac{2(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}y + w(z - \gamma_2)\right]\right] = 0\,;$$

elle renferme le seul paramètre w.

Si on considère une conique (K) rencontrant (C_1) aux points A_1, B_1 et (C_2) aux points A_2, B_2, on peut déterminer w de façon que la quadrique (1) contienne la conique (K) ; il suffit d'écrire que l'équation (1) est vérifiée par les coordonnées d'un point D, choisi arbitrairement sur cette conique. w étant ainsi déterminé, la quadrique (1) contiendra cinq points de la conique (K), et par suite, elle la contiendra tout entière.

Examinons maintenant si la quadrique (1) peut contenir le cercle (C_3). Remplaçons dans l'équation (1) z par γ_3, nous avons

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + (\gamma_3 - \gamma_1)\left[-\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}x - \frac{2(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}y + w(\gamma_3 - \gamma_2)\right] = 0,$$

puis écrivons que cette équation est identique à

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_3 x - 2\beta_3 y = 0.$$

Nous obtenons

$$-\alpha_1 - \frac{(\gamma_3 - \gamma_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\alpha_3, \qquad -\beta_1 - \frac{(\gamma_3 - \gamma_1)(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = -\beta_3, \qquad w = 0.$$

Les deux premières s'écrivent

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_3}\,;$$

elles expriment que les centres des cercles (C_1), (C_2), (C_3) sont en ligne droite. Telle est la condition pour que ces trois cercles soient sur une même quadrique : ce résultat était évidemment à prévoir.

2. Soit (P) un plan coupant les cercles (C_1), (C_2), (C_3) respectivement aux points a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, situés sur une même conique (Σ). Par cette conique et par les cercles (C_1) et (C_2) on peut faire passer une quadrique (Q) dont l'équation peut être mise sous la forme (1). Cette quadrique coupe le

plan du cercle (C_3) suivant un cercle (C'_3) passant par les points a_3, b_3; donc la droite a_3b_3 est l'axe radical des cercles (C_3) et (C'_3).

Les équations de ces deux cercles étant

$$x^2+y^2-2\alpha_1x-2\beta_1y+(\gamma_3-\gamma_1)\left[-\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{\gamma_1-\gamma_2}x-\frac{2(\beta_1-\beta_2)}{\gamma_1-\gamma_2}y+w(\gamma_3-\gamma_2)\right]=0,$$

$$x^2+y^2-2\alpha_3x-2\beta_3y=0,$$

l'équation de a_3b_3 sera

$$2(\alpha_3-\alpha_1)x+2(\beta_3-\beta_1)y+(\gamma_3-\gamma_1)\left[-\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{\gamma_1-\gamma_2}x-\frac{2(\beta_1-\beta_2)}{\gamma_1-\gamma_2}y+w(\gamma_3-\gamma_2)\right]=0,$$

ou

$$2x[\alpha_1(\gamma_2-\gamma_3)+\alpha_2(\gamma_3-\gamma_1)+\alpha_3(\gamma_1-\gamma_2)]+2y[\beta_1(\gamma_2-\gamma_3)+\beta_2(\gamma_3-\gamma_1)+\beta_3(\gamma_1-\gamma_2)]$$
$$-w(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_1-\gamma_2)=0,$$

ou encore

$$2Ax+2By-w\Pi=0,$$

en posant

$$A=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1 & 1\\ \alpha_2 & \gamma_2 & 1\\ \alpha_3 & \gamma_3 & 1\end{vmatrix},\qquad B=\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & 1\\ \beta_2 & \gamma_2 & 1\\ \beta_3 & \gamma_3 & 1\end{vmatrix},\qquad \Pi=(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_1-\gamma_2).$$

L'équation du plan (P) est donc de la forme

(2) $$2Ax+2By-w\Pi+\lambda(z-\gamma_3)=0.$$

Nous voyons ainsi que ce plan est parallèle à la direction fixe (Δ)

(Δ) $$Ax+By=0,\qquad z=0.$$

On vérifie aisément que cette direction fixe est perpendiculaire à la trace sur le plan xOy du plan $O_1O_2O_3$ qui passe par les centres des cercles (C_1), (C_2), (C_3). En effet, l'équation de ce plan est

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1\end{vmatrix}=0;$$

le coefficient de x est B, celui de y, $-A$.

Ecrivons maintenant que le plan (P) passe par le point donné $R(x_0, y_0, z_0)$, nous avons

(3) $$2Ax_0+2By_0-w\Pi+\lambda(z_0-\gamma_3)=0.$$

Nous obtiendrons le lieu de la conique (Σ) en éliminant w et λ entre les équations (1), (2) et (3).

Des équations (2) et (3) nous tirons sans difficulté

$$w=\frac{2[(Ax_0+By_0)(z-\gamma_3)-(Ax+By)(z_0-\gamma_3)]}{\Pi(z-z_0)},$$

et en portant cette valeur dans l'équation (1), nous obtenons, après un calcul facile, l'équation de la surface cubique (S) sous la forme

(4) $$\Pi(z-z_0)\left[x^2+y^2-2xz\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\gamma_1-\gamma_2}-2yz\frac{\beta_1-\beta_2}{\gamma_1-\gamma_2}+2x\frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}+2y\frac{\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}\right]$$
$$+2(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)(z-\gamma_3)(Ax_0+By_0)-2(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)(z_0-\gamma_3)(Ax+By)=0.$$

Cette surface passe évidemment par les trois cercles donnés, comme il est d'ailleurs facile de le vérifier.

Si cette surface se décompose en une quadrique et un plan, ce plan ne peut être que celui d'un des cercles (C_1), (C_2), (C_3) puisqu'il n'existe pas de quadrique contenant ces trois cercles. Ecrivons que l'équation (4) est divisible par $z-\gamma_1$; on doit avoir $\gamma_1-z_0=0$, ce qui montre que le point R doit être dans le plan $z-\gamma_1=0$.

Donc la surface (S) se décomposera pour les points R, situés dans les plans des trois cercles.

Considérons deux surfaces (S) relatives aux points $R(x_0, y_0, z_0)$ et $R_1(x_1, y_1, z_1)$, leurs équations peuvent s'écrire

$$\Pi\Gamma_{12}(z - z_0 + 2(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)(z - \gamma_3)(Ax_0 + By_0) - (z_0 - \gamma_1)(Ax + By)) = 0,$$
$$\Pi\Gamma_{12}(z - z_1 + 2(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)(z - \gamma_3)(Ax_1 + By_1) - (z_1 - \gamma_1)(Ax + By)) = 0,$$

où nous avons posé

$$\Gamma_{12} = x^2 + y^2 - 2xz\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \gamma_2} - 2yz\frac{\beta_1 - \beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2} + 2x\frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} + 2y\frac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

En éliminant $\Pi\Gamma_{12}$ entre les deux équations, nous obtenons

$$(z - \gamma_1)(z - \gamma_2)(z - \gamma_3)(Ax_0 + By_0)(z - z_1) - (Ax_1 + By_1)(z - z_0) - (Ax + By)(z_0 - z_1)] = 0.$$

Cette équation représente quatre plans, les plans des cercles donnés et le plan passant par les points R, R_1 parallèle à Δ. Ce plan coupe les deux surfaces suivant une même conique (Σ). Il en résulte que l'intersection des deux surfaces se compose des cercles (C_1), (C_2), (C_3), de la conique (Σ) et de la droite de l'infini du plan des xy, comme on le vérifie aisément.

3. Un cercle quelconque rencontre une surface cubique en six points, qui sont les points de rencontre du cercle et de la cubique, section de la surface par le plan du cercle. Donc, pour qu'un cercle soit situé sur une surface cubique, il faut que la surface contienne sept points de ce cercle.

Or les trois cercles (C_1), (C_2), (C_3), étant situés dans des plans parallèles, ont deux points communs, les points cycliques de leurs plans. Donc, pour écrire que la surface cubique contient les trois cercles, nous écrivons qu'elle contient les points cycliques, et cinq points de chaque cercle. Cela fait en tout dix-sept conditions, et comme l'équation générale des surfaces cubiques renferme dix-neuf paramètres, on voit que l'équation générale des surfaces cubiques qui passent par les cercles (C_1), (C_2), (C_3) contient *deux* paramètres.

Or l'équation de la surface (S) relative au point R contient seulement les deux paramètres $Ax_0 + By_0$ et z_0.

On en conclut que toute surface cubique passant par (C_1), (C_2), (C_3) peut être obtenue d'après la génération précédente.

Parmi les surfaces cubiques passant par les trois cercles, on peut envisager les surfaces décomposées qui sont formées par une quadrique passant par deux des cercles et par le plan de l'autre.

Considérons par exemple la quadrique (1) pour $w = 0$, nous avons écrit son équation $\Gamma_{12} = 0$; nous pourrons envisager la surface décomposée $\Gamma_{12}(z - \gamma_3) = 0$, et les surfaces analogues. L'équation générale des surfaces cubiques passant par les trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) pourra alors s'écrire

$$\lambda_1(z - \gamma_3)\Gamma_{23} + \lambda_2(z - \gamma_1)\Gamma_{31} + \lambda_3(z - \gamma_2)\Gamma_{12} = 0.$$

4. Si l'on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 = -\gamma_2, \quad \beta_3 = 0,$

on en déduit $A = -2\gamma_1\gamma_3, \quad B = 0,$

et l'équation de la surface (S) s'écrit

$$2\gamma_1(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)(z - z_0)(x^2 + y^2) - 2(z^2 - \gamma_1^2)(z - \gamma_3)(2\alpha_3\gamma_1 x_0 - 2(z^2 - \gamma_1^2)(z_0 - \gamma_3)2\alpha_3\gamma_1 x = 0.$$

Pour que cette surface passe par les axes Oz et Oy, il faut qu'en faisant dans l'équation $x = 0$, cette équation contienne yz en facteur. On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que si z_0 et x_0 sont nuls.

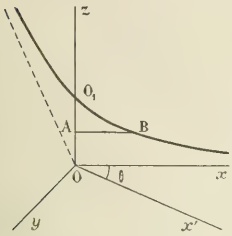
Par suite, l'équation de la surface (S_1) est

$$(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)(z - z_0)(x^2 + y^2) + 2(z^2 - \gamma_1^2)(z - \gamma_3)\alpha_3\gamma_1 x = 0;$$

ce que nous pouvons écrire $\quad z(x^2 + y^2) - mxz + a^2 y = 0,$

en posant $\quad m = -\dfrac{2\alpha_3\gamma_1}{\gamma_1^2 - \gamma_3^2}, \qquad a = \gamma_1.$

On reconnaît immédiatement que cette surface est symétrique par rapport à l'origine et par rapport



au plan xOz. Nous pourrons nous borner à étudier la forme de cette surface pour les valeurs positives de z.

Un plan parallèle au plan des xy, $z - h = 0$, coupe la surface (S_1) suivant un cercle (C)

$$z - h = 0, \qquad h(x^2 + y^2) - mx(h^2 - a^2) = 0,$$

qui a un diamètre dans le plan zOx, ce diamètre étant limité d'une part à Oz et d'autre part à l'hyperbole (H_1)

$$y = 0, \qquad z(x - mz) + ma^2 = 0,$$

trace de la surface sur le plan xOz. Cette hyperbole a pour asymptotes Ox et la droite $x - mz = 0$, et elle rencontre Oz aux deux points O_1 et O_2 qui ont pour cotes $\pm a$.

Par le point A de Oz qui a pour cote h menons AB parallèle à Ox, le point B étant sur (H_1); le cercle (C) a pour diamètre AB.

En faisant varier h de 0 à $+\infty$, on voit alors aisément la forme de la surface engendrée par ce cercle. On remarquera que pour $h = a$, le diamètre AB s'annule, le point O_1 est un point double de la surface, comme on le vérifie aisément en transportant l'origine en ce point.

Considérons maintenant un plan passant par Oz, défini par sa trace Ox' sur le plan des xy; nous désignerons par θ l'angle de Ox' avec Ox. Nous obtiendrons l'équation de la section de la surface par ce plan, rapportée aux axes Ox', Oz, en remplaçant dans l'équation de la surface x par $x' \cos\theta$ et y par $x' \sin\theta$, ce qui nous donne

$$zx'^2 - mx' \cos\theta(z^2 - a^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x'z(x' - mz\cos\theta) + ma^2\cos\theta) = 0.$$

Cette section se compose de l'axe des z et d'une hyperbole (H) ayant pour asymptotes Ox' et $x' - mz\cos\theta = 0$, et passant par les points O_1 et O_2.

5. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la surface; par ce point je mène un plan parallèle au plan xOy, $Z - z = 0$, qui coupe la surface suivant un cercle (C) passant par le point M, et un plan passant par Oz, $\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}$, qui coupe la surface suivant une hyperbole (H) passant aussi par le point M. Si nous désignons par θ l'angle de la trace de ce dernier plan sur xOy avec Ox, nous pouvons poser

$$x = x' \cos\theta, \qquad y = x' \sin\theta,$$

et en portant ces valeurs dans l'équation de la surface (S_1) nous avons

$$zx'^2 - mx' \cos\theta . z^2 - a^2) = 0,$$

d'où nous tirons

$$x' = \frac{m\cos\theta(z^2 - a^2)}{z},$$

et par suite les coordonnées x, y, z du point M sont

$$x = \frac{m(z^2 - a^2)\cos^2\theta}{z}, \qquad y = \frac{m(z^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta}{z}, \qquad z = z;$$

elles sont exprimées en fonction des deux paramètres θ et z.

Cherchons d'abord la surface réglée engendrée par les tangentes aux divers cercles (C) aux points où ces cercles rencontrent une hyperbole (H). Les paramètres directeurs de ces tangentes sont les dérivées de x, y, z par rapport à θ,

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -\frac{2m(z^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta}{z}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{m(z^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\theta} = 0,$$

et les équations d'une de ces tangentes sont

$$\frac{X - \frac{m(z^2 - a^2)\cos^2\theta}{z}}{-\frac{2m(z^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta}{z}} = \frac{Y - \frac{m(z^2 - a^2)\cos\theta\sin\theta}{z}}{\frac{m(z^2 - a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{z}}, \qquad Z - z = 0,$$

ou $$X\cos 2\theta + Y\sin 2\theta - \frac{m(z^2 - a^2)}{z}\cos^2\theta = 0, \qquad Z - z = 0.$$

Quand z varie, cette droite reste parallèle à une droite fixe ; elle engendre un cylindre du second degré qui a pour équation

$$(X\cos 2\theta + Y\sin 2\theta) - m(Z^2 - a^2)\cos^2\theta = 0.$$

Ce cylindre a pour directrice l'hyperbole (H).

Prenons maintenant les dérivées de x, y, z par rapport à z, nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial z} = m\cos^2\theta\,\frac{z^2 + a^2}{z^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = m\cos\theta\sin\theta\,\frac{z^2 + a^2}{z^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1\,;$$

ce sont les paramètres directeurs de la tangente à l'hyperbole (H) au point de rencontre avec un cercle (C). Les équations de cette tangente sont

$$\frac{X - \dfrac{m\cos^2\theta(z^2 - a^2)}{z}}{m\cos^2\theta\,\dfrac{z^2 + a^2}{z^2}} = \frac{Y - \dfrac{m\cos\theta\sin\theta(z^2 + a^2)}{z}}{m\cos\theta\sin\theta\,\dfrac{z^2 + a^2}{z^2}} = \frac{Z - z}{1},$$

ou $$\frac{Xz^2}{m\cos^2\theta\,(z^2 + a^2)} = \frac{Yz^2}{m\cos\theta\sin\theta(z^2 + a^2)} = Z - \frac{2a^2z}{z^2 + a^2}.$$

Quand θ varie, z restant fixe, cette tangente passe par un point fixe P, situé sur Oz, et ayant pour cote $\dfrac{2a^2z}{z^2 + a^2}$.

Il en résulte que le lieu de cette tangente est un cône ayant pour sommet le point P et pour base le cercle (C) de cote z. L'équation de ce cône s'obtient d'ailleurs en éliminant θ entre les équations de la tangente ; on trouve ainsi

$$z^2(X^2 + Y^2) - m(z^2 + a^2)X\left(Z - \frac{2a^2z}{z^2 + a^2}\right) = 0.$$

Cherchons maintenant le cône circonscrit à la surface (S_1) qui a pour sommet le point L de Oz, ayant pour cote λ. La courbe de ce cône est définie par les deux équations

$$f(x, y, z) \equiv z(x^2 + y^2) - mx(z^2 - a^2) = 0, \qquad \lambda f_z - f_x = \lambda(x^2 + y^2 - 2mxz) + 2ma^2x = 0.$$

De la seconde nous tirons $x^2 + y^2 = 2mx\left(z - \dfrac{a^2}{\lambda}\right)$, et nous remplaçons dans la première $x^2 + y^2$ par cette valeur ; nous obtenons le système équivalent

$$x^2 + y^2 - 2mx\left(z - \frac{a^2}{\lambda}\right) = 0, \qquad mx\left(z^2 + a^2 - \frac{2a^2z}{\lambda}\right) = 0.$$

Nous avons d'abord $x = 0$, $y = 0$, équations qui représentent Oz ; puis l'équation

$$z^2 + a^2 - \frac{2a^2z}{\lambda} = 0,$$

qui représente deux plans parallèles au plan des xy, et qui coupent la surface (S_1) suivant deux cercles (C), soient (C′) et (C″).

Le cône circonscrit à (S_1) qui a pour sommet le point L se compose donc de deux cônes du second degré, ayant pour bases les cercles (C′) et (C″). Pour $\lambda = a$, ces deux cônes sont confondus suivant le cône des tangentes au point double O_1.

Ces résultats pouvaient se prévoir. Nous avons vu en effet que les tangentes aux hyperboles (H) aux points où elles sont coupées par un cercle (C) de cote z vont rencontrer Oz en un point fixe P de cote $\dfrac{2a^2z}{z^2 + a^2}$. Donc le cône circonscrit de sommet P doit comprendre le cône de sommet P qui a pour base le cercle (C). De plus, étant donnée la cote λ du point P, il y aura deux cercles (C) correspondants dont les cotes sont définies par l'équation $\lambda = \dfrac{2a^2z}{z^2 + a^2}$.

Considérons maintenant une direction (D) du plan des xy :

$$\text{(D)} \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0, \qquad z = 0,$$

et cherchons la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèle.

Cette courbe est définie par les deux équations

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - mxz^2 - a^2) = 0,$$

$$\frac{f'_x}{\cos\varphi} - \frac{f'_y}{\sin\varphi} = \frac{2xz - mz^2 - a^2}{\cos\varphi} - \frac{2zy}{\sin\varphi} = 0.$$

En éliminant $z^2 - a^2$ entre ces deux équations, nous obtenons d'abord $z = 0$, qui est une solution inacceptable, puis

$$(y^2 - x^2)\sin\varphi - 2xy\cos\varphi = 0,$$

équation qui représente deux plans passant par Oz, et qui coupent la surface (S_1) suivant deux hyperboles (H), soient (H′) et (H″).

Le cylindre circonscrit à (S_1) parallèlement à (D) se compose donc de deux cylindres du deuxième degré ayant pour bases (H′) et (H″).

Ce résultat est une conséquence de ce qui précède. Les angles θ que font avec Ox les traces sur le plan xOy des plans de ces hyperboles sont définis par l'équation $\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg}\varphi$.

G. LACH, à Douai, et A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Bonne solution par M. Paul Rémondin, 154e régiment d'infanterie, à Lérouville (Meuse).

2044. — *Un point matériel* M, *de masse égale à un gramme, est attiré par un point fixe* O *avec une force mesurée en unités* C. G. S. *par* $\frac{1}{r^2}$, r *désignant la distance* OM. *(Force inverse du cube de la distance.)*

1° *Discuter la forme de la trajectoire* T *du point* M *d'après la position et la vitesse de ce point en un instant particulier* t_0, *et caractériser sur cette courbe les deux arcs correspondant respectivement aux instants postérieurs et aux instants antérieurs à* t_0.

2° *Calculer les coordonnées de* M *en fonction du temps. Indiquer les circonstances essentielles du mouvement.*

3° *La valeur arithmétique de la vitesse à l'instant* t_0 *étant donnée et supposée égale à* v_0, *déterminer le domaine où doit se trouver* M *à ce même instant pour que* M *décrive une spirale, quelle que soit la direction initiale du mouvement.* M *n'appartenant pas à ce domaine à l'instant* t_0, *dans quel angle doit être dirigée la vitesse* v_0 *pour que l'arc suivi par* M *appartienne à une spirale ?*

4° *Déterminer, quand elles existent, les asymptotes de* T. *Pour une des branches* τ *de* T *et son asymptote* A, *calculer l'aire comprise entre* τ, A *et deux rayons vecteurs issus de* O.

5° *Etant donnés deux points* M_0 *et* M, *déterminer les valeurs de* v_0 *telles que le mobile partant de* M_0 *avec une vitesse initiale égale à* v_0 *et perpendiculaire au rayon vecteur* OM_0 *passe en* M *dans le cours ultérieur de son mouvement.*

La formule bien connue de Binet, $F = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$,

nous donne ici $$-\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right] = -\frac{1}{r}.$$

C désignant la constante des aires. Nous en déduisons

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{C^2}\right] = 0.$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants, dont l'intégrale générale prend différentes formes suivant la valeur de $1 - \frac{1}{C^2}$.

Si $C^2 > 1$, nous pouvons poser $1 - \frac{1}{C^2} = k^2$, l'intégrale générale est

(I) $$\frac{1}{r} = A\cos k\theta + B\sin k\theta.$$

Si $C^2 < 1$, nous posérons $1 - \frac{1}{C^2} = -k^2$, et nous aurons

(II) $$\frac{1}{r} = A\,\mathrm{ch}\,k\theta + B\,\mathrm{sh}\,k\theta.$$

Enfin si $C^2 = 1$, $\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$ étant nul, $\frac{1}{r}$ est une fonction linéaire de θ, et nous avons

(III) $$\frac{1}{r} = A + B\theta.$$

Déterminons maintenant A et B en fonction des données initiales.

Soient M_0 la position du mobile à l'instant t_0, posons $OM_0 = r_0$, et soit v_0 la vitesse initiale ; nous prendrons pour axe polaire la droite OM_0, pour sens positif d'orientation du plan le sens de la vitesse initiale, et nous désignerons par α l'angle de la vitesse initiale avec le rayon vecteur initial.

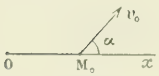


Fig. 1

Dans ces conditions, on a

$$C = r_0 v_0 \sin\alpha, \qquad \frac{r_0}{r'_0} = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

r'_0 étant la dérivée de r par rapport à θ pour $\theta = 0$.

Revenons aux formules (I), (II), (III) et écrivons que pour $\theta = 0$ on a $r = r_0$, et $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r_0}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; nous obtenons sans difficulté les équations suivantes :

(I) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[\cos k\theta - \frac{1}{k\,\mathrm{tg}\,\alpha}\sin k\theta\right].$$

(II) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[\mathrm{ch}\,k\theta - \frac{1}{k\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,\mathrm{sh}\,k\theta\right].$$

(III) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[1 - \frac{\theta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right].$$

1, 2 et 4. Nous discuterons successivement ces trois équations

Premier Cas. $C^2 > 1$. — La trajectoire est donnée par l'équation (I), où nous pouvons toujours supposer $k > 0$.

Déterminons un angle φ par la relation $\mathrm{tg}\,k\varphi = -\frac{1}{k\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, en supposant $-\frac{\pi}{2} < k\varphi < +\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2k} < \varphi < +\frac{\pi}{2k}$.

L'équation devient

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos k(\theta - \varphi)}{r_0 \cos k\varphi},$$

et en prenant pour axe polaire la demi-droite Ox' qui fait avec Ox l'angle φ,

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos k\theta}{r_0 \cos k\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{r_0 \cos k\varphi}{\cos k\theta};$$

$\cos k\varphi$ est positif, puisque $k\varphi$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Le nouvel angle polaire du point M_0 est $-\varphi$; comme il est compris entre $-\frac{\pi}{2k}$ et $+\frac{\pi}{2k}$, valeurs consécutives qui rendent r infini, la trajectoire ne peut se composer que de l'arc qui correspond aux valeurs de θ comprises entre $-\frac{\pi}{2k}$ et $+\frac{\pi}{2k}$.

C'est dans cet intervalle que nous ferons varier θ. En changeant θ en $-\theta$, r ne change pas, donc la trajectoire est symétrique par rapport à Ox'; il suffit de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2k}$, et de prendre le symétrique de la branche obtenue par rapport à Ox'.

Quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2k}$, r croît de $r_0 \cos k\varphi$ à $+\infty$; nous obtenons la branche de courbe BCDL (*fig.* 2) qui peut tourner un certain nombre de fois autour de l'origine suivant la valeur de $\frac{\pi}{2k}$.

Déterminons l'asymptote correspondante à la branche infinie DL.

Nous avons
$$\left(\frac{1}{r}\right)' = -\frac{k \sin k\theta}{r_0 \cos k\varphi},$$

et pour $\theta = \frac{\pi}{2k}$, la limite du second membre est $-\frac{k}{r_0 \cos k\varphi}$.

Par suite, l'inverse de cette limite, ou $-\frac{r_0 \cos k\varphi}{k}$ est l'abscisse $\overline{OH}$ de l'asymptote A sur l'axe Ox_1 qui fait l'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k}$ avec Ox'. De plus, comme la quantité $\frac{1}{r}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$ est toujours positive, la courbe tourne sa concavité vers le pôle, et cela détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Calculons maintenant l'aire $P_1P_2Q_1Q_2$ comprise entre la courbe, l'asymptote et les rayons vecteurs correspondant aux valeurs θ_1 et θ_2 de l'angle polaire. Nous avons

$$\text{aire } OP_1P_2 = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{r_0^2 \cos^2 k\varphi}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^2 k\theta} = \frac{r_0^2 \cos^2 k\varphi\,(\operatorname{tg} k\theta_2 - \operatorname{tg} k\theta_1)}{2k},$$

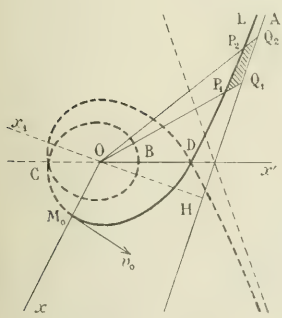


Fig. 2.

et
$$\text{aire } OQ_1Q_2 = \frac{1}{2}\, OQ_1 . OQ_2 \sin(\theta_2 - \theta_1).$$

Or l'équation de l'asymptote est

$$r \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2k}\right) = -\frac{r_0 \cos k\varphi}{k};$$

on a donc

$$OQ_1 = \frac{r_0 \cos k\varphi}{k \sin\left(\frac{\pi}{2k} - \theta_1\right)}, \qquad OQ_2 = \frac{r_0 \cos k\varphi}{k \sin\left(\frac{\pi}{2k} - \theta_2\right)},$$

et
$$\text{aire } OQ_1Q_2 = \frac{r_0^2 \cos^2 k\varphi \sin(\theta_2 - \theta_1)}{2k^2 \sin\left(\frac{\pi}{2k} - \theta_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2k} - \theta_2\right)}.$$

Il n'y a plus qu'à prendre la différence aire OQ_1Q_2 — aire OP_1P_2 pour obtenir l'aire demandée.

Passons à l'étude du mouvement du point sur sa trajectoire. Nous remarquons d'abord que, la vitesse aréolaire étant constante, le point se déplace toujours dans le même sens, c'est-à-dire dans le sens de la vitesse initiale v_0, ou dans le sens positif d'orientation du plan. L'arc correspondant aux instants postérieurs à t_0 est relatif aux valeurs de θ comprises entre $-\varphi$ et $+\frac{\pi}{2k}$. Nous avons tracé cet arc en trait plein sur la figure 2. L'arc correspondant aux instants antérieurs à t_0 est relatif aux valeurs de θ comprises entre $-\frac{\pi}{2k}$ et $-\varphi$; cet arc est tracé en pointillé.

Pour étudier le mouvement, nous utilisons la relation des aires $\frac{r^2 d\theta}{dt} = C$, qui devient ici

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{C\cos^2 k\theta}{r_0^2 \cos^2 k\varphi},$$

ou

$$dt = \frac{r_0^2 \cos^2 k\varphi}{C} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 k\theta}.$$

En intégrant, nous avons

$$t - \lambda = \frac{r_0^2 \cos^2 k\varphi}{Ck} \operatorname{tg} k\theta;$$

déterminons la constante λ en écrivant que pour $t = t_0$ on a $\theta = -\varphi$; nous obtenons en définitive

$$\operatorname{tg} k\theta = \frac{Ck(t - t_0)}{r_0^2 \cos^2 k\varphi} - \operatorname{tg} k\varphi.$$

Cette égalité détermine les coordonnées polaires du point M en fonction du temps; et l'on en déduit que lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$, θ croît de $-\frac{\pi}{2k}$ à $+\frac{\pi}{2k}$.

De plus, le théorème de la force vive nous donne

$$\frac{d(v^2)}{2} = -\frac{dr}{r^3}, \qquad \text{ou} \qquad v^2 = \frac{1}{r^2} + h, \qquad \left(h = v_0^2 - \frac{1}{r_0^2}\right).$$

Nous voyons ainsi que la grandeur de la vitesse varie en sens contraire de celle du rayon vecteur et quand celle-ci augmente indéfiniment, $|v|$ a pour limite $\sqrt{h}$.

Deuxième Cas. $C^2 < 1$. — La trajectoire a pour équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(\operatorname{ch} k\theta - \frac{1}{k \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{sh} k\theta\right).$$

Supposons d'abord $\left|\frac{1}{k \operatorname{tg} \alpha}\right| < 1$; nous pouvons trouver un nombre φ tel que l'on ait $\frac{1}{k \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{th} k\varphi$. L'équation (II) devient alors

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{ch} k(\theta - \varphi)}{r_0 \operatorname{ch} k\varphi},$$

et, en prenant comme nouvel axe polaire la demi-droite Ox' qui fait avec Ox l'angle φ, nous obtenons l'équation plus simple

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{ch} k\theta}{r_0 \operatorname{ch} k\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{r_0 \operatorname{ch} k\varphi}{\operatorname{ch} k\theta}.$$

La trajectoire est symétrique par rapport à Ox; quand θ croît de 0 à $+\infty$, r décroît de $r_0 \operatorname{ch} k\varphi$ à 0. Nous obtenons ainsi une spirale (*fig.* 3) qui admet l'origine comme point asymptote.

Nous avons distingué comme dans la figure 2 les arcs qui correspondent aux valeurs postérieures et antérieures à t_0.

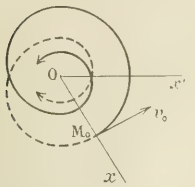


Fig. 3.

On obtient, comme plus haut,

$$\operatorname{th} k\theta = \frac{Ck(t-t_0)}{r_0^2 \operatorname{ch}^2 k\varphi} - \operatorname{th} k\varphi.$$

Quand θ croît de $-\infty$ à $+\infty$, t croît de la valeur

$$t_1 = t_0 + \frac{r_0^2 \operatorname{ch}^2 k\varphi}{Ck}(-1 + \operatorname{th} k\varphi) \quad \text{à la valeur} \quad t_2 = t_0 + \frac{r_0^2 \operatorname{ch}^2 k\varphi}{Ck}(1 + \operatorname{th} k\varphi).$$

On ne peut donc étudier le mouvement qu'entre ces deux instants.

D'ailleurs la relation $v^2 = \frac{1}{r^2} + h$ nous montre que v^2 varie en sens contraire de r^2, et quand r tend vers zéro, v augmente indéfiniment. Donc, lorsque t tend vers t_2, le point se précipite sur l'origine avec une vitesse infiniment grande : nous ne pouvons plus continuer l'étude du mouvement.

Supposons maintenant que l'on ait $\left|\frac{1}{k \operatorname{tg} \alpha}\right| > 1$; nous poserons cette fois $-k \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{th} k\varphi$,

et nous aurons
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \frac{\operatorname{sh} k(\theta + \varphi)}{\operatorname{sh} k\varphi},$$

et, en prenant comme nouvel axe polaire la demi-droite Ox' qui fait avec Ox l'angle $-\varphi$, nous obtenons

$$\frac{1}{r} = \frac{\operatorname{sh} k\theta}{r_0 \operatorname{sh} k\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{r_0 \operatorname{sh} k\varphi}{\operatorname{sh} k\theta};$$

le nouvel angle polaire du point M_0 est φ.

Nous nous bornerons au cas où φ est positif.

Si l'on change θ en $-\theta$, r se change en $-r$; donc, la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy', perpendiculaire à Ox'. Il suffit de donner à θ des valeurs positives. Quand θ croît de 0 à $+\infty$, r décroît de $+\infty$ à 0. Nous obtenons d'abord une branche infinie de courbe dont la direction asymptotique est Ox', puis cette courbe tourne indéfiniment autour de l'origine, qui est point asymptote (*fig.* 4).

Il n'est pas nécessaire de construire la portion symétrique par rapport à Oy, car nous allons voir que cette portion ne fait pas partie de la trajectoire.

La branche M_0L admet une asymptote A parallèle à Ox', qui rencontre Oy' au point H défini par

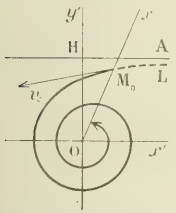


Fig. 4.

$\overline{OH} = \frac{r_0 \operatorname{sh} k\varphi}{k}$; la courbe tourne sa concavité vers le pôle, elle est donc au-dessous de son asymptote.

On calculera sans difficulté l'aire comprise entre la courbe, l'asymptote et deux rayons vecteurs.

Pour étudier le mouvement du point, nous écrivons

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{C \operatorname{sh}^2 k\theta}{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\theta}{\operatorname{sh}^2 k\theta} = \frac{C\,dt}{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi}.$$

Nous en tirons
$$-\frac{1}{k \operatorname{th} k\theta} = \frac{C(t+\lambda)}{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi},$$

ou, en écrivant que pour $t = t_0$ on a $\theta = \varphi$,

$$-\frac{1}{\operatorname{th} k\theta} = \frac{C(t-t_0)}{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi} - \frac{1}{\operatorname{th} k\varphi}, \qquad \text{ou encore} \qquad t - t_0 = \frac{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi}{Ck}\left(\frac{1}{\operatorname{th} k\varphi} - \frac{1}{\operatorname{th} k\theta}\right).$$

Si nous posons

$$t_1 = t_0 + \frac{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi}{Ck}\left(\frac{1}{\operatorname{th} k\varphi} + 1\right), \qquad t_2 = t_0 + \frac{r_0^2 \operatorname{sh}^2 k\varphi}{Ck}\left(\frac{1}{\operatorname{th} k\varphi} - 1\right),$$

on peut écrire les variations suivantes de t quand θ croît de $-\infty$ à $+\infty$:

θ	$-\infty$		0		φ		$+\infty$
t	t_1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	t_0	↗	t_2

On voit donc que lorsque t croît de $-\infty$ à t_2, le point M décrit l'arc de courbe représenté sur la figure 4, et quand t tend vers t_2, le point se précipite sur l'origine avec une vitesse infinie.

Troisième Cas. $C^2 = 1$. — L'équation de la trajectoire est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Posons $-\operatorname{tg}\alpha = \varphi$, et prenons comme axe polaire la demi-droite Ox' qui fait avec Ox l'angle $-\varphi$: l'équation devient

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_0\varphi}, \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{r_0\varphi}{\theta}.$$

Elle représente une spirale hyperbolique symétrique par rapport à Oy', dont la forme est analogue à celle de la courbe précédente (*fig.* 4), en supposant $\varphi > 0$.

L'asymptote A est définie par $\overline{OH} = r_0\varphi$, et la loi du mouvement est donnée par l'équation

$$-\frac{1}{\theta} = \frac{C(t - t_0)}{r_0^2\varphi^2} - \frac{1}{\varphi}.$$

3. Il résulte de cette discussion que pour que le point M décrive une spirale, il faut que C^2 soit inférieur ou égal à 1, ou $r_0 v_0 \sin\alpha \leqslant 1$.

Cette inégalité aura lieu quel que soit α si $r_0 v_0 \leqslant 1$, ou si $r_0 \leqslant \frac{1}{v_0}$. Ceci exprime que le point M_0 doit être à l'intérieur du cercle (γ) qui a pour centre le point O et pour rayon $\frac{1}{v_0}$, ou sur la circonférence de ce cercle. Tel est le domaine demandé.

Fig. 5.

Si le point M_0 n'est pas dans ce domaine, on a $r_0 v_0 > 1$, et de l'inégalité $r_0 v_0 \sin\alpha \leqslant 1$ on déduit $\sin\alpha \leqslant \frac{1}{r_0 v_0}$.

Soit β l'angle aigu qui a pour sinus $\frac{1}{r_0 v_0}$; l'inégalité $\sin\alpha \leqslant \sin\beta$ nous donne $\alpha \leqslant \beta$, ou $\alpha \geqslant \pi - \beta$. La vitesse initiale devra être située dans l'angle couvert de hachures (*fig.* 5) ou sur les côtés de cet angle.

5. Lorsque la vitesse initiale $M_0 v_0$ est perpendiculaire au rayon vecteur initial OM_0, on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $C = r_0 v_0$, et les équations des trajectoires sont

(I) $\qquad r_0 v_0 > 1 \qquad \frac{1}{r} = \frac{\cos k\theta}{r_0}$,

(II) $\qquad r_0 v_0 < 1 \qquad \frac{1}{r} = \frac{\operatorname{ch} k\theta}{r_0}$,

(III) $\qquad r_0 v_0 = 1 \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}$.

Dans la première, θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2k}$ et, dans la seconde, de 0 à $+\infty$.

Soient r_1, θ_1 les coordonnées polaires du point M.

Si $r_1 = r_0$, le mobile ne peut atteindre le point M qu'en suivant le cercle (III), et cela ne peut arriver que si $v_0 = \frac{1}{r_0}$.

Si $r_1 > r_0$, le mobile doit suivre la trajectoire I, et l'on doit avoir $\cos k\theta_1 = \frac{r_0}{r_1}$.

Soit ω l'angle aigu qui a pour cosinus $\frac{r_0}{r_1}$. Nous avons $k\theta_1 = \omega$, ou $k = \frac{\omega}{\theta_1}$. Mais $k^2 = 1 - \frac{1}{C^2} = 1 - \frac{1}{r_0^2 v_0^2}$; nous en tirons

$$1 - \frac{1}{r_0^2 v_0^2} = \frac{\omega^2}{\theta_1^2}, \qquad \text{d'où} \qquad v_0^2 = \frac{\theta_1^2}{r_0^2(\theta_1^2 - \omega^2)}.$$

Cette valeur n'est acceptable que si $\theta_1 > \omega$, ou $\cos\theta_1 < \cos\omega$, $\cos\theta_1 < \frac{r_0}{r_1}$, $r_0 > r_1 \cos\theta_1$. Ceci exprime que la projection N du point M sur Ox est située entre O et M_0.

Enfin, si $r_1 < r_0$, le mobile doit suivre la trajectoire (II), et l'on doit avoir $\operatorname{ch} k\theta_1 = \frac{r_0}{r_1}$. Soit ω le nombre positif dont le cosinus hyperbolique est égal à $\frac{r_0}{r_1}$. Nous avons $k\theta_1 = \omega$, $k = \frac{\omega}{\theta_1}$. Mais ici $k^2 = \frac{1}{C^2} - 1$; donc

$$\frac{1}{r_0^2 v_0^2} - 1 = \frac{\omega^2}{\theta_1^2}, \qquad \text{d'où} \qquad v_0^2 = \frac{\theta_1^2}{r_0^2(\theta_1^2 + \omega^2)},$$

valeur toujours acceptable.

Auguste FORISSIER, école des Anglais, à Lyon.

Physique.

2045. — *Une bouteille de verre est munie d'un système de fermeture qui permet de la fermer hermétiquement et d'isoler à l'intérieur un volume exactement défini. Toutefois la dilatation de l'enveloppe (coefficient de dilatation cubique* $k = 0{,}000025$) *peut faire varier légèrement le volume ainsi emprisonné. On emporte cette bouteille au sommet du mont Blanc. Là, on la remplit d'air sec à la pression atmosphérique et à la température ambiante* ($t_1 = -7^\circ{,}0$) *et on la ferme. Soit* m *la masse de l'air sec contenu dans la bouteille,* V_1 *son volume actuel.*

La bouteille fermée est emportée dans un laboratoire, à Paris, où on fait les opérations suivantes :

A. *On mesure avec un baromètre normal la pression atmosphérique et on fait la correction de température. Soit* $H = 764{,}9$ *millimètres cette pression corrigée qui est ainsi évaluée en millimètres de mercure à 0 degré.*

B. *On place sur un des plateaux d'une balance une tare de* 2000 *grammes à laquelle on ne touchera pas par la suite, sur l'autre plateau la bouteille et une masse* $P_1 = 1684{,}9$ *grammes nécessaire pour établir l'équilibre.*

C. *On plonge alors le col de la bouteille dans un large cristallisoir renfermant de l'eau distillée. Cette eau est à la température ambiante* $t_2 = +17^\circ{,}2$. *Sa densité est* $d = 0{,}999$. *On ouvre la bouteille ; au bout d'un certain temps, pendant lequel l'air qui y est contenu prend la température de l'eau et se sature de vapeur, le niveau de l'eau à l'intérieur se fixe à une hauteur* $h = 81{,}5$ *millimètres au-dessus du niveau extérieur. On ferme alors la bouteille, on s'assure que le niveau de l'eau à l'intérieur n'a pas changé ; l'air humide contenu dans la bouteille a ainsi gardé le même volume* v. *La bouteille essuyée extérieurement avec soin est placée sur le même plateau de la balance. Il faut maintenant, pour rétablir l'équilibre, placer à côté d'elle une masse* $P_2 = 1326{,}4$ *grammes.*

D. *Enfin on remplit, complètement cette fois, la bouteille d'eau à la même température empruntée au cristallisoir, et on la pèse encore comme précédemment. Il faut cette fois, pour l'équilibre, une masse* $P_3 = 704{,}4$ *grammes.*

Pendant ces diverses opérations, ni la température ambiante, ni la pression atmosphérique n'ont varié de quantités appréciables.

On demande :

1° *De calculer le volume v occupé par l'air dans la bouteille au moment où on l'a fermée dans l'expérience* C, *et le volume intérieur* V_2 *de la bouteille à ce moment ;*

2° *D'évaluer avec la même unité que* H, *c'est-à-dire en millimètres de mercure du baromètre du laboratoire, supposé à* 0 *degré, la pression atmosphérique x qui existait au sommet du mont Blanc au moment où la bouteille y avait été fermée ;*

3° *Quelle serait la marche à suivre si l'on voulait, connaissant cette valeur de x, calculer la quantité de chaleur qui était nécessaire ce jour-là, au sommet du mont Blanc, pour porter* 1 *kilogramme d'eau à sa température d'ébullition et pour le transformer en outre complètement en vapeur ;*

4° *Si on avait consulté au sommet du mont Blanc un baromètre à mercure normal, à l'instant où on a fermé la bouteille, et qu'on ait ramené le résultat à ce qu'il aurait été à* 0 *degré, aurait-on trouvé exactement la valeur de x calculée précédemment? Ne peut-on pas prévoir théoriquement une différence systématique dont on peut estimer l'ordre de grandeur?*

Montrer que la mesure, faite avec un manomètre à liquide, de la pression d'un gaz, ou de la tension maxima d'une vapeur, ou encore d'une tension de dissociation, permettrait, si elle était faite avec une précision suffisante, de comparer les valeurs de l'accélération de la pesanteur aux différents points du globe. Indiquer brièvement les avantages et les inconvénients de cette méthode, comparée à celle habituellement employée.

Données numériques :

Tension maxima de la vapeur d'eau à 17° : $f = 14{,}4$ *millimètres de mercure (Regnault).*

Densité du mercure à 0° : $D = 13{,}60$.

Altitude du mont Blanc : 4810 *mètres. — Altitude du laboratoire de Paris :* 60 *mètres.*

Latitude du mont Blanc : 46°. — *Latitude de Paris :* 49°.

Valeur de g pour un point au niveau de la mer et de latitude L : $g = 980{,}61(1 - 0{,}00255 \cos 2L)$.

1° $P_2 - P_3$ représente la différence des masses de v centimètres cubes d'eau et de v centimètres cubes d'air humide.

Pour exprimer la masse spécifique de cet air humide, désignons par a le nombre 0,001293 qui représente la masse spécifique de l'air sec dans les conditions normales, c'est-à-dire à 0° et sous la pression normale p_0, par α le coefficient de dilatation de l'air et par g_2 l'accélération de la pesanteur à Paris.

La pression de l'air humide est $HDg_2 - hdg_2$ et l'on sait que, pour tenir compte de la présence de la vapeur d'eau, dont la densité est $\frac{5}{8}$, on peut supposer l'air sec en diminuant sa pression de $\frac{3}{8} fDg_2$.

D'autre part, les poids placés sur le plateau de la balance doivent être corrigés de la poussée de l'air, ce qui se fait en les multipliant par un facteur $1 - \sigma$ dépendant de la matière dont ils sont construits. On aura donc

$$v\left(d - a\,\frac{(HD - hd - \frac{3}{8} fD)g_2}{p_0}\,\frac{1}{1 + \alpha t}\right) = (P_2 - P_3)(1 - \sigma).$$

La pression normale p_0 est égale à $760Dg_0$, g_0 désignant la gravité normale 980,61. Pour avoir la gravité en un point d'altitude z, on sait qu'il faut multiplier la gravité au niveau de la mer par le facteur $1 - \frac{3}{4}\frac{z}{R}$, R désignant le rayon terrestre qui est d'environ 6 370 000 mètres ; à Paris, la correction sera d'environ $\frac{1}{100000}$ et, en tenant compte de la latitude, qui donne lieu à une correction

beaucoup plus importante, on trouve

$$\frac{g_2}{g_0} = 1{,}000345.$$

Le coefficient de dilatation de l'air, α, est égal à $\frac{1}{273}$. A l'aide de ces deux nombres et des données numériques, on peut calculer d'abord le second terme de la parenthèse, c'est-à-dire la masse spécifique a' de l'air humide, et l'on trouve

$$a' = 0{,}001206.$$

Enfin le calcul de v donne

$$v = 623{,}4(1 - \sigma) \text{ centimètres cubes.}$$

On ne donne pas σ, mais si l'on suppose les poids en laiton, on s'assure facilement que la correction est d'environ une unité du dernier ordre, donc

$$v = 623{,}3.$$

Pour calculer V_2, remarquons que $P_1 - P_2$, augmentation de poids de la bouteille quand on y a fait entrer l'eau, représente la masse d'un volume $V_2 - 623{,}3$ d'eau, plus la masse d'un volume 623,3 de vapeur saturante. Cette dernière masse pourrait être calculée, mais elle est bien inférieure à 1 décigramme et on peut la négliger. Ecrivons donc simplement

$$(V_2 - 623{,}3) \times 0{,}999 = P_1 - P_2(1 - \sigma),$$

ce qui donne

$$V_2 = 982{,}1 \text{ centimètres cubes.}$$

En tenant compte de la différence des températures et du coefficient de dilatation de la bouteille, on déduit facilement de V_2 le volume V_1 qu'elle avait au sommet du mont Blanc et l'on trouve

$$V_1 = 981{,}5.$$

2. Pour calculer x, appliquons la loi de Mariotte à la masse d'air sec enfermée dans la bouteille et dont nous connaissons maintenant les températures successives t_1 et t_2, les volumes successifs V_1 et v et la pression finale qui, évaluée en millimètres de mercure du laboratoire, est égale à

$$H - \frac{d}{D}h - f = 764{,}9 - 6{,}0 - 14{,}4 = 744{,}5.$$

On aura donc

$$\frac{V_1 x}{1 + \alpha t_1} = \frac{v \times 744{,}5}{1 + \alpha t_2}.$$

d'où, en introduisant les valeurs numériques,

$$x = 433^{mm}{,}4.$$

3. La chaleur nécessaire pour porter un kilogramme d'eau de 0 degré à sa température d'ébullition et le vaporiser à cette température est donnée par la formule de Regnault

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305t.$$

La température t d'ébullition se déduit de la pression mesurée par la hauteur x et se trouve indiquée par les tables des tensions maxima de la vapeur d'eau. C'est ainsi qu'à la pression de 433^{mm} correspond une température de 85° et, par suite, une quantité de chaleur de 632,4 calories. Mais il faut y ajouter la chaleur nécessaire pour porter un kilogramme de glace de $-7°$ à 0° $(7 \times 0{,}474 = 3{,}3)$ et la chaleur de fusion de la glace (79,2), ce qui fera en tout

714,9 calories.

4. Si on avait consulté le baromètre au sommet du mont Blanc, on aurait trouvé une hauteur H_1 qu'on peut relier à la hauteur x en exprimant qu'elles correspondent à la même pression, ce qui donne, en appelant g_1 la gravité au sommet du mont Blanc,

$$H_1 g_1 = xg_0.$$

ou, en fonction des altitudes et des latitudes,

$$H_1\left(1-\frac{3}{4}\frac{z_1}{R}\right)(1-0{,}00255\cos 2L_1)=x\left(1-\frac{3}{4}\frac{z_2}{R}\right)(1-0{,}00255\cos 2L_2)$$

ce qui se réduit sensiblement à

$$H_1=x\left\{1+\frac{3}{4}\frac{z_1-z_2}{R}+0{,}00255(\cos 2L_1-\cos 2L_2\right\}.$$

Le calcul donne $H_1=x(1+0{,}0012)$.

La différence relative est donc d'environ un millième.

D'une manière générale, si l'on mesure, avec un manomètre à liquide, une pression quelconque, que cette pression soit représentée par une hauteur H_1 en un point où la gravité est g_1 et que cette même pression ait été mesurée par une hauteur H_2 en un point de gravité g_2, on aura

$$H_1g_1=H_2g_2,$$

d'où l'on déduira le rapport des deux gravités. Tel est, par exemple, le principe de la mesure de g par le point d'ébullition de l'eau : ce point d'ébullition permet de connaître la pression telle qu'elle est fournie par les tables des tensions de vapeur, c'est-à-dire la hauteur H_2 d'une colonne de mercure qui lui fait équilibre en un lieu de gravité g_2 connue, Paris par exemple. On note d'autre part la hauteur H_1 indiquée par un baromètre au lieu de l'observation et on peut résoudre l'équation ci-dessus.

Cette méthode exige un matériel beaucoup moins coûteux que la méthode du pendule ; la durée de l'expérience est beaucoup plus courte ; elle peut être faite enfin sur un bateau ce qui est à considérer si l'on songe que les eaux recouvrent les trois quarts du globe. Elle n'est malheureusement pas susceptible, du moins dans les conditions actuelles, de la même précision.

Groupe II.

Physique.

2046. — 1° *Quel est le diamètre de l'image réelle du Soleil donnée par une lentille convergente de 50 centimètres de distance focale et dont l'axe optique est dirigé vers le centre du Soleil? Le Soleil est vu de la Terre sous le même angle qu'un disque de 1 centimètre de diamètre placé normalement à la ligne de visée à 108 centimètres de l'œil.*

2° *Soit k le rapport entre les dimensions linéaires de l'image réelle d'un objet, donnée par une lentille convergente, et celle de l'objet. L'objet est plan et son plan est normal à l'axe optique, la lentille a une distance focale f. Quelle est la distance D, comptée sur l'axe, entre l'objet et son image? Discuter l'expression trouvée en prenant comme variable le rapport k.*

3° *Un objet lumineux a la forme d'un disque circulaire plan placé verticalement ; on ne peut déplacer cet objet. A une distance $D=250$ centimètres se trouve un mur parallèle au plan de l'objet et sur lequel est fixé un grand écran blanc. Quelle lentille convergente faudrait-il avoir pour qu'on puisse former sur cet écran une image dont les dimensions soient deux fois plus grandes que celles de l'objet?*

4° *Si l'on ne dispose pas de la lentille nécessaire, mais d'une lentille ayant une distance focale plus grande, montrer qu'on peut encore avoir sur l'écran une image ayant les dimensions exigées, mais dont le centre ne sera plus sur la perpendiculaire à l'écran passant par le centre de l'objet, en faisant réfléchir les rayons successivement sur deux miroirs plans, parallèles, faisant tous deux un angle dièdre de 45 degrés avec le plan de l'écran et placés à une distance convenable.*

5° *Si enfin on ne possède que des lentilles dont la distance focale est trop courte pour obtenir directement sur l'écran l'image voulue, montrer qu'on peut encore arriver au résultat cherché en employant deux lentilles traversées successivement par les rayons lumineux et dont les axes optiques se confondent avec la perpendiculaire abaissée du centre de l'objet sur l'écran, pourvu que l'une de ces lentilles soit convergente et ait une distance focale exactement double de celle de l'autre.*

1. Le diamètre apparent du Soleil est, d'après les données, égal à $\frac{1}{108}$. Or l'image du Soleil se forme, dans la lentille, à 50 centimètres du centre optique ; elle a donc pour diamètre $\frac{50}{108} = \frac{1}{2,16}$ de centimètre.

2. Si on appelle q la distance d'un objet A au premier foyer d'une lentille, le rapport k entre les dimensions linéaires de l'image A′ et de l'objet est représenté par la formule connue

(1) $$k = -\frac{f}{q}.$$

Si q' désigne d'autre part la distance de l'image au second foyer, on voit aisément que la distance A′A peut être exprimée de la manière suivante :

(2) $$D = q + 2f - q'.$$

D'ailleurs q et q' sont liés par la formule de Newton

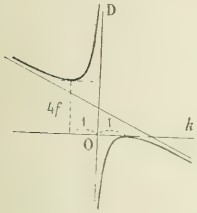
(3) $$qq' = f^2.$$

L'élimination de q et de q' entre ces trois équations donne

(4) $$D = f\left(2 - k - \frac{1}{k}\right).$$

Si l'on déplace l'objet depuis l'infini en avant de la lentille jusqu'à l'infini en arrière (objet virtuel), le rapport k et la distance D passent respectivement par les valeurs suivantes :

Valeurs de k	Valeurs de D
$-\varepsilon$	$+\infty$
-1	$+4f$ (minimum)
$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$
$+1$	0 (minimum absolu)
$+\varepsilon$	$-\infty$



Si l'on porte k et D en abscisse et en ordonnée, leurs variations corrélatives sont représentées par l'hyperbole ci-contre.

3. L'image d'un objet réel projetée sur un écran est renversée ; si elle est deux fois plus grande que l'objet, on a $k = -2$. Portons cette valeur dans la formule (4) et faisons $D = 250$. Il vient

$$f = \frac{500}{9} = 55,6 \text{ environ.}$$

4. Pour une valeur déterminée de k, -2 par exemple, D est proportionnel à f. Pour $f = 55,6$, $D = 250$; pour une valeur de f plus grande, D devra être plus grand. Or l'emploi de deux miroirs plans I et K, disposés comme l'indique la figure, a pour effet d'augmenter la distance AA′ de la longueur IK qui sépare les deux miroirs, sans rien changer à la convergence produite par la lentille, mais en déplaçant latéralement l'axe du faisceau lumineux. On pourra donc toujours réaliser en A′ une image ayant les dimensions voulues en s'arrangeant de façon que la distance AIKA′ satisfasse à la relation (4).

5. Si l'image est produite avec deux lentilles, le problème est plus compliqué. Désignons par l la distance de l'objet au premier foyer de la première lentille, par λ la distance de l'image au second foyer ; on a

(5) $$l\lambda = -f^2.$$

Désignons par ε la distance du second foyer de la première lentille au premier foyer de la seconde ;

la première distance conjuguée dans la seconde lentille sera $\lambda + \varepsilon$. L'image définitive doit être sur l'écran, donc à une distance du second foyer de la seconde lentille égale à $-(D - l - 2f - \varepsilon - 2f')$. On a donc

$$(6) \qquad (\lambda + \varepsilon)(D - l - 2f - \varepsilon - 2f') = f'^2.$$

Le grossissement total, produit des deux grossissements successifs $-\frac{f}{l}$ et $-\frac{f'}{\lambda + \varepsilon}$, donne enfin

$$(7) \qquad \frac{ff'}{l(\lambda + \varepsilon)} = -2.$$

Pour des valeurs déterminées de f et de f', ces trois équations déterminent ε, l et λ, et il ne semble pas, à priori, qu'il doive y avoir aucune relation nécessaire entre f et f'.

Eliminons λ et ε ; il vient

$$f\left[D - l - 2f - \frac{f(2f' - f)}{2l} - 2f'\right] + 2lf = 0$$

Introduisons, en posant $a = l + f$, la distance essentiellement positive de l'objet à la première lentille,

$$(8) \qquad f\left[D - a - f - \frac{f(2f - f')}{2a - f} - 2f'\right] + 2ia - f_1 f = 0.$$

L'image doit être réelle sur l'écran, ce qu'on peut exprimer en écrivant que la distance de la seconde lentille à l'écran est positive ; cela donne

$$D - a - f - \varepsilon - f > 0$$

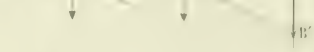
ou, en remplaçant D par sa valeur tirée de l'égalité (8),

$$f' - 2(a - f)\frac{f}{f} > 0.$$

Si	$f > 0$ et $f' > 0$,	on trouve	$2a > 3f$.
—	$f < 0$ — $f' < 0$,	—	$2a > 3f$.
—	$f > 0$ — $f' < 0$,		$2a > 3f$.
—	$f < 0$ — $f' > 0$,		$2a > 3f$.

Cette dernière condition est irréalisable, puisque a est positif ; donc f et f' ne peuvent être tous deux négatifs et l'une des lentilles, au moins, doit être convergente. C'est une des conditions indiquées par l'énoncé. Mais l'autre condition indiquée, à savoir que l'une des lentilles doive avoir une distance focale double de celle de l'autre, ne semble pas nécessaire. Par exemple, deux lentilles convergentes dont les distances focales sont respectivement $f = \frac{300}{12,1}$ et $f' = \frac{50}{3,2}$, valeurs dont le rapport est égal à $\frac{192}{121}$, satisfont à la question avec $l = \frac{1}{10}f$: la première, placée à $27^{cm},3$ environ de l'objet, donne une image grossie 10 fois à 50 centimètres en arrière de l'écran ; la seconde, placée à $12^{cm},5$ de l'écran, ramène l'image définitive sur l'écran en lui laissant seulement un grossissement égal à 2.

L'énoncé semble avoir en vue la solution particulière suivante. Plaçons la première lentille à une distance de l'objet AB égale à sa distance focale f, et une lentille de distance focale double à une distance de l'écran égale à $2f$. Quel que soit f, l'image A'B' sera sur l'écran et double de AB. Pour que les deux lentilles puissent trouver leur place entre l'objet et l'écran, il faut que l'on ait $3f < D$, donc $f < \frac{1}{3}D$ et $f > \frac{2}{3}D$. Or, par hypothèse, les lentilles dont on dispose ont une distance focale inférieure à $\frac{2}{9}D$; elles satisfont donc à la condition voulue.



Chimie.

2047. — *Analyse d'une dolomie (carbonate double de calcium et de magnésium).*

a) On attaque 0,469 *gramme de la matière à analyser par de l'acide chlorhydrique étendu. Il se dégage un gaz (b) dont on mesure le volume, et on obtient une dissolution. Celle-ci est rendue franchement ammoniacale, puis additionnée d'oxalate d'ammoniaque en excès. Il se forme un précipité que l'on sépare et une dissolution (c) que l'on met à part.*

Le précipité est redissous dans une petite quantité d'acide chlorhydrique. A la solution ainsi obtenue on ajoute de l'acide sulfurique étendu et l'on y verse peu à peu, en chauffant légèrement, une liqueur titrée de permanganate de potassium renfermant 15,8 *grammes de ce sel par litre.*

Il faut verser exactement 12^{cm^3} *de liqueur titrée pour obtenir une coloration persistante.*

On calculera la composition de la dolomie et l'on verra si cette composition ne peut pas être représentée par une formule relativement simple.

On ne se préoccupera pas de l'action possible de l'acide chlorhydrique sur le permanganate et l'on prendra : $O = 16$, $C = 12$, $Mg = 24,35$, $Mn = 54,1$, $K = 39,1$, $Ca = 40,1$.

b) Quel est approximativement le volume du gaz dégagé (b) à 0°, *sous la pression normale de* 760^{mm} *de mercure ?*

c) Dans la liqueur (c) on verse une quantité suffisante de sel ammoniac et un léger excès de phosphate de soude. Quel est le poids du précipité formé après que celui-ci aura été lavé, séché et calciné au rouge ? On prendra $P = 31,04$.

a) Représentons la composition de l'échantillon analysé par $xCO^3Ca + yCO^3Mg$. En remplaçant les poids moléculaires par leurs valeurs et comptant en millimolécules, on a d'abord

$$(1) \qquad 100,1x + 84,35y = 469.$$

L'acide chlorhydrique transforme les carbonates en chlorures et dégage $(x+y)CO^2$. En liqueur ammoniacale, l'oxalate d'ammoniaque précipite le calcium sous forme d'oxalate, xC^2O^4Ca. L'acide chlorhydrique, versé sur ce précipité, libère l'acide oxalique. Celui-ci réduit, à chaud, le permanganate acide conformément à l'équation

$$\frac{1}{5}x\,5C^2O^4H^2 + 2MnO^4K + 4SO^4H^2 = 10CO^2 + 2SO^4Mn + 2SO^4KH + 8H^2O)$$

et décolore, par conséquent, une quantité de permanganate représentée par $\frac{2}{5}x$ millimolécules.

Or le poids moléculaire du permanganate est 157,2 et la liqueur employée renferme sensiblement $\frac{1}{10}$ de molécule par litre, $\frac{1}{10}$ de millimolécule par centimètre cube. Les 12^{cm^3} employés représentent donc 1,2 millimolécule, donc

$$\frac{2}{5}x = 1,2, \qquad x = 3$$

Remplaçons x par cette valeur dans l'équation (1). On trouve exactement $y = 2$.

Donc la composition de la dolomie analysée peut être représentée par

$$3CO^3Ca + 2CO^3Mg.$$

b) Le gaz carbonique dégagé représente $x + y$ millimolécules, soit 5 millimolécules dont chacune a un volume de $22^{cm^3},4$. Le volume demandé est donc $5 \times 22,4 = 112$ centimètres cubes.

c) La liqueur (*c*) contient $yMgCl^2$ que le phosphate de soude et le sel ammoniac transforment en phosphate ammoniaco-magnésien, yPO^4AzH^4Mg. Celui-ci, calciné, se décompose en ammoniaque et pyrophosphate :

$$\frac{1}{2}y(2PO^4AzH^4Mg = P^2O^7Mg^2 + 2AzH^3 + H^2O).$$

Comme $y = 2$, il se produit juste une millimolécule de pyrophosphate, qui pèse 222,78 milligrammes.

Mathématiques.

2048. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 2y' + (1 - \alpha^2)y = e^x + \sin^2 x,$$

dans laquelle α désigne une constante réelle donnée. Discuter suivant les valeurs de α.

L'équation caractéristique de l'équation sans second membre est

$$r^2 - 2r + 1 - \alpha^2 = 0;$$

elle admet pour racines $1 - \alpha$ et $1 + \alpha$ et les deux fonctions $e^{(1-\alpha)x}$ et $e^{(1+\alpha)x}$ sont solutions de l'équation sans second membre. La solution générale de celle-ci est donc

$$C_1 e^{(1-\alpha)x} + C_2 e^{(1+\alpha)x}.$$

D'autre part, une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + (1 - \alpha^2)y = e^x$$

est λe^x, λ étant une constante. Nous trouvons ainsi $-\alpha^2\lambda = 1$, $\lambda = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Nous avons aussi $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, et il nous faut une solution particulière de chacune des équations

$$y'' - 2y' + (1 - \alpha^2)y = \frac{1}{2},$$

et

$$y'' - 2y' + (1 - \alpha^2)y = -\frac{\cos 2x}{2}.$$

La première admet pour solution

$$y = \frac{1}{2(1 - \alpha^2)},$$

et la seconde a une solution de la forme $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$, λ et μ étant deux constantes. Nous avons ainsi successivement

$$y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x,$$
$$y' = -2\lambda \sin 2x + 2\mu \cos 2x,$$
$$y'' = -4\lambda \cos 2x - 4\mu \sin 2x.$$

En portant dans l'équation et identifiant, nous avons deux équations linéaires en λ et μ :

$$-4\lambda - 4\mu + \lambda(1 - \alpha^2) = -\frac{1}{2},$$
$$-4\mu + 4\lambda + \mu(1 - \alpha^2) = 0,$$

ou

$$4\lambda - \mu(3 - \alpha^2) = 0,$$
$$\lambda(3 - \alpha^2) + 4\mu = \frac{1}{2};$$

nous tirons de là

$$\frac{\lambda}{3 - \alpha^2} = \frac{\mu}{4} = \frac{1}{2[16 + (3 - \alpha^2)^2]}.$$

La solution générale de l'équation complète, quand α est quelconque, est donc

$$y = C_1 e^{(1-\alpha)x} + C_2 e^{(1+\alpha)x} - \frac{e^x}{\alpha^2} + \frac{1}{2(1 - \alpha^2)} - \frac{(3 + \alpha^2)\cos 2x + 4 \sin 2x}{2[16 + (3 - \alpha^2)^2]}.$$

Elle met bien en évidence les valeurs réelles particulières de α, qui sont $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$. Rien ne distingue les deux dernières ; nous n'étudierons donc que $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

Pour $\alpha = 0$, l'équation sans second membre se réduit à

$$y'' - 2y' + y = 0\,;$$

elle a pour solution générale $\quad y = (Cx + C')e^x.$

L'équation $\quad y'' - 2y' + y = e^x$

a pour solution $y = ze^x$, z étant une fonction de x. Nous avons ainsi successivement

$$y = ze^x,$$
$$y' = (z + z')e^x,$$
$$y'' = (z + 2z' + z'')e^x,$$

et $\quad z''e^x = e^x, \qquad z'' = 1\,;$

une valeur particulière de z est donc $\frac{x^2}{2}$. Il n'y a plus qu'à faire $\alpha = 0$ dans ce qui suit, et on a

$$y = \left(Cx + C' + \frac{x^2}{2}\right)e^x + \frac{1}{2} + \frac{3\cos 2x + 4\sin 2x}{50}.$$

Pour $\alpha = 1$, l'équation sans second membre se réduit à

$$y'' - 2y' = 0\,;$$

elle admet pour solution générale $\quad y = Ce^{2x} + C',$

et l'équation particulière $\quad y'' - 2y' = \frac{1}{2}$

a la solution $\quad y' = -\frac{1}{4}, \qquad y = -\frac{x}{4}.$

Rien n'est changé au reste, et la solution générale est

$$y = Ce^{2x} + C' - e^x - \frac{x}{4} + \frac{\cos 2x + \sin 2x}{16}.$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; A. Courtois, à Sedan ; H. Frobert, à Paris ; M. Montjoie, à Brest ; Juglans ; N. Savary, 67e d'artillerie ; L. Naucelle, à La Châtre.

Assez bonnes solutions : MM. Roux, à Chalon-sur-Saône ; L. Gioan, à Grasse ; D. Bellocq, à Bordeaux ; R. Manen, à Albi ; J. Romaides, à Athènes.

2049. — *Une courbe plane* (C) *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy ; *la normale au point* M *à la courbe* (C) *rencontre* Ox *en* N *et la parallèle à* Oy *menée par* N *rencontre au point* T *la tangente en* M *à la courbe* (C).

1° *Déterminer la courbe* (C) *de manière que la longueur* NT *soit égale à une longueur donnée* $2a$.

2° *Soit* (C_0) *celle des courbes qui passe par* O ; *désignons par* O′ *celui des points de rencontre de cette courbe* (C_0) *avec* Ox *qui est le plus rapproché du point* O. *Démontrer que l'aire* S *comprise entre l'arc* OM *de la courbe* (C_0) *et les segments rectilignes* MN *et* NO *est proportionnelle à l'abscisse du pied* M *de la normale ; calculer l'aire* S_0 *comprise entre l'arc* OO′ *et la corde* OO′.

3° *Déterminer la position du point* M *de manière que*

$$S = \frac{1}{4} S_0,$$

et calculer ses coordonnées avec deux décimales exactes en supposant, pour ce calcul, $a = 1$.

1. En appelant y la fonction inconnue de x qui correspond à la courbe (C), l'équation de la tan-

gente au point $M(x,y)$ est $Y - y = y'(X - x)$, et celle de la normale,

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Le point N a donc pour coordonnées $X = x + yy'$, $Y = 0$, et l'y du point T est donné par $Y - y = yy'^2$.

Il faut donc écrire que $y + yy'^2$ est égal à $2a$, ce qui donne l'équation différentielle $y(1 + y'^2) = 2a$.

Prenons d'abord comme paramètre variable $y' = t$; nous aurons

$$y = \frac{2a}{1 + t^2};$$

puis

$$\frac{dy}{dx} = t, \qquad dx = \frac{dy}{t},$$

et x sera fourni par une intégration. Mais nous voyons maintenant qu'il est plus simple de choisir le paramètre θ, tel que $t = \operatorname{tg}\theta$, et alors $y = 2a\cos^2\theta$,

$$dx = -\frac{4a\cos\theta\sin\theta\,d\theta}{\operatorname{tg}\theta} = -4a\cos^2\theta d\theta.$$

Nous avons donc finalement

$$y = a(1 + \cos 2\theta),$$
$$x = -2a\int(1 + \cos 2\theta)d\theta + C^{te},$$
$$x - x_0 = -a(2\theta + \sin 2\theta).$$

La constante x_0 indique que la courbe peut subir une translation parallèle à Ox, quelconque, et il suffira de lui donner une valeur particulière choisie n'importe comment.

2. Fixons x_0 de façon que la courbe passe au point O. Nous voyons que y est nul pour $2\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, et alors $x - x_0 = -a\pi$; donc $x_0 = a\pi$.

La courbe (C_0) a donc pour équations paramétriques

$$x = a(\pi - 2\theta - \sin 2\theta),$$
$$y = a(1 + \cos 2\theta).$$

Posons maintenant $\pi - 2\theta = t$, $2\theta = \pi - t$, les équations deviendront

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

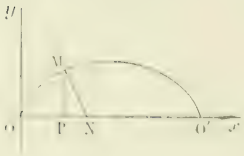
et nous reconnaissons les équations classiques de la cycloïde, ayant pour base Ox et pour cercle générateur un cercle de rayon a; l'origine est un point de rebroussement de cette courbe.

Le point de rencontre avec Ox le plus rapproché du point O correspond à $t = 2\pi$; il a pour coordonnées $x = 2a\pi$, $y = 0$.

L'aire S est la somme de l'aire OMP de la courbe et de l'aire du triangle PMN. Elle a donc pour valeur $\int_0^t y\,dx + y\frac{PN}{2}$.

Calculons d'abord l'intégrale : nous avons

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \qquad \text{et} \qquad y\,dx = a^2(1 - \cos t)^2 dt,$$
$$y\,dx = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt,$$
$$y\,dx = a^2\left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt;$$



puis

$$\int_0^t y\,dx = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right).$$

D'autre part, $PN = y\frac{dy}{dx} = a\sin t$,

et $$y\,\frac{PN}{2} = \frac{a^2}{2}(1-\cos t)\sin t = a^2\left(\frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right).$$

L'aire S est donc égale à

$$S = a^2\left(\frac{3t}{2} - 2\sin t - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)$$

ou $$S = \frac{3a^2}{2}(t - \sin t) = \frac{3a}{2}x.$$

La propriété annoncée est démontrée.

Quant à l'aire S_0, on l'obtient en faisant $t = 2\pi$ dans S, et l'on a $S_0 = 3\pi a^2$.

3. Pour que $S = \frac{S_0}{4}$, il faut que t vérifie l'équation

$$\frac{3a^2}{2}(t - \sin t) = \frac{3\pi a^2}{4}, \qquad \text{ou} \qquad t - \sin t - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Ceci donne, quand $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$; le calcul de x est donc immédiat.

Pour calculer y, il faut calculer t. Or il est facile de voir d'abord que t est plus grand que $\frac{\pi}{2}$ et plus petit que $\frac{3\pi}{4}$.

Nous avons $\pi = 3{,}1416$, $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ et $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$. D'autre part, $\sin\frac{3\pi}{4}$ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}414}{2} = 0{,}707$. Pour $t = \frac{3\pi}{4}$, la fonction est positive et égale à 0,078. La racine est donc un peu avant $\frac{3\pi}{4}$. La règle à calcul permet de substituer très rapidement 134°, 133°, 132°, et l'on voit de suite que t est compris entre 132° et 133°.

Effectuons le calcul pour 132°, la fonction prend la valeur

$$\frac{132\pi}{180} - \sin 48^\circ - \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{132\pi}{180} = 2{,}31, \qquad \sin 48^\circ = 0{,}74;$$

nous avons donc

$$2{,}31 - 0{,}74 = 1{,}57$$

et cette différence est nulle avec l'approximation de la règle à calcul.

Les valeurs de x et de y sont

$$x = \frac{\pi}{2} = 1{,}57, \qquad y = 1 + \cos 48^\circ = 1 + \sin 42^\circ.$$

La valeur de $\sin 42^\circ$ est 0,67 et $y = 1{,}67$ (la dernière décimale est forcée).

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; A. Courtois, à Selan ; L. Simon, à Fourmies ; J. Romaides, à Athènes.

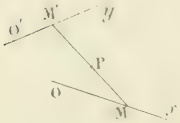
CONCOURS DE 1912 (*Suite*)

CONCOURS D'ADMISSION DES AGENTS DES POSTES AUX COURS DE L'UNIVERSITÉ [1]

Mathématiques.

I. — **2146.** On donne deux droites Ox et $O'y$ non situées dans le même plan.

[1] Le concours est ouvert aux jeunes gens qui se destinent à l'École professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes, 2e section.



Un point M décrit Ox d'un mouvement uniforme, pendant que M' décrit $O'y$ d'un mouvement uniforme. On sait que les courbes hodographes des mouvements de ces points se réduisent à des points que l'on appellera h et h'.

1° Montrer que la courbe hodographe du mouvement du point P divisant MM' dans le rapport *constant* k se réduit aussi à un point qu'on obtient en divisant la droite hh' dans le rapport k.

2° Trajectoire du point P.

3° Lieu géométrique de la droite MM'.

4° Comment modifier ces résultats si on suppose que Ox et $O'y$ sont dans un même plan?

5° Quelle serait la trajectoire du point P si les points M, M' décrivaient Ox et $O'y$ avec des accélérations constantes ?

II. — **2147**. x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point P du plan ; discuter, d'après la position de ce point, le nombre des racines réelles de l'équation

$$xLx - xx_0 - x - y_0 = 0.$$

Lx étant le logarithme népérien de x.

En particulier, lieu géométrique du point P pour que l'équation donnée ait une racine double.

Physique.

1° Vitesse de la lumière par la méthode de Fizeau.

2° Définition du coefficient de dilatation absolue du mercure. Sa mesure par la méthode de Dulong et Petit.

Chimie.

I. — Chlorure et fluorure de silicium.

Donner seulement les préparations et l'action de l'eau.

II. — **2148**. Un petit ballon renferme 10 grammes de carbonate de calcium pur; il est fermé par un bouchon traversé de deux tubes, l'un de ces tubes pourvu d'un robinet est surmonté d'une ampoule contenant de l'acide sulfurique, l'autre tube est en relation avec un appareil desséchant puis avec un long tube de porcelaine imperméable aux gaz et contenant du charbon de sucre. A la suite de ce dernier, une pompe permet de recueillir les gaz ou de faire le vide dans tout l'appareil.

On commence par porter au rouge le tube de porcelaine contenant le charbon de sucre ; on fait ensuite le vide complet dans l'appareil, puis, ouvrant le robinet de l'ampoule, on fait très lentement tomber l'acide sulfurique dans le ballon. On recueille alors le gaz dégagé à la sortie de l'appareil, c'est-à-dire après son passage sur le charbon porté au rouge. Quand la réaction de l'acide sulfurique est complètement terminée, on fait de nouveau le vide, en ayant soin de réunir le gaz ainsi extrait à celui qui s'est librement dégagé.

On demande quel est le volume total de ce gaz à 0° et 760^{mm}.

On a les données suivantes :

$$C = 12, \quad O = 16, \quad Ca = 40 ;$$

Densité de l'hydrogène : 0,0695 ;

Poids du litre d'air : 1g,293.

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET DES TÉLÉGRAPHES

(2e section)

Mathématiques.

I. — **2149**. Trouver les trajectoires orthogonales T des coniques C représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 + xy + x^2 - \lambda y = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Indiquer la forme de la trajectoire qui passe par le point de coordonnées $x = 0$, $y = h$; discuter.

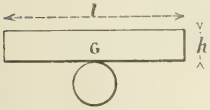
On considère un arc de trajectoire T situé au-dessus de la droite $y = a$, et deux points A et B sur cet arc d'ordonnées $2a$ et $3a$ respectivement. Soient AA' et BB' les arcs des deux coniques C issues des points A et B et limitées à la droite $y = a$. Calculer l'aire du quadrilatère limité par l'arc AB, les deux arcs AA' et BB' et le segment rectiligne AB'.

II. — **2150**. On demande l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$2x^2 \frac{dy^2}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 3y = \cos(\sqrt{x}).$$

Démontrer qu'il y a une intégrale et une seule qui est continue pour $x = 0$, et donner l'expression de cette intégrale.

Mécanique.



I. — Une planche homogène de longueur l et d'épaisseur h s'appuie sur un cylindre fixe, de rayon r, dont l'axe est horizontal. Le grand axe de la planche est perpendiculaire à celui du cylindre. Les surfaces des deux corps sont supposées assez rugueuses pour éviter tout glissement, et on néglige la résistance au roulement.

On demande :

1° A quelle condition la position d'équilibre obtenue en plaçant la planche de telle façon que son centre de gravité G se trouve dans le plan vertical contenant l'axe du cylindre est une position d'équilibre stable ;

2° Cette condition étant réalisée, quelle est la durée des petites oscillations que peut effectuer la planche autour de cette position d'équilibre.

II. — Un solide homogène est mobile autour de son centre de gravité O. L'un des axes centraux d'inertie, OA, est assujetti à demeurer dans un plan horizontal. Trouver le mouvement de ce corps en supposant les liaisons sans frottement. Après avoir traité le problème général, examiner ce qui arrive dans chacun des trois cas particuliers que voici :

1° L'ellipsoïde central d'inertie est de révolution autour de OA ;

2° Le solide se réduit à une tige infiniment mince, perpendiculaire à OA ;

3° Le carré du moment résultant des quantités de mouvement par rapport à la verticale du point O est, à l'instant initial, égal au produit de la force vive par le moment d'inertie relatif à l'un des axes centraux autres que OA.

Physique.

I. — Lignes isothermes et lignes adiabatiques.

On donne une masse m d'air à 0° sous la pression p_0 ; calculer le travail nécessaire pour la comprimer adiabatiquement jusqu'à réduire son volume au $\frac{1}{n}$ de sa valeur primitive v_0 ; calculer l'élévation de température produite.

Après avoir établi les expressions algébriques définitives, on remplacera, pour les calculs numériques, les lettres par leurs valeurs évaluées en unités C. G. S., sachant que la masse d'air est de 5 kg. sous la pression initiale de 760^{mm} de mercure.

II. — Extra-courant de fermeture dans un circuit de résistance R, de self-induction L supposée constante, branché sur une source ayant une différence de potentiel E constante.

On demande au bout de combien de temps l'intensité du courant ne diffère que d'une fraction $\frac{1}{n}$ de sa valeur $I = \frac{E}{R}$ en régime permanent.

On fera dans la formule trouvée : $R = 3$ ohms, $L = 0{,}1$ henry et $n = 1000$.

Chimie.

I. — Comment transforme-t-on les fontes en acier et en fer ?

II. — Calculer le volume d'air nécessaire à la régénération de 100 kg. de bioxyde de manganèse, en supposant que l'oxygène soit totalement absorbé.

Combien reste-t-il de chlore libre, si les gaz dégagés par la réaction barbotent dans une solution aqueuse renfermant 100 kg. de gaz sulfureux dissous ?

QUESTION PROPOSÉE

2151. — On donne un ellipsoïde et un point M, et on considère les droites D telles que chacune d'elles soit perpendiculaire au plan passant par sa conjuguée par rapport à l'ellipsoïde et par le point M.

1° Démontrer que par un point de l'espace passent trois droites D. Peuvent-elles former un trièdre trirectangle ?

2° Dans un plan P, il existe en général une seule droite D ; quels sont les plans renfermant une infinité de ces droites et quelle est l'enveloppe de ces droites dans chacun d'eux ?

3° On suppose que le plan P se déplace parallèlement à lui-même ; former la surface engendrée par les droites D situées dans les positions successives de ce plan.

4° Pour quelles directions du plan P ou bien pour quelles positions du point M cette surface est-elle réductible à une courbe plane et quelle est cette courbe ?

G. Esteren, à Bordeaux.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2060. — *Résoudre l'équation*

$$27(12x^2 - 12ax + a^2)^2 + 1600x^2(x^2 - 2ax) = 0,$$

sachant qu'elle a une racine double, et que l'une des racines simples est le tiers de la racine double.

La forme sous laquelle l'équation est donnée montre que pour toute racine de cette équation on a $x^2 - 2ax < 0$; on en conclut que les racines réelles sont comprises entre 0 et $2a$.

Cela posé, en ordonnant l'équation on obtient

$$x^4 - 2ax^3 + \frac{81}{98}a^2x^2 - \frac{81}{686}a^3x + \frac{27}{5488}a^4 = 0.$$

Soient α la racine double, $\frac{\alpha}{3}$ et β les racines simples ; écrivons seulement les deux premières relations entre les coefficients et les racines, nous avons

$$7\alpha + 3\beta = 6a, \qquad 5\alpha^2 + 7\alpha\beta = \frac{243}{98}a^2.$$

ou, en tirant de la première $\beta = \frac{6a - 7\alpha}{3}$, et, en portant cette valeur dans la seconde, nous obtenons l'équation du deuxième degré

$$34\alpha^2 - 42a\alpha + \frac{729}{98}a^2 = 0,$$

dont les racines sont

$$\alpha_1 = \frac{243}{238}a, \qquad \alpha_2 = \frac{3}{14}a.$$

La racine α_1 ne peut convenir, car la valeur de β correspondante, $\beta_1 = \frac{6a - 7\alpha_1}{3}$, n'est pas comprise entre 0 et $2a$.

La seule valeur acceptable pour la racine double est donc $\frac{3}{14}a$; la valeur de β correspondante est $\frac{3a}{2}$, et l'autre racine simple est $\frac{a}{14}$.

Ceci prouve seulement que si l'équation jouit des propriétés de l'énoncé, la racine double est $\frac{3a}{14}$ et les racines simples $\frac{a}{14}$ et $\frac{3a}{2}$; mais il est *nécessaire* de vérifier que ces nombres sont bien racines de l'équation, et pour cela que le premier membre de l'équation peut se mettre sous la forme

$$\left(x-\frac{3a}{14}\right)^2\left(x-\frac{a}{14}\right)\left(x-\frac{3a}{2}\right),$$

ou encore que les racines trouvées vérifient les deux autres relations entre les coefficients et les racines : ce qui ne présente aucune difficulté.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions par MM. André Courtois ; G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2090. — *On considère tous les triangles isocèles dont l'un des côtés égaux est fixe. 1° Le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits à ces triangles se compose d'une strophoïde et d'un cercle. 2° Trouver le lieu des points de contact de ces quatre cercles avec les côtés du triangle.*

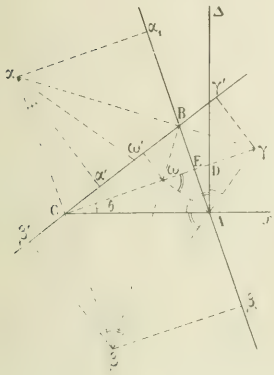


Fig. 1.

1. Soit le triangle ABC, où nous supposons CA = CB, le côté CA étant fixe. Nous menons les bissectrices intérieures et extérieures des angles de ce triangle, et nous déterminons ainsi les centres ω, α, β, γ des cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Menons par le point A la droite Δ perpendiculaire à AC, et soit D le point où cette droite rencontre la bissectrice $C\omega\gamma$.

Désignons par θ l'angle $AC\omega$. On aperçoit sans difficulté les égalités suivantes :

$$\widehat{CA\omega} = \widehat{DA\gamma} = \widehat{D\gamma A} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2},$$

$$\widehat{\omega AD} = \widehat{A\omega D} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}.$$

On en conclut que les triangles $A\omega D$, $A\gamma D$ sont isocèles ; on a $D\omega = D\gamma = DA$, ce qui montre que le lieu des points ω et γ est la strophoïde droite qui a pour point double le point A et pour sommet le point C.

D'autre part,

$$\widehat{CA\beta} = \widehat{C\beta A} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2};$$

donc $C\beta = CA$, et de même $C\alpha = CB = CA$, donc le lieu des points α et β est le cercle qui a pour centre le point C et pour rayon CA.

2. Nous ne considérerons pas les points de contact des cercles et du côté CA, car ces points ont pour lieu géométrique la droite fixe CA.

Points de contact sur le côté AB. — Les cercles (ω) et (γ) touchent AB au point E milieu de AB. Le lieu de ce point est le cercle qui a pour diamètre CA.

Les cercles (α) et (β) touchent AB aux points α_1 et β_1, pieds des perpendiculaires abaissées de α et β sur AB. Comme $C\alpha$ est perpendiculaire à CE, la figure $C\alpha\alpha_1E$ est un rectangle ; on a $E\alpha_1 = C\alpha = CA$, et de même $E\beta_1 = C\beta = CA$.

Il en résulte que le lieu des points α_1 et β_1 est la cardioïde obtenue en augmentant et en diminuant les rayons vecteurs AE du cercle de diamètre CA de la longueur CA elle-même.

Points de contact sur le côté CB. — Menons $\omega\omega'$ et $\gamma\gamma'$ perpendiculaires sur BC. Nous avons

$$C\omega' = CB - B\omega' = CB - BE = a - a\sin\theta,$$

a désignant la longueur CA.

Par suite, si l'on prend le point C comme pôle, CA comme axe polaire, l'équation du lieu du point ω' est, en coordonnées polaires,

$$(1) \qquad \rho = a\left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Pour γ', nous avons

$$C\gamma' = CB + B\gamma' = CB + BE = a + a\sin\theta,$$

donc le lieu de γ' a pour équation

$$(2) \qquad \rho = a\left(1 + \sin\frac{\omega}{2}\right).$$

Enfin, abaissons $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ perpendiculaires sur CB; l'angle $CA\alpha'$ étant égal à θ, nous avons

$$C\alpha' = C\alpha\sin\theta = a\sin\theta,$$

et l'équation polaire du lieu de α' est

$$(3) \qquad \rho = a\sin\frac{\omega}{2};$$

comme β' est symétrique de α' par rapport au point C, l'équation du lieu de β' est

$$(4) \qquad \rho = -a\sin\frac{\omega}{2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à construire ces courbes. Remarquons d'abord que l'équation (2) se déduit de (1) en changeant ω en $2\pi + \omega$; on en conclut que ces deux équations représentent la même courbe. On voit d'une manière analogue que (3) et (4) représentent aussi la même courbe.

Il nous suffit d'étudier les équations (1) et (3).

Prenons d'abord l'équation (1)

$$\rho = a\left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right).$$

L'intervalle suffisant est 4π. Mais si l'on change ω en $2\pi - \omega$, ρ ne change pas; donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire, et, pour éviter de tracer des portions de courbe symétriques, il faut diviser l'intervalle d'étendue 4π en deux intervalles tels qu'à toute valeur α du premier corresponde la valeur $2\pi - \alpha$ du deuxième. Nous prendrons pour intervalle $(\pi - 2\pi,\ \pi + 2\pi)$ que nous décomposons en

$$(\pi - 2\pi,\ \pi) \qquad \text{et} \qquad (\pi,\ \pi + 2\pi).$$

A toute valeur $\pi - \theta$ du premier correspond la valeur $\pi + \theta$ du deuxième, et ces deux valeurs ont une somme égale à 2π; elles sont bien de la forme α et $2\pi - \alpha$.

Nous ferons varier ω dans le premier intervalle $(-\pi,\ +\pi)$, et nous prendrons le symétrique de la courbe obtenue par rapport à l'axe polaire.

Quand ω croît de $-\pi$ à $+\pi$, $\sin\frac{\omega}{2}$ croît de -1 à $+1$, et ρ décroît de $2a$ à zéro.

ω	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
ρ	$2a$	↘	$a\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	a	↘	$a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	↘	0

On en déduit la branche de courbe HKAIC, qui arrive tangente en C à Cx.

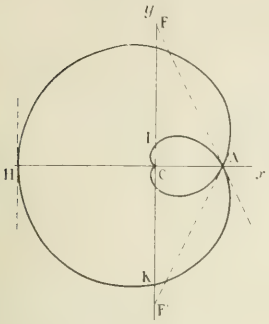


Fig. 2.

On a $$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{-2\left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

ce qui montre qu'au point H $(\omega = -\pi)$, la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire. Au point A $(\omega = 0)$, $\operatorname{tg} V = -2$, la tangente à la courbe coupe Oy au point F qui a pour ordonnée $2a$.

En achevant par symétrie, on a la figure 2.

Considérons maintenant l'équation

$$\rho = a \sin\frac{\omega}{2}.$$

L'intervalle suffisant est encore 4π ; mais si l'on change ω en $2\pi - \omega$, ρ change de signe, et si l'on change ω en $2\pi - \omega$, ρ ne change pas. Ceci montre que la courbe est symétrique par rapport au pôle et par rapport à Cx.

Pour avoir toute la courbe, on fera varier ω de 0 à π, on prendra le symétrique de la branche obtenue par rapport à Cx, puis le symétrique de l'ensemble par rapport au pôle.

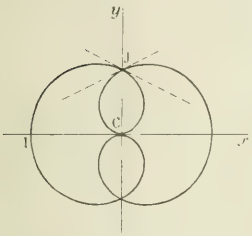


Fig. 3.

Quand ω croît de 0 à π, ρ croît de 0 à a, prenant la valeur $\frac{a}{\sqrt{2}}$ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Nous avons

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}.$$

On obtient la branche de courbe IJC, tangente en C à Cx.

Au point I, la tangente est perpendiculaire à Cx, et au point J, elle fait avec le rayon vecteur un angle dont la tangente est égale à 2.

En achevant par symétrie, on a la figure 3.

L. NAUCELLE, à la Châtre.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Douai ; R. Manen, à Albi ; M. Rouy, instituteur à Chalon-sur-Saône ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie à Héricourt ; A. Le Marchand, à Paris.

2091. — *On considère une conique de centre* O *et un point* P *de son plan. Soient deux cordes rectangulaires variables passant par* P, AB *et* CD. *Trouver le lieu des centres des coniques passant par les cinq points* O, A, B, C, D. *Cas du cercle.*

Supposons que la conique soit l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Si (α, β) sont les coordonnées de P, les équations de AB et CD sont

$$m(x - \alpha) - (y - \beta) = 0, \qquad (x - \alpha) + m(y - \beta) = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par A, B, C, D, est

$$(1) \qquad \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + [m(x - \alpha) - (y - \beta)][(x - \alpha) + m(y - \beta)] = 0.$$

Si cette conique passe par O, on a

$$(2)\qquad \lambda a^2b^2 = m\alpha - \beta(m\beta + \alpha).$$

Les équations du centre sont

$$(3)\qquad 2\lambda b^2 x - 2m(x - \alpha) - (m^2 - 1)(y - \beta) = 0,$$

$$(4)\qquad 2\lambda a^2 y - 2m(y - \beta) - (m^2 - 1)(x - \alpha) = 0.$$

On aura le lieu du centre en éliminant λ et m entre (2), (3) et (4). Or, (2) s'écrit

$$(5)\qquad \lambda a^2b^2 - m(\alpha^2 - \beta^2) - (m^2 - 1)\alpha\beta = 0.$$

En éliminant λ, m et $(m^2 - 1)$ entre les trois équations homogènes (3), (4), (5), on a l'équation du lieu sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} 2b^2x & 2(x - \alpha) & y - \beta \\ 2a^2y & -2(y - \beta) & x - \alpha \\ a^2b^2 & -(\alpha^2 - \beta^2) & -2\alpha\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant développé devient la conique

$$(6)\qquad b^2x^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2) - a^2y^2(\alpha^2 - \beta^2 - b^2) + 2\alpha\beta(a^2 + b^2)xy$$
$$- b^2\alpha x(\alpha^2 + \beta^2 + 2a^2) - a^2\beta y(\alpha^2 - \beta^2 + 2b^2) + a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

La conique sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que

$$\alpha^2\beta^2(a^2 + b^2)^2 + a^2b^2(\alpha^2 - \beta^2 + a^2)(\alpha^2 - \beta^2 - b^2) \lessgtr 0.$$

La courbe de séparation est donc une quartique.

Cas du cercle. — Si $b = a$, l'équation (6) devient

$$(7)\qquad x^2(\alpha^2 - \beta^2 + a^2) - y^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2) + 4\alpha\beta xy - (\alpha x + \beta y)(\alpha^2 + \beta^2 + 2a^2) + a^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

La conique sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que

$$4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2 + a^2)(\alpha^2 - \beta^2 - a^2) \lessgtr 0,$$

ou

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - a^4 \lessgtr 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 + \beta^2 - a^2 \lessgtr 0,$$

ou, suivant que le point P sera à l'intérieur, à l'extérieur ou sur le cercle.

Mais si le point P est sur le cercle $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$, c'est-à-dire $\alpha = a\cos\varphi$, $\beta = b\sin\varphi$, l'équation (7) devient

$$2(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 - 3a(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + a^2 = 0,$$

ou

$$(8)\qquad (x\cos\varphi + y\sin\varphi - a)[2(x\cos\varphi + y\sin\varphi) - a] = 0.$$

Le lieu du centre n'est donc pas dans ce cas une véritable parabole, mais un système de deux droites parallèles. Et encore, l'une d'elles est une solution étrangère. Le seul vrai lieu est la droite

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - a = 0,$$

c'est-à-dire la tangente au cercle au point P.

En effet, dans ce cas, les deux cordes APB et CPD deviennent les cordes PB et PD : les trois points B, O, D sont en ligne droite. La conique de l'énoncé se compose alors des deux droites BD et tangente en P. Le centre de ces deux droites est bien sur la tangente en P.

Remarque. — Un cas particulier intéressant est lorsque P est un des foyers ($\alpha = c$, $\beta = 0$) de l'ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

La conique lieu du centre a alors pour équation

$$b^2(2a^2 - b^2)x^2 - a^2(a^2 - 2b^2)y^2 - b^2c(3a^2 - b^2) + a^2b^2c^2 = 0.$$

Si $a > b\sqrt{2}$, la conique est une hyperbole ; si $a < b\sqrt{2}$, la conique est une ellipse. Si $a = b\sqrt{2}$, la conique devient

$$(2a^2 - b^2)x^2 - c(3a^2 - b^2)x + a^2c^2 = 0,$$

ou

$$3x^2 - 3bx + 2b^2 = 0,$$

c'est-à-dire les deux droites parallèles

$$(x-b)(3x-2b)=0.$$

E. N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. Gaston Bélier, 2e d'artillerie, Poitiers ; André Courtois, Avesnes-sur-Helpe (Nord) ; Jouglens ; G. Lach, à Douai ; L. Naudelle, à La Châtre ; A. Rousseau, à Fournes en Weppes ; M. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône ; L. Simon, à Fourmies.

PHYSIQUE

2059. — *On introduit un décigramme d'un mélange d'eau et d'alcool éthylique dans un baromètre à mercure maintenu à la température de 100° centigrades.*

Après vaporisation complète du liquide, le mercure s'arrête dans le tube à 40 centimètres au-dessus de son niveau dans la cuvette. Le volume occupé par la vapeur est de 320^{cm3} dans les conditions de l'expérience.

1° *Calculer la densité par rapport à l'air de la vapeur du mélange.*

2° *Sachant que les densités de vapeur de l'eau et de l'alcool par rapport à l'air sont respectivement 0,622 et 1,594, déduire de la mesure précédente la composition centésimale en poids du mélange.*

3° *Sachant que la présence dans 100 grammes d'eau d'une molécule-gramme de substance dissoute produit un abaissement de 18°,6 dans la température de congélation, on demande à quelle température commencera la solidification du mélange.*

4° *A quelle température faudra-t-il maintenir le mélange pour que sa solidification s'arrête au quart de son poids?*

La hauteur du baromètre normal au moment de la première expérience est de 75 centimètres à 0°. On donne la densité absolue de l'air normal, 0,001293, le coefficient de dilatation des gaz, 0,00367, et le coefficient de dilatation absolue du mercure, $\frac{1}{5550}$. *(Ecole navale, concours de 1912.)*

1. Appliquons à la vapeur du mélange la relation connue entre la masse m, le volume v, la densité d, la pression p, la température t, la pression normale p_0 et la masse spécifique a_0 de l'air normal,

$$m = vda_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1+\alpha t}.$$

La pression p est égale à la pression atmosphérique, 75, diminuée de la pression due à 40 centimètres de mercure à 100°, soit

$$\frac{40}{1+\frac{100}{5550}} = 39{,}29,$$

donc

$$p = 75 - 39{,}29 = 35{,}71.$$

En introduisant dans la formule les autres valeurs numériques, on trouve

$$d = 0{,}703.$$

2. Considérons 100 parties, en poids, du mélange. Soit x le poids de l'alcool, $100-x$ celui de l'eau. Supposons la loi du mélange des gaz applicable et écrivons que le volume du mélange est égal à la somme des volumes de ses éléments. En supprimant immédiatement les facteurs communs, on peut représenter chaque volume par le quotient du poids par la densité, ce qui donne

$$\frac{100}{703} = \frac{x}{1594} + \frac{100-x}{622}.$$

On trouve $x = 18,9$ et $100 - x = 81,1$.

Pour 100 parties d'eau, le poids de l'alcool serait

$$\frac{1890}{81,1} = 23,3.$$

3. Le poids moléculaire de l'alcool, C^2H^5OH, est égal à 46. Il y a donc presque exactement une demi-molécule-gramme de dissoute dans 100 grammes d'eau. La température de congélation sera donc sensiblement $-\frac{18,6}{2} = -9^\circ,3$, exactement $-9^\circ,4$.

4. Quand, sur 100 parties du mélange, il y en aura un quart, c'est-à-dire 25 parties d'eau de congelées, il restera $81,1 - 25 = 56,1$ d'eau à l'état liquide et toujours 18,9 d'alcool. Pour 100 grammes d'eau, cette proportion correspond à $\frac{1890}{56,1} = 33,7$ d'alcool, soit une fraction de molécule $\frac{33,7}{46} = 0,73$.

La température cherchée sera donc $-0,73 \times 18,6 = -13^\circ,6$.

QUESTIONS PROPOSÉES

2152. — La condition pour que l'équation

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

ait, entre ses quatre racines x_1, x_2, x_3, x_4, la relation $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, est

$$\delta C = 4AB - A^3.$$

La même condition exprime que l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

a entre ses racines la relation $x_1 + x_2 = x_3$.

E. N. Barisien.

2153. — On considère une courbe (C) rapportée à des axes rectangulaires Ox, Oy, et dans laquelle l'abscisse x de chaque point M s'exprime en fonction de l'angle α que forme la tangente avec Ox, par la relation

(1) $$x = a(1 - \cos\alpha).$$

Démontrer que l'ordonnée y vérifie l'équation différentielle

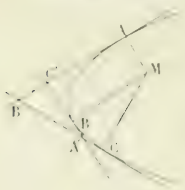
(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Déduire de l'équation 2 l'expression explicite de y en fonction de α et déterminer la constante d'intégration de façon que y s'annule pour $\alpha = 0$.

La courbe (C) étant ainsi définie, on demande d'en étudier la forme, d'en construire l'asymptote, d'en calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure et la longueur d'arc comptée à partir de l'origine.

(*Certificat de mathématiques générales. Rennes, juin 1912.*)

2154. — On considère une parabole (P) et un point fixe A sur la courbe.



D'un point quelconque M de la normale en A on abaisse les deux autres normales MB, MC sur (P). Soit A'B'C' le triangle formé par les tangentes en A, B, C.

1° Le milieu de B'C' est fixe.
2° Le lieu des milieux de A'B', A'C' est une parabole (Q).
3° Les médiatrices du triangle A'B'C' sont normales à une parabole fixe (R).
4° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.
5° Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
6° Lieu de l'orthocentre du triangle ABC.

E. N. Barisien.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

23e Année. Juillet 1913. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE

par M. G. Fontené.

Je me suis inspiré pour la rédaction de cette Note, jusqu'au paragraphe IV exclusivement, du *Traité de mécanique rationnelle de M. Appell ;* j'ai surtout cherché à faire un exposé systématique, qui pût laisser aux élèves une impression nette.

Dans l'étude du mouvement planétaire, j'ai indiqué les deux méthodes classiques : emploi de l'intégrale des forces vives, emploi de la formule de Binet ; pour ce dernier cas, j'ai indiqué le calcul du temps par l'intégrale des aires. J'ai insisté sur quelques points : *question de signe* dans l'intégration de l'équation différentielle

$$d\theta = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{1-\rho^2}} ;$$

détermination des deux constantes C et h en fonction des données initiales, détermination des deux éléments métriques qui fixent la grandeur de la trajectoire en fonction des constantes C et h, réalité de la trajectoire *à partir des données initiales.*

I. Les deux équations du problème.

1. Il s'agit ici de Mécanique plane, et deux équations suffiront pour déterminer les deux coordonnées du point mobile en fonction du temps. On peut prendre *l'intégrale* des aires et le *théorème* de la force vive sous sa forme différentielle

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(A)} & r^2 d\theta = C dt, \\ \text{(B)} & d\dfrac{mv^2}{2} = F dr ; \end{array}\right.$$

si F est donné en fonction de r seul, on pourra intégrer la relation (B), c'est-à-dire prendre *l'intégrale* des forces vives.

2. Au moyen de la relation (A), on peut d'abord transformer l'expression du carré de la vitesse en coordonnées polaires, soit

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 ;$$

en éliminant soit t, soit θ, on obtient les deux formules

$$\left\{\begin{array}{l} v^2 = C^2\left[\left(\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\right)^2\right], \\ v^2 = \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \dfrac{C^2}{r^2}. \end{array}\right.$$

II. Cas où la force est fonction de la seule distance.

3. Si la force est fonction de la seule distance, $F = \varphi(r)$, on peut intégrer la relation (B), et l'on a

$$[B] \qquad v^2 = f(r) + h;$$

on a ainsi l'expression de la vitesse en fonction du rayon vecteur.

La première des deux expressions de v^2 obtenues plus haut donne alors

$$[C] \qquad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{C^2}[f(r) + h];$$

on obtient θ en fonction de r par une quadrature, on a l'équation de la trajectoire. La seconde expression de v^2 donne encore

$$[C'] \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = f(r) + h;$$

on obtient t en fonction de r par une quadrature, on a la loi cinématique du mouvement. — Ayant obtenu, par exemple, la relation entre r et θ au moyen de la relation [C], on peut obtenir la loi cinématique du mouvement au moyen de l'intégrale des aires.

III. Cas où l'on a $F = \varphi(r, \theta)$ ou $F = \varphi(r, t)$.

4. Si F n'est pas fonction de la seule distance, on ne peut plus intégrer la relation (B); même si F est fonction de la seule distance, de sorte que l'on ait l'intégrale des forces vives [B], il peut y avoir avantage à ne pas employer cette intégrale pour achever le problème.

5. Soit $F = \varphi(r, \theta)$, ou simplement $F = \varphi(r)$.

La relation (B) peut s'écrire, en prenant pour v^2 l'expression qui contient seulement r et θ et en faisant la différentiation par rapport à θ,

$$\frac{d}{d\theta}\frac{mC^2}{2}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right] = F\frac{dr}{d\theta},$$

ou [C],

$$\frac{-mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right] = F;$$

c'est la formule de Binet.

Avec $F = \varphi(r, \theta)$, ou simplement $F = \varphi(r)$, la relation (C') peut donner la relation entre r et θ, c'est-à-dire l'équation de la trajectoire. Pour

$$F = \frac{\varphi(\theta)}{r^2},$$

on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre ; il en est encore de même pour

$$F = \frac{\varphi(\theta)}{r^2} + \frac{k}{r^3}.$$

La loi cinématique du mouvement peut s'obtenir par l'intégrale des aires.

6. Soit encore $F = \varphi(r, t)$, ou simplement $F = \varphi(r)$.

La relation (B) peut s'écrire, en prenant pour v^2 l'expression qui contient seulement r et t et en différentiant par rapport à t,

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right] = F\frac{dr}{dt}.$$

ou

$$(C') \qquad m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3}\right) = F.$$

Avec $F = \varphi(r, t)$, ou simplement $F = \varphi(r)$, la relation (C'') peut donner la relation entre r et t, c'est-à-dire la loi cinématique du mouvement. L'intégrale des aires peut alors faire connaître la trajectoire [1].

IV. Établissement des formules (C') et (C'') sans l'emploi du théorème de la force vive.

7. Les formules *générales* relatives à l'accélération en coordonnées polaires sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_P &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right), \\ \gamma_R &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Le second terme de la première expression de γ_P est, dans ces formules, le seul qui contienne à la fois une dérivée de r et une dérivée de θ : ce terme représente donc l'*accélération complémentaire* [2] quand on considère le mouvement comme résultant d'un mouvement relatif, qui est un mouvement de glissement, et d'un mouvement d'entraînement, qui est un mouvement de rotation. L'accélération complémentaire est d'une manière générale la vitesse de l'extrémité d'un vecteur *d'origine* O équipollent au double de la vitesse relative ; en Mécanique plane, le vecteur qui la représente s'obtient en multipliant le vecteur qui représente le double de la vitesse relative par la vitesse angulaire de l'entraînement, et en faisant tourner d'un angle droit dans le sens direct le vecteur obtenu : cela donne bien ici le terme $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ dans γ_P.

La seconde expression de γ_P, celle dont on fera usage ici, s'obtient directement comme il suit. On a

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2},$$

de sorte que *le moment du vecteur accélération par rapport au point* O *est la dérivée par rapport au temps du moment du vecteur vitesse ;* comme ces moments admettent les expressions $\gamma_P \times r$ et $r\frac{d\theta}{dt} \times r$, on a bien la formule en question.

Observons encore que la formule

$$\gamma_R = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \gamma_R + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ou, en multipliant le premier membre par $m.\frac{dr}{dt}dt$, le second membre par $m.dr$,

$$d\,\frac{m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{2} = \left[F_R + mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]dr\,;$$

c'est, sous sa forme différentielle, le théorème de la force vive dans le mouvement relatif de glissement sur le rayon vecteur.

(1) Les relations [B], [C'], [C''] sont les intégrales des relations (B), (C'), (C''), pour le cas où la force est fonction de la seule distance.

(2) On n'enseigne pas en Mathématiques spéciales le théorème de Coriolis ; mais les élèves peuvent en connaître l'énoncé, ne fût-ce que pour éviter une idée fausse.

Les équations du mouvement relatif d'un point par rapport à des axes mobiles sont les mêmes que si ces axes étaient fixes et si l'on ajoutait aux forces qui agissent réellement sur le mobile deux forces fictives, la *force centrifuge* (ou force d'inertie d'entraînement), produit changé de signe de l'accélération d'entraînement par la masse, et *la force centrifuge composée*, produit changé de signe de l'accélération complémentaire par la masse. La différentielle de la demi-force vive relative est égale au travail élémentaire des forces appliquées au point et de la force centrifuge ; le travail de la force centrifuge composée est nul, attendu que cette force est normale à la vitesse relative ou au déplacement relatif. Le terme $m\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ qui s'ajoute à F_R dans la formule ci-dessus représente précisément la force centrifuge ; ces deux forces ont même direction, et s'ajoutent algébriquement.]

Voici une dernière remarque. On a dit plus haut que le moment du vecteur vitesse par rapport au point O admet les expressions générales

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{r\,d\theta}{dt}\,r.$$

Ce moment est égal au double de la vitesse aréolaire relative au point O, et l'on peut voir directement que cette vitesse aréolaire doublée admet l'une ou l'autre des deux expressions précédentes :

$$2\frac{dA}{dt} = \frac{x(y+dy) - y(x+dx)}{dt}, \qquad 2\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{dt}.$$

Au reste, la relation $\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$

donne $$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{r^2}.$$

8. Lorsque l'accélération est centrale, on a $\gamma_P = 0$, d'où $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ (intégrale des aires) ; on a alors les deux relations

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d\theta}{dt} = C, \\ \gamma = \dfrac{d^2r}{dt^2} - \dfrac{C^2}{r^3}, \end{cases}$$

l'accélération totale ne différant pas ici de γ_R.

La seconde de ces relations n'est pas autre chose que la relation (C″). Ecrite sous la forme

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F + m\frac{C^2}{r^3},$$

elle définit le mouvement relatif du mobile sur le rayon vecteur (voir ci-dessus) : *ce mouvement relatif est le même que si, le rayon vecteur étant fixe, la force qui agit sur le point était augmentée de* $m\frac{C^2}{r^3}$.

On aura la formule de Binet, soit (C′), en éliminant dt entre les deux relations ci-dessus. On prend θ comme variable indépendante, et l'on écrit d'une manière générale

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta};$$

on a successivement

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2},$$

et l'expression de γ devient $$\gamma = -\frac{C}{r^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right].$$

(*A suivre.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1912.

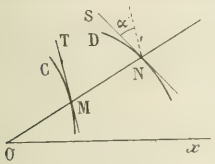
Mathématiques.

2063. — *On donne, en coordonnées polaires, une courbe* C

$$\rho = f(\omega).$$

On demande de déterminer une courbe D *par la condition suivante :*

M *étant un point de* C *et* N *un point de* D *situés sur le même rayon vecteur, la tangente* NS *à* D *doit faire avec la tangente* MT *à* C *un angle* α *donné et constant.*



Traiter en particulier les cas où la courbe C *est :*

1° *Un cercle ayant son centre au pôle ;*

2° *Un cercle passant par le pôle ;*

3° *Une spirale logarithmique :* $\rho = e^{m\omega}$;

4° *Une droite :*

5° *Une spirale d'Archimède :* $\rho = K\omega$. *Discuter la forme de la courbe* D *dans ce cas :*

6° *Une conique ayant son foyer au pôle. Montrer que, dans ce cas, on est ramené à une quadrature qu'on sait, en principe, effectuer. Achever les calculs dans le cas où la courbe* C *est une parabole. Discuter la forme de la courbe* D *dans ce cas.*

Si on appelle V et V′ les angles que font respectivement avec le rayon vecteur les tangentes en M et N aux courbes C et D, on a, d'après les conditions imposées dans l'énoncé,

$$V' = V + \alpha, \qquad \operatorname{tg} V' = \frac{\operatorname{tg} V + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} V}.$$

Or $\operatorname{tg} V = \dfrac{f(\omega)}{f'(\omega)}$ et $\operatorname{tg} V' = \dfrac{\rho}{\rho'}$, en appelant ρ le rayon vecteur de la courbe D ; donc

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{f(\omega) + \operatorname{tg}\alpha\, f'(\omega)}{f'(\omega) - \operatorname{tg}\alpha\, f(\omega)}.$$

Telle est l'équation différentielle qui donne ρ en fonction de ω.

Il nous reste à l'appliquer aux exemples particuliers qui sont indiqués.

1. La courbe C est un cercle ayant son centre au pôle. Alors $f(\omega) = C^{te}$ et l'équation différentielle devient

$$\frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -\operatorname{tg}\alpha\, d\omega ;$$

elle donne immédiatement

$$\rho = Ce^{-\omega \operatorname{tg}\alpha}.$$

C'est une famille de spirales logarithmiques. La propriété qu'a la spirale de couper tous ses rayons vecteurs sous le même angle rend ce résultat évident. La vérification est d'ailleurs aisée, car on a

$$\operatorname{tg} V' = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg} V' = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad V = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

2. La courbe C est un cercle qui passe au pôle. Alors

$$f(\omega) = a\cos\omega,$$

et l'équation différentielle devient

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\cos\omega - \operatorname{tg}\alpha \sin\omega}{-\sin\omega - \operatorname{tg}\alpha\cos\omega}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{(-\sin\omega - \operatorname{tg}\alpha\cos\omega)d\omega}{\cos\omega - \operatorname{tg}\alpha\sin\omega} = \frac{du}{u} ;$$

elle donne

$$\rho = Cu = C(\cos\omega - \operatorname{tg}\alpha\sin\omega).$$

Les courbes intégrales sont des cercles passant par le pôle.

Cette solution devait être attendue aussi, car il est facile de voir que si, par le point de rencontre de deux cercles, on mène une sécante quelconque qui coupe les deux cercles en A et B, les tangentes aux cercles en ces points font entre elles un angle constant.

3. Supposons que la courbe donnée soit une spirale logarithmique.

Alors $f(\omega) = e^{m\omega}$, $f'(\omega) = me^{m\omega}$.

et l'équation différentielle devient

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{m - \operatorname{tg}\alpha}{1 + m\operatorname{tg}\alpha} = \text{une constante } n.$$

Nous en déduisons de suite

$$\frac{d\rho}{\rho} = n\,d\omega, \qquad \rho = Ce^{n\omega}.$$

Les courbes intégrales forment une famille de spirales logarithmiques. Ce résultat aussi était évident *a priori*.

4. La courbe est une droite,

$$\frac{1}{\rho} = a\cos(\omega - \omega_0).$$

Nous déduisons de là

$$\frac{-\rho'}{\rho^2} = -a\sin(\omega - \omega_0), \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = a\rho\sin(\omega - \omega_0) = \operatorname{tg}(\omega - \omega_0);$$

Ceci c'est $\frac{f'(\omega)}{f(\omega)}$. Par conséquent l'équation différentielle devient

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\operatorname{tg}(\omega - \omega_0) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\omega - \omega_0)} = \operatorname{tg}(\omega - \omega_0 - \alpha).$$

L'intégration est encore immédiate et donne

$$\rho = \frac{C}{\cos(\omega - \omega_0 - \alpha)}.$$

Les courbes intégrales sont constituées par une famille de droites parallèles entre elles et faisant avec la première l'angle α. Ce résultat était aussi évident *a priori*.

5. La courbe donnée est une spirale d'Archimède $\rho = K\omega$. Alors $f(\omega) = K\omega$, $f'(\omega) = K$, et l'équation différentielle devient

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1 - \omega\operatorname{tg}\alpha}{\omega + \operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha + \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\omega + \operatorname{tg}\alpha}$$

L'intégration est encore immédiate et donne

$$\rho = Ce^{-\omega\operatorname{tg}\alpha}(\omega + \operatorname{tg}\alpha)^{\frac{1}{\cos^2\alpha}}.$$

Pour étudier ces courbes, nous nous bornerons au cas où C est positif, car changer C en $-C$ revient à considérer une courbe symétrique de la première par rapport au pôle.

Supposons d'abord $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Alors ρ est nul pour une direction négative $\omega = -\operatorname{tg}\alpha$; ensuite, pour les plus grandes valeurs de ω, ρ est positif et d'abord croissant; il finit par décroître et tend vers 0; la courbe s'enroule autour du pôle une infinité de fois, en s'en écartant d'abord, puis finit par tendre vers le point O. La dérivée met ceci en relief; elle s'écrit

$$\rho' = Ce^{-\omega\operatorname{tg}\alpha}(\omega + \operatorname{tg}\alpha)^{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}(1 - \omega\operatorname{tg}\alpha),$$

et montre que le maximum de ρ a lieu sur la direction $\omega = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Quand $\operatorname{tg}\alpha$ est négatif, ρ part de 0 pour la direction positive $\omega = -\operatorname{tg}\alpha$ et grandit constamment jusqu'à l'infini.

6. Supposons enfin que la courbe C soit une conique ayant son foyer au pôle. Alors

$$f(\omega) = \frac{p}{1 + e\cos\omega}, \qquad f'(\omega) = \frac{pe\sin\omega}{(1 + e\cos\omega)^2};$$

$f(\omega)$ et $f'(\omega)$ sont proportionnels à 1 et à $\dfrac{e\sin\omega}{1 + e\cos\omega}$, ou à $1 + e\cos\omega$ et $e\sin\omega$; l'équation différentielle à intégrer est

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{e\sin\omega - \operatorname{tg}\alpha(1 + e\cos\omega)}{1 + e\cos\omega + e\operatorname{tg}\alpha\sin\omega}\,d\omega.$$

Le changement de variable $\operatorname{tg}\dfrac{\omega}{2} = t$ transforme le second membre en une différentielle rationnelle que l'on sait intégrer dans tous les cas. Mais le cas de la parabole est beaucoup plus simple; car alors $e = 1$ et l'équation devient

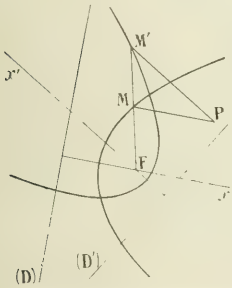
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin\dfrac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\alpha\cos\dfrac{\omega}{2}}{\cos\dfrac{\omega}{2} + \operatorname{tg}\alpha\sin\dfrac{\omega}{2}}\,d\omega, \qquad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right)d\omega.$$

Elle s'intègre alors immédiatement et donne

$$\rho = \frac{C}{\cos^2\left(\dfrac{\omega}{2} - \alpha\right)} = \frac{2C}{1 + \cos(\omega - 2\alpha)}.$$

Les courbes intégrales sont des paraboles qui ont le pôle pour foyer.

Il est facile d'expliquer ce résultat. En effet, considérons deux paraboles ayant leurs foyers confondus et dont les axes font l'angle 2α; nous allons montrer que les tangentes en deux points situés sur une droite qui passe au foyer font entre elles un angle fixe égal à α. Soient Fx, Fx' les axes, (D) et (D') les directrices et FMM' une droite qui passe au foyer commun; menons par les points M et M' des parallèles aux axes, MP et M'P; la tangente en M est bissectrice de l'angle PMM'; la tangente en M', bissectrice de l'angle en PM'M et ces deux bissectrices font entre elles l'angle $\dfrac{\widehat{M} + \widehat{M'}}{2}$; $\widehat{M} + \widehat{M'} = \widehat{P}$; donc l'angle des tangentes est égal à $\dfrac{P}{2}$ ou à $\dfrac{2\alpha}{2}$ ou à α.



Bonnes solutions : MM. Deperrois, à Evreux; G. Lach, et A. Rousseau; M. Roux, à Chalon-sur-Saône; A. Courtois; R. Chirol, à Moulins.

Mécanique.

2064. — *Un point* M *décrit une ellipse avec une accélération totale dirigée constamment vers l'un des foyers,* F. *Connaissant les longueurs des axes de cette ellipse ainsi que le temps employé à la parcourir, calculer la vitesse de* M *en fonction de l'angle* θ *que forme le rayon vecteur* FM *avec le grand axe. Démontrer que cette vitesse peut être regardée comme la résultante de deux vitesses constantes, dont l'une est perpendiculaire à* FM *tandis que l'autre est parallèle au petit axe. Déduire de là la forme de l'hodographe et la grandeur de l'accélération totale.*

Prenons pour pôle le foyer de l'ellipse et pour axe polaire l'axe focal dirigé du foyer vers le sommet le plus voisin. L'équation de l'ellipse est alors

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

p étant égal à $\frac{b^2}{a}$ et e à $\frac{c}{a}$.

D'autre part, l'accélération est centrale, le mouvement a lieu suivant la loi des aires, et nous avons

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C;$$

C est le double de la vitesse aréolaire, c'est donc $\frac{2\pi ab}{T}$, T étant la durée de la révolution du point M sur son orbite.

Les composantes de la vitesse sur le rayon vecteur et sur l'axe perpendiculaire sont

$$v_R = \frac{dr}{dt} \qquad \text{et} \qquad v_\nu = r\frac{d\theta}{dt};$$

or

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta};$$

en outre $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e\cos\theta}{p}$ et $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{p}$; nous avons donc

$$v_R = \frac{Ce}{p}\sin\theta.$$

Plus simplement encore,

$$v_\nu = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r} = \frac{C(1 + e\cos\theta)}{p}.$$

La vitesse du mobile a donc pour valeur

$$v = \frac{C}{p}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\theta}.$$

Cette vitesse est maximum pour $\theta = 0$, minimum pour $\theta = \pi$, et ses variations sont évidentes : elle décroît constamment quand le point passe du sommet le plus voisin à l'autre sommet.

Soient maintenant v_1 et v_2 les composantes de la vitesse suivant le petit axe et la perpendiculaire au rayon vecteur. La somme des projections de v_1 et v_2 sur l'axe de direction θ et celle sur l'axe de direction $\theta + \frac{\pi}{2}$ sont égales à v_R et à v_ν ; nous avons donc

$$v_1 \sin\theta = v_R = \frac{Ce}{p}\sin\theta,$$

$$v_1\cos\theta + v_2 = v_\nu = \frac{C}{p}(1 + e\cos\theta);$$

et ceci nous donne immédiatement $v_1 = \frac{Ce}{p}$, $v_2 = \frac{C}{p}$. Les deux composantes v_1 et v_2 ont des valeurs constantes.

Pour obtenir l'hodographe, nous portons à partir du point O, bout à bout les deux vecteurs v_1 et v_2 à la suite l'un de l'autre. L'extrémité du vecteur v_1 donne d'abord un point C de l'axe Oy, et l'extrémité, P, du vecteur v_2, porté à la suite, dans la direction $\theta + \frac{\pi}{2}$ décrit un cercle de centre C et de rayon $\frac{C}{p}$. La vitesse du point P est tangente à ce cercle, orientée dans le sens $\theta + \frac{\pi}{2}$ et égale à $CP.\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{p}\frac{d\theta}{dt}$. C'est la valeur

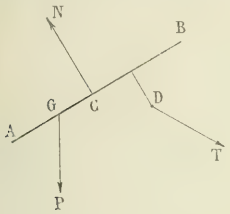
de l'accélération. Cette accélération, γ, est donc égale à $\frac{C}{p}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C^2}{pr^2}$, et, par rapport à la direction initiale θ, elle est négative.

Nous avons donc

$$\gamma = -\frac{C^2}{pr^2} = -\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2\,\frac{b^2}{a}}\,\frac{1}{r^2} = -\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\,\frac{1}{r^2}.$$

Très bonnes solutions : MM. R. Dontot ; Deperrois, à Evreux ; R. Chirol, à Moulins.
Assez bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; A. Courtois ; M. Ullmann ; Marencalchi.

2065. — *On considère un cerf-volant constitué par une surface plane ayant un axe de symétrie* AB *situé dans le plan de la figure. Ce cerf-volant est soumis à l'action de trois forces, savoir : son poids, connu,* P, *appliqué au centre de gravité* G ; *la pression* N *du vent, appliquée normalement à* AB *en un point* C, *enfin la traction* T *du fil, attaché en un point* D *qui est relié invariablement à* AB. *On donne les trois points* G, C, D *placés comme l'indique la figure, et l'on admet :*



1° *Que la pression* N *est représentée par l'expression* $N = Kv^2 \sin i$, *où* K *désigne une constante donnée,* v *la vitesse du vent (supposé horizontal), et* i, *l'angle d'inclinaison de* AB *sur l'horizontale ;*

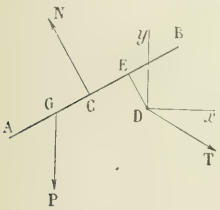
2° *Que le fil, de poids négligeable, est sensiblement rectiligne et dirigé suivant* T ;

3° *Que le cerf-volant demeure immobile.*

Calculer, en fonction de v, *l'inclinaison* i *de* AB, *la traction* T *exercée par le fil et l'inclinaison* θ *de ce fil sur l'horizontale.*

Dire quelle est la limite au-dessous de laquelle v *ne peut descendre sans que le cerf-volant cesse de se tenir en l'air.*

Nous prendrons le point D pour origine des coordonnées, et, pour axe des x, l'horizontale de ce point, orientée dans un sens tel que l'angle de cette direction avec l'axe de symétrie AB du cerf-volant soit aigu et positif et que l'angle formé avec le fil soit aigu et négatif ; l'axe des y est la verticale ascendante. Quand il y a équilibre, tout cela est réalisable et tous les éléments indiqués sur la figure sont dans un même plan vertical.



Il y a trois équations d'équilibre, que l'on obtient en projetant les forces sur Ox, sur Oy et en prenant la somme de leurs moments par rapport au point D.

Nous avons ainsi

$$T\cos\theta - N\sin i = 0,$$
$$N\cos i - P + T\sin\theta = 0,$$
$$M^tP + M^tN = 0\,;$$

désignons DE par a, EC par b et EG par c, la troisième équation deviendra

$$(a\sin i + c\cos i)P - bN = 0.$$

Comme $N = Kv^2\sin i$, elle donne

$$\operatorname{tg} i = \frac{cP}{Kbv^2 - aP}.$$

Une première condition est que $\operatorname{tg} i$ soit positif, c'est-à-dire $v^2 > \frac{aP}{Kb}$.

Les deux premières équations donnent alors T et θ :

$$T^2 = N^2 + P^2 - 2NP\cos i,$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P - N\cos i}{N\sin i}$$

Il faut, dans ces formules, remplacer $\operatorname{tg} i$ par sa valeur, puis exprimer que $\operatorname{tg}\theta$ est négatif. Nous avons $N = Kv^2 \sin i$.

$$T^2 = P^2 + K^2v^4 \sin^2 i - 2KPv^2 \sin i \cos i.$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P - Kv^2 \sin i \cos i}{Kv^2 \sin^2 i}.$$

Ces deux formules s'expriment alors directement à l'aide de $\operatorname{tg} i$, ou, mieux, en fonction homogène et du second degré de $\sin i$ et $\cos i$, haut et bas :

$$T^2 = \frac{(P^2 + K^2v^4)\sin^2 i - 2KPv^2 \sin i \cos i + P^2 \cos^2 i}{\cos^2 i + \sin^2 i},$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P(\sin^2 i + \cos^2 i) - Kv^2 \sin i \cos i}{Kv^2 \sin^2 i}.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer $\sin i$ par cP et $\cos i$ par $Kbv^2 - aP$; nous avons ainsi les valeurs de T et de $\operatorname{tg}\theta$ en fonction des éléments de l'appareil et de la vitesse du vent. T^2 prend ainsi une valeur positive finie, parfaitement déterminée qui n'appelle aucune remarque particulière. Quant à $\operatorname{tg}\theta$, elle doit prendre une valeur négative ; cette valeur est

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P[c^2P^2 + (Kbv^2 - aP)^2] - Kcv^2P[Kbv^2 - aP]}{Kc^2v^2P^2}.$$

ou

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{K^2(b^2 - bc)v^4 - KP(ac - 2ab)v^2 + (a^2 + c^2)P^2}{Kc^2v^2P}.$$

Le dénominateur de $\operatorname{tg}\theta$ est positif, le numérateur est un trinome en v^2 dont le premier coefficient $K(b^2 - bc)$ est négatif, car b est plus petit que c. Les deux racines de ce trinome en v^2 sont l'une, positive, et l'autre, négative. Pour qu'il soit négatif, il faut donc que v^2 soit plus grand que la racine positive. Or, il est facile de voir que pour $v^2 = \frac{aP}{Kb}$, le trinome est positif ; donc ce nombre est plus petit que la racine positive du trinome et la limite inférieure de v^2 est bien cette racine :

$$v_1^2 = \frac{ac - 2ab + c\sqrt{a^2 - 4b^2 + 4bc}}{c - b}\,\frac{P}{2Kb}.$$

Le résultat de la substitution à v^2 du nombre $\frac{aP}{Kb}$ est P^2c^2. L'unique condition est donc bien

$$v^2 > v_1^2.$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; G. Bailleul, à Houplines.

2066. — *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés :*

$$a = 401^m,456, \qquad b = 328^m,233, \qquad c = 297^m,315$$

Calculer les angles et la surface.

Données : $a = 401,456$, $b = 328,233$, $c = 297,315$.

Résultats : $A = 88^\circ,5328$, $B = 59^\circ,50$, $C = 51^\circ,9674$, $S = 48005^{m^2},5$

Formules : $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}$;

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr.$$

Calculs auxiliaires.

$2p = 1\,027{,}004$
$p = 513{,}502$
$p - a = 112{,}046$
$p - b = 185{,}269$
$p - c = 216{,}187$

$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) + \operatorname{colog} p\right]$$

$\log(p-a)$

log 1120	=	04922	Δ = 39.
pour 4		15,6	
» 6		2,3	
log 112,046	=	2,04940	

$\log(p-b)$

log 1852	=	26764	Δ = 24
pour 6		14,4	
» 9		2,16	
log 185,269	=	2,26781	

$\log(p-c)$

log 2161		33465	Δ = 24
pour 8		16,8	
» 7		1,4	
log 216,187	=	2,33483	

$\operatorname{colog} p$

log 5135	=	71054	Δ = 9
pour 02		0,18	
log 513,502	=	2,71054	
colog 513,502	=	$\bar{3}$,28946	

$\log r$

2,04940
2,26781
2,33483
$\bar{3}$,28946

$\log 2r = 3{,}94150$

$\log r = 1{,}97075$

Calculs définitifs.

Calcul de A.

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \log r + \operatorname{colog}(p-a)$$

$\log r = 1{,}97075$
$\operatorname{colog}(p-a) = \bar{3}{,}95060$

$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1{,}92135$

log 44,267		$\bar{1}$,92126	Δ = 94
pour 6		8,4	
» 04		0,6	
log 44,267,67	=	$\bar{1}$,92135	

A = 88°,53',28

Calcul de B.

$\log r = 1{,}97075$
$\operatorname{colog}(p-b) = \bar{3}{,}73249$

$\log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}70294$

$\log 297{,}75' = \bar{1}{,}70294$
B = 595,50

Calcul de C.

$\log r = 1{,}97075$
$\operatorname{colog}(p-c) = \bar{3}{,}66517$

$\bar{1}{,}63592$

log 23,98		$\bar{1}$,63585	Δ = 19
pour 3		5,7	
» 7		1,3	

$\frac{C}{2} = 25{,}9837$

C = 51°,9674

Calcul de S.

$\log p = 2{,}71054$
$\log r = 1{,}97075$

$\log S = 4{,}69129$

log 48000	=	4,68124	Δ = 9
pour 5	=	4,5	
» 5		0,45	
log 48005,5	=	4,68129	

A. COURTOIS, 147e d'Infanterie, à Sedan.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; P. Remondin, à Lérouville ; G. Baillieul, à Houplines.

Physique.

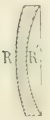
2067. — *On considère le système optique constitué par une lentille mince plan-convexe dont la face plane est argentée.*

1° Calculer le rayon qu'il faut donner à la face courbe de la lentille pour que ce système soit équivalent à un miroir concave de 1m de rayon (indice du verre : 1,53).

2° Construire l'image d'un point dans ce système optique.

3° Y a-t-il quelque chose de changé au point de vue optique, si l'argenture n'adhère

pas bien au verre et laisse ainsi entre la lentille et le miroir une lame d'air extrêmement mince ?



4° On se propose d'achromatiser le système pour deux radiations données, l'une rouge et l'autre violette. L'on accole à cet effet à la lentille plan-convexe en crown une lentille divergente en flint. Calculer les rayons de courbure R *et* R' *des deux lentilles supposées minces, sachant que les indices de la radiation rouge sont de* 1,52 *dans le crown et* 1,63 *dans le flint et que ceux de la radiation violette sont de* 1,54 *dans le crown et* 1,67 *dans le flint.*

1. Si r et r' désignent les rayons de courbure des deux faces, on a, en appliquant successivement la formule des dioptres et celle des miroirs,

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p_2} = \frac{1-n}{r}, \qquad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{r'}, \qquad \frac{1}{p'} - \frac{n}{p_1} = \frac{1-n}{r},$$

d'où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2n}{r'} - \frac{2(n-1)}{r},$$

équation qu'on peut identifier avec celle d'un miroir de rayon ρ,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{\rho},$$

en posant

$$\frac{n}{r'} - \frac{n-1}{r} = \frac{1}{\rho}.$$

Pour $r' = \infty$, $\rho = 1^m$ et $n = 1,53$, il vient

$$-r = 0^m,53.$$

2. La construction est ramenée à la construction de l'image d'un point dans un miroir.

3. Il n'y a rien de changé si l'argenture n'adhère pas bien au verre car, dans ce cas, un rayon réfléchi sur l'argenture fait dans le verre, à l'incidence et après réflexion, des angles égaux avec la normale comme s'il s'était réfléchi sur la face de la lentille. Si, au lieu de ne considérer que des rayons quasi-normaux, on considérait des incidences quelconques, il pourrait se produire sur l'air une réflexion totale qui ne laisserait pas la lumière arriver jusqu'à l'argenture ; mais, même dans ce cas, il n'y aurait rien de changé à la direction des rayons réfléchis.

4. Pour exprimer la condition d'achromatisme, on peut calculer la distance focale du miroir équivalent au système, ce qui donne

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n'-1)}{R} - \frac{2(n'-n)}{R'},$$

et écrire que cette distance focale a la même valeur pour le rouge et pour le violet. On a ainsi

$$\frac{0,63}{R} - \frac{0,11}{R'} = \frac{0,67}{R} - \frac{0,13}{R'},$$

d'où

$$R = 2R'.$$

On peut encore, ce qui est plus simple, écrire que le système non argenté est achromatique par réfraction, car la réflexion n'introduit pas d'aberration chromatique. Alors la condition connue $\Delta n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) + \Delta n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) = 0$ devient ici

$$0,04\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + 0,02\left(-\frac{1}{R}\right) = 0$$

et donne encore, bien entendu,

$$R = 2R'.$$

Si le système doit toujours être équivalent à un miroir concave d'un mètre de rayon, l'expression de la distance focale est nécessaire et donne

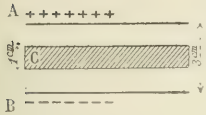
$$\frac{0,63}{R} - \frac{0,11}{R'} = 1.$$

Les deux rayons de courbure sont alors

$$R = 0^m,41 \qquad \text{et} \qquad R' = 0^m,205.$$

Solution partielle de M. Marcel Ullmann.

2068. — *Entre les deux armatures* A *et* B *d'un condensateur plan chargé et parallèlement à celles-ci, on glisse un plateau métallique* C. *Ce plateau est isolé et non chargé ; il a les mêmes dimensions que les armatures.*



Le plateau C, *une fois complètement introduit entre* A *et* B, *est-il soumis à une force tendant à le déplacer ; l'est-il pendant son introduction ?*

La force d'attraction, qui s'exerce entre A *et* B, *est-elle modifiée par l'introduction de* C *et dans quelle proportion .*

1° *Si l'on suppose que* A *et* B *restent chacun isolé pendant l'introduction de* C ?

2° *Si l'on suppose que l'on maintient entre* A *et* B *une différence de potentiel constante ?*

Le condensateur plan est supposé assez grand pour que la perturbation du champ électrique sur les bords puisse être négligée.

Distance de A *et* B : 3^{cm}. *Épaisseur de* C : 1^{cm}.

Quand le plateau C est mis en place, la densité électrique est la même, en valeur absolue, sur une armature et sur la face de C qui lui fait vis-à-vis, en vertu de la propriété des éléments correspondants. Elle est aussi la même sur chaque face de C, parce que le plateau était isolé et non chargé. Donc toutes les pressions électrostatiques sont égales ; en particulier, sur les deux faces du plateau C, elles se font équilibre et il n'y a pas de force tendant à déplacer ce plateau.

Pendant l'introduction du plateau, il y a sur sa tranche un peu d'électricité positive d'un côté, d'électricité négative de l'autre, par conséquent des pressions électrostatiques qui ont des composantes parallèles aux armatures et qui attirent le plateau à l'intérieur de celles-ci.

La force d'attraction qui s'exerce entre A et B est mesurée, par unité de surface, par la pression électrostatique $2\pi\mu^2$, μ désignant la densité électrique superficielle.

1. Si A et B sont restés isolés pendant l'introduction de C, la densité électrique n'a pas pu changer, non plus par conséquent que l'attraction en question.

2. Si A et B présentent une différence de potentiel constante, cette chute de potentiel se produisant dans un intervalle qui a varié dans le rapport de 3 à 2, le champ $4\pi\mu$ et, par conséquent, la densité ont varié dans le rapport de 2 à 3. La pression électrostatique et, par conséquent, l'attraction ont donc varié dans le rapport de 4 à 9.

Chimie.

2069. — *Un appareil de grillage peut être alimenté soit avec du soufre, soit avec de la pyrite de fer* (FeS^2), *soit avec de la blende* (ZnS). *On règle la quantité d'air admise dans l'appareil de manière que les gaz résultant du grillage contiennent* 5 % *d'oxygène.*

On admettra que le grillage des sulfures métalliques ne laisse comme résidu que des oxydes.

On demande de donner dans les différents cas la composition centésimale en volume des gaz obtenus.

Nota. — Pour simplifier les calculs, on admettra que l'air renferme en chiffres ronds 20 % *d'oxygène.*

Premier cas. — Le grillage du soufre est représenté par

$$S + O^2 = SO^2.$$

Soient, pour 100 volumes de gaz,

5 le volume de l'oxygène,
x celui du gaz sulfureux,
$95 - x$ celui de l'azote.

A 5 volumes d'oxygène correspondent 20 d'azote ; à x de gaz sulfureux correspondent x d'oxygène et, par conséquent, $4x$ d'azote, donc

$$95 - x = 20 + 4x, \quad \text{d'où} \quad x = 15.$$

La composition des gaz obtenus est donc :

Oxygène	5,
Gaz sulfureux	15,
Azote	80.

Deuxième cas. — Le grillage de la pyrite est représenté par

$$2FeS^2 + 11\,O = Fe^2O^3 + 4\,SO^2.$$

Au volume x de gaz sulfureux correspond un volume x d'oxygène dans le gaz sulfureux et un volume $\frac{3}{8}x$ d'oxygène resté combiné au fer, en tout $\frac{11}{8}x$ d'oxygène et, par conséquent, quatre fois plus, soit $\frac{11}{2}x$ d'azote. Donc

$$95 - x = 20 + \frac{11}{2}x, \quad \text{d'où} \quad x = 11{,}5.$$

Composition du mélange :

Oxygène	5,
Gaz sulfureux	11,5,
Azote	83,5.

Troisième cas. — Le grillage de la blende est représenté par

$$ZnS + 3O = ZnO + SO^2.$$

Dans ce cas, à un volume x de gaz sulfureux, correspond un volume $\frac{3}{2}x$ d'oxygène et $6x$ d'azote.

$$95 - x = 20 + 6x, \quad \text{d'où} \quad x = 10{,}7.$$

Composition cherchée :

Oxygène	5,
Gaz sulfureux	10,7,
Azote	84,3.

Assez bonne solution de M. Raymond Chirol, à Moulins.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2070. — *On donne une sphère de 48^{mm} de rayon ; les projections de son centre sont sur le grand axe de la feuille, symétriques par rapport au petit axe, et situées à 10^{cm} de ce petit axe.*

1° *Circonscrire à cette sphère un hyperboloïde de révolution ayant même centre que la sphère, dont l'axe est de front, incliné à 30° sur le plan horizontal, et sur lequel on s'élève de gauche à droite. Les génératrices rectilignes font 30° avec l'axe.*

2° *Circonscrire à la même sphère un paraboloïde de révolution ayant son axe de bout, son sommet en avant de la sphère, et sachant que la distance de son sommet à son foyer vaut 8^{mm}.*

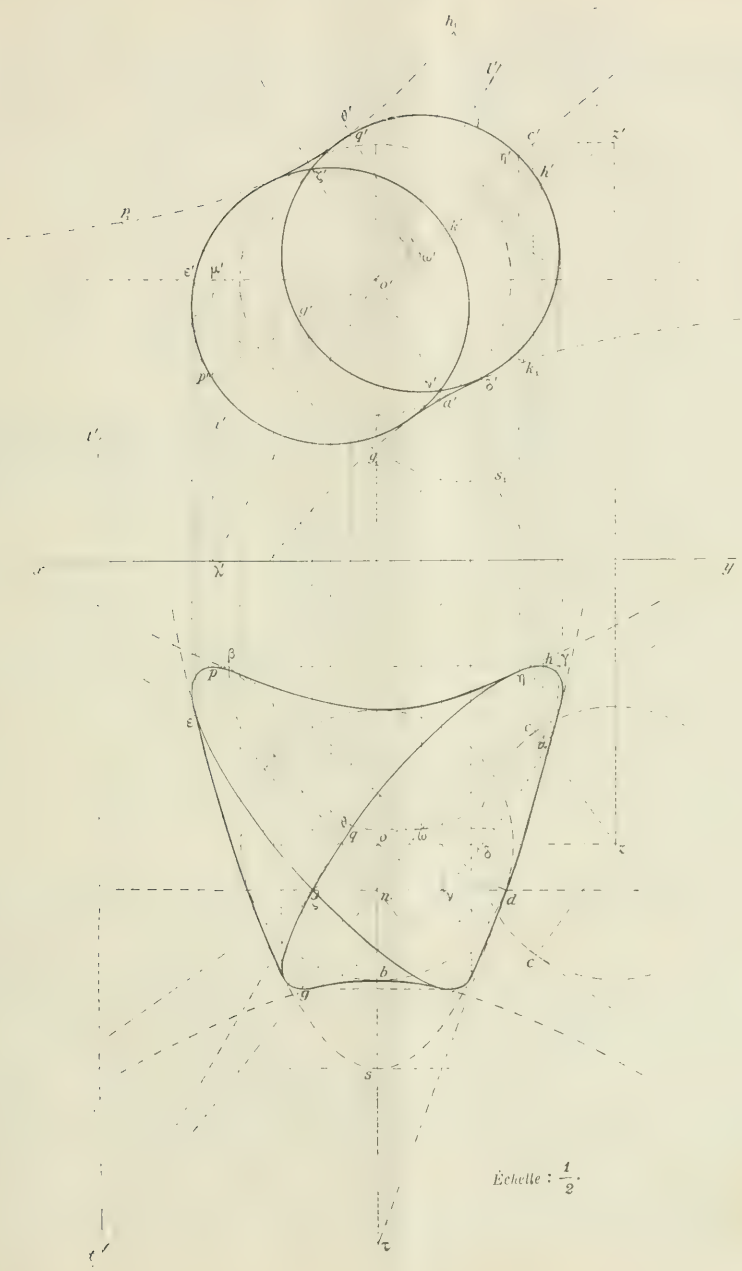
3° *Construire l'intersection des deux surfaces. Déterminer les axes, les sommets, les points doubles avec les tangentes, et les points sur les contours apparents.*

4° *Représenter le solide commun. Dessiner en noir les lignes de contour apparent et d'intersection, en rouge les lignes de construction.*

5° *Calculer les distances, au centre de la sphère, des deux plans de front bitangents à l'intersection.*

Donner sur une feuille à part le détail du calcul et une explication sommaire de l'épure.

(*École normale supérieure et Bourses de licence, 1912.*)


Échelle : $\frac{1}{2}$.

On construit d'abord l'hyperbole méridienne qui donne le contour apparent vertical de la première surface, et dont on connaît l'axe non transverse $o'z'$, les asymptotes dont l'angle avec $o'z'$ est 30°, et la longueur du demi-axe transverse $o'a' = 48^{mm}$. Le contour apparent horizontal est la projection de l'hyperbole section de la surface par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. Or ce plan est de bout, passe par le centre o' de la surface et par le milieu i' d'une corde quelconque $\lambda'\mu'$ verticale, limitée aux deux asymptotes de la méridienne de front; on a donc sa trace verticale $i'o'$. L'hyperbole projection horizontale a le même demi-axe transverse ob que la première, mais ses asymptotes sont les projections des génératrices du cône asymptote situées dans le plan $o'i'$ et nous les obtenons en inscrivant dans ce cône asymptote la sphère $z'z$ et en menant par le point o les tangentes à son contour apparent horizontal. On peut donc tracer par points l'hyperbole dont on a les asymptotes oc et le demi-axe transverse ob.

Le paraboloïde a pour contour apparent horizontal la parabole méridienne dont l'axe est de bout; nous connaissons la longueur de la sous-normale, 16^{mm}, double de la distance donnée du foyer au sommet, en sorte qu'il suffit de porter cette longueur à partir du centre o de la sphère inscrite, vers le sommet, en on, pour obtenir le pied de l'ordonnée du point d'incidence de la normale qui passe en o. Ce point est donc l'intersection d de la circonférence inscrite à la parabole avec l'ordonnée nd. On en déduit la sous-tangente $n\tau$ et par suite le sommet s au milieu de la sous-tangente. On peut alors construire la parabole par points puisque l'on connaît le sommet et le foyer.

Intersection des deux surfaces. — Les deux surfaces étant circonscrites à la même sphère, se coupent suivant deux courbes planes, et les plans de ces courbes passent par la droite d'intersection des plans des deux courbes de contact de la sphère avec chaque surface ; cette droite est une ligne de front dont les projections sont nd et $o'a'$. Nous sommes donc ramené à construire les sections de l'une quelconque des deux surfaces par ces plans. On sait que toute section plane d'un paraboloïde de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un cercle. Nous aurons donc en projection verticale deux cercles se coupant sur la droite $o'a'$ qui est un axe de symétrie de l'intersection des deux surfaces pour cette projection.

On peut obtenir immédiatement ces deux cercles en prenant un plan de projection auxiliaire passant par les axes des deux surfaces : le nouveau contour apparent horizontal de l'hyperboloïde coïncide avec l'hyperbole méridienne et il suffit de construire une parabole égale à la première, de sommet s_1 et d'axe s_1o'. Les deux courbes se coupent en quatre points qui nous donnent les traces g_1h_1 et k_1p_1 des plans de section sur le nouveau plan horizontal, et on en déduit les deux diamètres $g'h'$ et $p'k'$ des cercles cherchés.

Connaissant la projection verticale de chaque ellipse, on en peut déduire la projection horizontale en construisant deux diamètres conjugués. Ainsi les deux rayons rectangulaires $\omega'h'$ et $\omega'q'$ de la projection verticale donneront les demi-diamètres conjugués ωh et ωq. Nous en déduirons les deux axes de l'ellipse par la construction bien connue : au point h nous avons mené une perpendiculaire à la tangente hp et nous avons porté la longueur $h\alpha = \omega q$, puis nous avons fait passer une demi-circonférence par les points α et ω et dont le centre soit sur hp; les extrémités γ et β du diamètre de cette circonférence ont déterminé les directions $\omega\gamma$ et $\omega\beta$ des axes de l'ellipse. Il suffit, pour avoir les sommets eux-mêmes, de tracer la projection verticale de chaque axe et de prendre ses points d'intersection avec la circonférence, puis de rappeler ces points sur la projection horizontale.

Points remarquables. — Les points sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde sont à l'intersection de l'hyperbole méridienne avec la frontale du plan de chaque ellipse qui a le même éloignement que le centre de la surface et correspondent aux points tels que ξ où l'ellipse projection horizontale coupe la projection horizontale oz de l'axe.

Les points sur le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde sont les projections des points tels que η' où le cercle projection verticale de l'ellipse coupe le plan diamétral $o'c'$ conjugué des cordes verticales de la surface. Les points sur le contour apparent horizontal du paraboloïde sont les projections horizontales des points tels que ε' où le cercle traverse le plan horizontal qui contient la méridienne.

Nous avons déjà déterminé les points doubles dans l'espace (ζ, ζ') et (ν, ν'), mais on peut remarquer qu'il y a en projection horizontale deux autres points doubles sur l'axe du paraboloïde, qui est l'intersection des deux plans de bout conjugués des cordes verticales dans les deux surfaces. Les tangentes en chacun des points doubles, tels que ζ, s'obtiennent en projetant simplement les tangentes à la projection verticale au point correspondant. Par exemple, il suffit de prendre l'intersection t' ou θ' de la tangente en ζ' au cercle ω' avec l'un des diamètres qui donnent les diamètres conjugués de la projection horizontale, pour obtenir la tangente $t\theta$.

Solide commun. — Le solide commun est limité en projection verticale par les deux cercles et les arcs d'hyperbole allant d'un point de contact à l'autre, les circonférences sont entièrement vues puisque toute la

surface du paraboloïde est vue en projection verticale et que la portion d'hyperboloïde conservée est entièrement projetée dans l'angle curviligne $g'\zeta'k'$. En projection horizontale, le point ζ étant vu sur les deux surfaces, on en déduit aussitôt les parties vues de l'intersection et on limite le contour apparent de chaque surface à ses points de contact avec chaque ellipse. Cette détermination n'offre aucune difficulté.

Calcul des distances. — L'équation du paraboloïde est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 48^2 - (y - 16)^2 = 0;$$

celle de l'hyperboloïde est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 48^2 - \frac{1}{3}(z + x\sqrt{3})^2 = 0.$$

Les plans des courbes de contact s'obtiennent en retranchant :

$$(y - 16)^2 - \frac{1}{3}(z + x\sqrt{3})^2 = 0,$$

$$y - 16 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(z + x\sqrt{3}).$$

Prenons par exemple le plan

$$z = \sqrt{3}(-x + y - 16).$$

Il coupe les deux surfaces suivant la même conique dont la projection sur le plan des xy a pour équation

$$x^2 + y^2 + 3(-x + y - 16)^2 - 48^2 - (y - 16)^2 = 0.$$

L'autre donnerait une conique symétrique de celle-ci par rapport à Oy, en sorte qu'elles ont les mêmes tangentes parallèles à Ox. Pour avoir les ordonnées de ces tangentes, on peut couper les coniques par le diamètre conjugué de Ox, mais on peut aussi mettre en évidence le diamètre en décomposant en carrés le premier membre de l'équation de la conique.

Il peut d'abord s'écrire

$$4x^2 - 6xy + 3y^2 + 6.16x - 4.16y - 7.16^2 = 0$$

ou

$$\left[2x - \frac{3y}{2} + \frac{3}{2}\cdot 16\right]^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{16}{2}y - \frac{37}{4}\cdot 16^2 = 0.$$

La conique est donc bitangente aux deux droites

$$3y^2 + 32y - 37.16^2 = 0,$$

ou

$$\begin{cases} y = 51{,}10, \\ y = 61{,}77, \end{cases}$$

qui donnent en millimètres les distances demandées.

CONCOURS DE 1913

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

2155. — On considère la fonction θ de x définie par la relation $\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{x}{1 + \theta x^2}$ où le premier membre représente un arc compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$.

1° Déterminer les valeurs limites de θ pour $x = \pm\infty$ et $x = 0$.

2° Suivre les variations de la fonction $\theta(x)$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Dans cette fonction $\theta(x)$, on remplace x par n^p, n étant un entier variable et p un nombre positif donné ; on considère la série dont le terme de rang n a pour valeur $\theta(n^p)$. Pour quelles valeurs de p la série est-elle convergente ?

4° Calculer $\displaystyle\int_a^x \frac{x}{1 + x^2}\cdot\theta(x).dx$. Etudier la variation de cette intégrale quand a augmente de $-\infty$ à $+\infty$.

5° Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{x} \frac{x}{1 + x^2}\cdot\theta(x).dx$.

(2 juin, de 7 h. à 11 h.)

Géométrie analytique et Mécanique.

2156. — Dans le plan xOy du trièdre des coordonnées $Oxyz$, on donne le cercle de rayon r, tangent à Oy au point O, du côté de Ox; sur la circonférence, les points A et B situés à la distance r du point O.

I. — Un point quelconque P de la circonférence est la projection d'un point M dont la cote est $z = PA + PB$.

1° Calculer les coordonnées x, y, z du point M en fonction de l'angle polaire $POx = \omega$ du point P.

2° Le lieu du point M est une courbe Γ. En construire les projections sur les plans xOz, yOz.

II. — Soit C le point d'abscisse $-r$ pris sur le prolongement de Ox; A, B, C sont les points d'appui sur le plan horizontal, supposé rigide, de trois pieds sphériques identiques fixés aux trois sommets d'une lame triangulaire homogène.

Sous l'action d'efforts horizontaux, la lame se met à tourner autour d'un certain axe vertical dont la trace I sur le plan xOy a pour coordonnées polaires ρ et ω.

1° Exprimer que la résultante des réactions de frottement du plan sur la lame est perpendiculaire à OI. (On désignera par a, b, c les longueurs IA, IB, IC; par α, β, γ les coefficients de frottement, supposés différents aux trois points A, B, C.)

2° On suppose $\alpha = \beta$, γ étant rendu négligeable au moyen d'un lubrifiant. Former l'équation polaire du lieu des points I définis par la condition précédente. Etudier ce lieu.

3° Comment varie, avec la position du point I, le moment résultant des réactions de frottement par rapport à la verticale du point I?

N. B. — Il est bien entendu que :

Le trièdre $Oxyz$ est trirectangle;

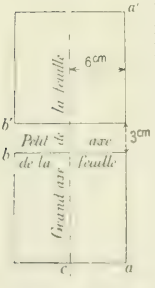
Les sommets de la lame triangulaire sont aux centres de ses trois pieds sphériques, et le tout constitue un solide indéformable;

Dans la question 3°, on n'envisage que les points I du lieu 2°.

(3 juin, de 7 h. à 11 h.)

Epure de Géométrie descriptive.

2157. — Un cube de 12 cm. d'arête a une face horizontale et une face de front. Une sphère S a pour grand cercle le cercle inscrit dans la face antérieure du cube. Un hyperboloïde de révolution H a pour axe la droite qui joint les sommets (a, a') et (b, b') du cube et, pour l'une de ses génératrices, la médiane verticale de la face antérieure du cube, médiane projetée horizontalement au point c.



Figurer en traits mixtes les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde qui sont situées sur les faces du cube, en rouge celles qui sont du même système que la génératrice donnée, en bleu celles de l'autre système. On limitera les traits mixtes aux arêtes du cube.

Représenter par ses projections le solide, supposé opaque, obtenu en supprimant de la sphère S la partie contenue à l'intérieur de l'hyperboloïde H, l'intérieur étant la région qui contient le centre de cette surface.

On se conformera, pour la mise en place, au croquis joint à l'énoncé.

(1 juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul.

2158. — 1° Calculer une table des valeurs de 10^{-t^2} pour des valeurs de t croissant de 0 à 1 par échelons de 0,1.

2° De cette première table, en déduire une deuxième qui donne les valeurs approchées de l'intégrale $u = \int_0^t 10^{-t^2} dt$, pour des valeurs de t croissant de 0 à 1 par échelons de 0,1.

3° Comment et dans quelles limites la deuxième table peut-elle servir à étudier la fonction de la variable x définie par la formule $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$? ($e = 2,718\ldots$).

4° En particulier, calculer la valeur de x qui correspond à $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ($\pi = 3,14\ldots$).

(Tables de logarithmes et règle à calcul à volonté.)

(7 juin, de 17 h. à 18 h.)

Physique.

I. — Définition expérimentale et procédés de mesure de la tension superficielle.

II. — **2159.** Un condensateur sphérique est donné. Le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique est 1,

dans le condensateur comme à l'extérieur. L'armature intérieure est une sphère, S_1 de rayon R_1; l'armature extérieure est une couche sphérique concentrique dont la surface intérieure S_2 et la surface extérieure S_3 ont pour rayons R_2 et R_3.

Charge : On met au potentiel de la terre, pris pour zéro, l'armature intérieure ; au potentiel V, l'armature extérieure supposée à distance très grande de tous les autres corps qui peuvent se trouver dans le diélectrique. Trouver, dans le système électrostatique C.G.S., les expressions des charges q_1, q_2, q_3 sur les surfaces S_1, S_2, S_3 et de l'énergie électrique totale W du système.

Décharge : Le condensateur étant ainsi chargé, l'armature extérieure est isolée de la source au potentiel V. Etudier la dissipation des charges et de l'énergie, dans les trois cas de décharge suivants :

1. L'armature intérieure étant isolée de la terre, on la réunit à l'armature extérieure par une résistance ;

2. L'armature intérieure étant isolée de la terre, on réunit l'armature extérieure à la terre par une résistance ;

3. L'armature intérieure restant liée à la terre par une résistance, on réunit l'armature extérieure à la terre par une autre résistance.

Application numérique : Calculer, dans le premier cas, la masse de glace dont la fusion pourrait être obtenue par la décharge, en adoptant les données suivantes :

$R_1 = 100^{cm}$. $V = 100$ unités électrostatiques C.G.S.
$R_2 = 102^{cm}$. Equivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules.
$R_3 = 104^{cm}$. Chaleur de fusion d'un gramme de glace : 80 calories.

(2 juin, de 14 h. à 17 h.)

Chimie.

I. — Analogies et différences des hydracides fournis par les métalloïdes de la famille du chlore.

II. — **2160**. (*a*) Un mélange gazeux est formé d'azote, d'ammoniac et de phosphure d'hydrogène :

1° Par quelles réactions peut-on démontrer la présence de ces trois gaz dans le mélange ?

2° Parmi ces réactions, quelles sont celles qui permettent de déterminer le plus simplement les proportions en volumes des trois gaz du mélange ?

(*b*) Ces proportions se trouvant être 0,25 d'azote ; 0,25 d'ammoniac ; 0,50 de phosphure d'hydrogène, on prend dans le mélange une masse qui, à 0° et 760^{mm}, occuperait un volume de 10 litres. On la fait passer sur une longue colonne de tournure de cuivre chauffée au rouge ; les gaz résultant de la réaction passent ensuite sur du calcium en excès, pesant 50g, contenu dans un tube de verre, et chauffé de façon à fixer tous les gaz de la réaction :

1° Quelles sont les réactions qui se produisent dans les deux opérations ?

2° Les réactions étant supposées totales, quelles sont les augmentations de poids du cuivre et du calcium ?

(*c*) Le tube de calcium, scellé à la fin de l'opération, est brisé au fond d'un récipient contenant 3 litres d'une solution d'un acide monobasique à une molécule-gramme par litre :

1° Quelles sont les réactions qui se produisent ?

2° Quel est le volume du gaz dégagé, supposé sec, à 0° et 760^{mm} ?

3° On considère 100^{cm3} de la liqueur acide provenant de la réaction. Pour neutraliser cette liqueur par une solution de potasse, à raison d'une molécule-gramme de KOH par litre, quel volume de la solution est-il nécessaire d'employer ?

Poids atomiques : $H = 1$; $Az = 14$; $P = 31$; $Ca = 40$.

On prendra pour volume moléculaire celui de l'oxygène ($O = 16$), calculé avec la densité $d = 1,105$.

(3 juin, de 14 h. à 17 h.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1912.

Algèbre et Analyse.

2080. — *Soit l'intégrale définie*

$$y = \int_0^1 \cos(kz^2)dz.$$

Peut-on trouver rapidement, pour les valeurs positives de $k < 1$ *et les valeurs de* x *comprises entre* 0 *et* $\frac{\pi}{4}$, *un polynome en* x,

$$Y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

où n *soit un entier aussi petit que possible, et qui représente* y *avec une erreur moindre que* $0{,}001$?

On pourra s'aider pour les calculs numériques de la table de logarithmes, en prenant $\pi = 3{,}1416$.

Traiter ensuite le même problème pour $k \leqslant 1$ *et les valeurs de* x *comprises non plus entre* 0 *et* $\frac{\pi}{4}$, *mais entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $\cos(kz^2)$ est développable en série entière pour toutes les valeurs de z par la formule

$$\cos(kz^2) = 1 - \frac{k^2 z^4}{2!} + \frac{k^4 z^8}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{k^{2n} z^{4n}}{(2n)!} + \cdots$$

On peut alors intégrer cette série terme à terme de 0 à x, et on obtient

$$y = \int_0^x \cos(kz^2)\,dz = \frac{x}{1} - \frac{k^2 x^5}{5.2!} + \frac{k^4 x^9}{9.4!} - \cdots + (-1)^n \frac{k^{2n} x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} + \cdots,$$

et ce développement est valable pour toutes les valeurs de x.

Cette série est alternée ; donc, si l'on prend pour valeur approchée de y la somme des n premiers termes

$$Y = \frac{x}{1} - \frac{k^2 x^5}{5.2!} + \frac{k^4 x^9}{9.4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{k^{2n-2} x^{4n-3}}{(4n-3)(2n-2)!},$$

l'erreur commise, $y - Y$, est moindre en valeur absolue que le $(n+1)^e$ terme, et a le signe de ce terme. On aura donc

$$(1) \qquad |y - Y| < \frac{k^{2n} |x|^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!},$$

mais à condition que les termes diminuent en valeur absolue au moins à partir du n^e terme, ou que le rapport d'un terme au précédent soit inférieur à 1 en valeur absolue. Or nous avons

$$\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \frac{k^2 x^4 (4p-3)}{(4p+1)(2p-1)2p}.$$

On aura donc l'inégalité (1) si l'on a, pour toute valeur de p supérieure ou égale à n,

$$(2) \qquad \frac{k^2 x^4 (4p-3)}{(4p+1)(2p-1)2p} < 1.$$

1° Supposons $0 < k < 1$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Dans cette hypothèse x est inférieur à 1 ; l'inégalité (2) a lieu quel que soit p, et par suite l'inégalité (1) a lieu quel que soit n.

Déterminons n de façon que

$$(3) \qquad \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!} < \frac{1}{1000};$$

on aura *a fortiori* $|y - Y| < \frac{1}{1000}$.

L'inégalité (3) peut s'écrire, en prenant les logarithmes vulgaires des deux membres,

$$(4n+1)\log\frac{\pi}{4} - \log(4n+1) - \log(2n)! < -3.$$

En prenant $\pi = 3{,}1416$, on a $\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$, et $\log\frac{\pi}{4} = \bar{1}{,}89509$.

Pour $n = 1$, on a

$$5\log\frac{\pi}{4} - \log 5 - \log 2 = 5\log\frac{\pi}{4} - \log 10 = \bar{1}{,}47545 - 1,$$

et cette quantité est supérieure à -3.

Pour $n = 2$,
$$9 \log \frac{\pi}{4} = \bar{4},05581,$$
$$-\log 9 = \bar{1},04576,$$
$$-\log 4! = \bar{2},61979;$$
en ajoutant on obtient $\bar{4},72136$, qui est inférieur à -3.

Donc l'inégalité (1) est vérifiée par $n = 2$, et le polynome
$$Y = \frac{x}{1} - \frac{k^2 x^5}{10},$$
représente y avec une erreur moindre que $\frac{1}{1000}$. De plus, comme le troisième terme est positif, Y est une valeur approchée par défaut.

2° Supposons $0 < k < 1$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Dans l'inégalité (2) remplaçons k par 1 et x par $\frac{\pi}{2}$; nous avons
$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (4p-3)}{(4p+1)(2p-1)2p} < 1.$$

Comme $\frac{\pi}{2} < 2$, $4p - 3 < 4p - 2$, on a
$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 (4p-3)}{(4p+1)(2p-1)2p} < \frac{2^4(4p-2)}{(4p+1)(2p-1)2p} < \frac{2^4}{(4p+1)p}.$$

Pour $p \geqslant 2$, on a $\frac{2^4}{(4p+1)p} < 1$; on en conclut que l'inégalité (2) aura lieu *a fortiori* pour $p \geqslant 2$.

Il faut alors déterminer n de façon que l'on ait
$$(4n+1) \log \frac{\pi}{2} - \log(4n+1) - \log(2n)! < -3.$$

Nous essaierons successivement les valeurs 2, 3, 4, ...

Si nous posons $\quad f(n) = (4n+1) \log \frac{\pi}{2} - \log(4n+1) - \log(2n)!,$

nous avons
$$f(n+1) = f(n) + 4 \log \frac{\pi}{2} + \log(4n+1) - \log(4n+5) - \log(2n+1)(2n+2),$$
ce qui permet de calculer $f(n+1)$ connaissant $f(n)$.

Nous avons $\frac{\pi}{2} = 1,5708$, et $\log \frac{\pi}{2} = 0,19612$.

Calcul de $f(2)$	Calcul de $f(3)$	Calcul de $f(4)$	Calcul de $f(5)$
$9 \log \frac{\pi}{2} = 1,76508$	$f(2) = \bar{1},43063$	$f(3) = \bar{2},57829$	$f(4) = \bar{3},49807$
$-\log 9 = \bar{1},04576$	$4 \log \frac{\pi}{2} = 0,78448$	$4 \log \frac{\pi}{2} = 0,78448$	$4 \log \frac{\pi}{2} = 0,78448$
$-\log 24 = \bar{2},61979$	$\log 9 = 0,95424$	$\log 13 = 1,11394$	$\log 17 = 1,23045$
	$-\log 13 = \bar{2},88606$	$-\log 17 = \bar{2},76955$	$-\log 21 = \bar{2},67778$
	$-\log 30 = \bar{2},52288$	$-\log 56 = \bar{2},25181$	$-\log 90 = \bar{2},04576$
$f(2) = \bar{1},43063$	$f(3) = \bar{2},57829$	$f(4) = \bar{3},49807$	$f(5) = \bar{4},23654$

$f(5)$ est inférieur à -3 ; par suite le polynome

$$Y = \frac{x}{1} - \frac{k^2x^5}{5.2!} + \frac{k^4x^9}{9.4!} - \frac{k^6x^{13}}{13.6!} + \frac{k^8x^{17}}{17.8!}$$

est le polynome demandé ; il est approché par excès.

Marcel ULLMANN, 47e d'artillerie, à Héricourt.

2081. — *Posant* $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, *où* a *est une constante et* n *un entier plus grand que zéro, on demande de calculer* J_n. *On pourra par exemple chercher à établir une formule de récurrence où entreront deux au moins des quantités* $J_n, J_{n-1}, \ldots$

Indiquer plus généralement une méthode utilisant le résultat obtenu ci-dessus et qui permette de calculer

$$\int \frac{f(x)\,dx}{(x^2+a^2)^n},$$

où $f(x)$ *est un polynome entier en* x.

Appliquons la formule de l'intégration par parties $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ à l'intégrale

$$J_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx ;$$

en posant $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$, $v = x$, et en remarquant que $du = -\frac{2(n-1)x\,dx}{(x^2+a^2)^n}$, nous avons

$$(1) \qquad J_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

D'autre part, nous pouvons écrire

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = J_{n-1} - a^2J_n.$$

La formule (1) devient alors

$$J_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)(J_{n-1} - a^2J_n),$$

ou

$$(2n-2)a^2J_n = (2n-3)J_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

C'est une formule de récurrence entre J_n et J_{n-1}.

Résolvons-la par rapport à J_n et remplaçons-y successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2 ; nous avons

$$J_n = \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\cdot J_{n-1} + \frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

$$J_{n-1} = \frac{2n-5}{(2n-4)a^2}\cdot J_{n-2} + \frac{1}{(2n-4)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-2}},$$

$$J_{n-2} = \frac{2n-7}{(2n-6)a^2}\cdot J_{n-3} + \frac{1}{(2n-6)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot J_1 + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2},$$

et nous savons que J_1 est égal à $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$.

Nous allons éliminer $J_{n-1}, J_{n-2}, \ldots, J_1$: pour cela, nous multiplions ces équations respectivement par 1, $\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}$, $\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)a^4}$, ..., $\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots 5.3}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots 6.4.a^{2n-2}}$, et nous les ajoutons membre à membre.

Nous obtenons ainsi

$$J_n = \frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)a^4}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-2}}$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)a^6}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-3}} + \cdots + \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots5.3}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots6.4.2a^{2n-2}}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\ldots5.3}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots6.4.2a^{2n-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$$

Telle est l'expression de J_n.

Soit maintenant à calculer l'intégrale $\int\frac{f(x)dx}{(x^2+a^2)^n}$, $f(x)$ désignant un polynome. Décomposons ce polynome en deux polynomes, le premier ne renfermant que les puissances paires de x et le deuxième les puissances impaires, et dans celui-ci mettons x en facteur ; nous pouvons écrire

$$f(x) \equiv P(x^2) + xQ(x^2),$$

$P(x^2)$ et $Q(x^2)$ étant des polynomes en x^2.

Par suite, l'intégrale considérée devient

$$\int\frac{f(x)dx}{(x^2+a^2)^n} = \int\frac{P(x^2)dx}{(x^2+a^2)^n} + \int\frac{Q(x^2)xdx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Développons maintenant $P(x^2)$ par rapport aux puissances de x^2+a^2 ; nous avons

$$P(x^2) \equiv P(-a^2+\overline{x^2+a^2}) = P(-a^2) + (x^2+a^2)P'(-a^2) + \frac{(x^2+a^2)^2}{2!}P''(-a^2) + \cdots$$
$$+ \frac{(x^2+a^2)^p}{p!}P^{(p)}(-a^2),$$

ou
$$P(x^2) \equiv A_0 + A_1(x^2+a^2) + A_2(x^2+a^2)^2 + \cdots + A_p(x^2+a^2)^p,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_p$ étant des constantes, et de même

$$Q(x^2) \equiv B_0 + B_1(x^2+a^2) + B_2(x^2+a^2)^2 + \cdots + B_q(x^2+a^2)^q.$$

Par suite,
$$\int\frac{P(x^2)dx}{(x^2+a^2)^n} = A_0\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} + A_1\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \cdots + A_p\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-p}}.$$

Si $n > p$, nous avons dans le second membre les intégrales $J_n, J_{n-1}, \ldots J_{n-p}$.

Si $n < p$, outre les intégrales $J_n, J_{n-1}, \ldots, J_1$, nous avons des intégrales de polynomes.

D'autre part,

$$\int\frac{Q(x^2)xdx}{(x^2+a^2)^n} = B_0\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} + B_1\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \cdots + B_q\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^{n-q}}.$$

Si $m = 1$,
$$\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{m-1}},$$

et, si $m = 1$,
$$\int\frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}L(x^2+a^2).$$

Le calcul de $\int\frac{f(x)dx}{(x^2+a^2)^n}$ est donc ramené au calcul des intégrales J_m.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions par MM. Gaston Bétier, 20e d'artillerie, à Poitiers ; André Courtois, à Avesnes-sur-Helpe (Nord) ; J. Dagnaux, à Dijon ; G. Lach, à Douai ; A. Le Marchand, à Paris ; M. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône ; N. Savary, 61e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies ; Gaston Singier, à Houpline ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie à Héricourt.

Géométrie analytique.

2082. — *Quelle est la courbe enveloppe de la droite mobile*

$$\lambda^2P + 2\lambda Q + R = 0,$$

λ *étant un paramètre variable et* P, Q, R *des fonctions linéaires de* x *et de* y?

Retrouver, au moyen du résultat, l'équation de la tangente de coefficient angulaire m *à la parabole.*

Pour avoir l'enveloppe de la droite

$$(1) \qquad \lambda^2 P + 2\lambda Q + R = 0,$$

il suffit d'écrire que cette équation, envisagée comme une équation du deuxième degré par rapport au paramètre λ, a une racine double. On obtient ainsi

$$(2) \qquad Q^2 - PR = 0,$$

qui représente une conique tangente aux droites $P = 0$, $R = 0$, la corde des contacts étant $Q = 0$.

Inversement, si l'équation d'une conique est mise sous la forme (2), on peut envisager cette conique comme l'enveloppe de la droite (1) quand λ varie, et par suite cette équation (1) représente l'équation générale des tangentes à la conique (2).

Considérons, par exemple, une parabole rapportée à des axes quelconques, ayant pour équation

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

nous pouvons l'envisager comme enveloppe de la droite

$$(3) \qquad \lambda^2 + 2\lambda(\alpha x + \beta y) + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

L'équation (3) est donc l'équation générale des tangentes à cette courbe.

Déterminons λ de façon que le coefficient angulaire de la droite (3) soit égal à m, nous avons

$$\frac{\lambda\alpha + D}{\lambda\beta + E} = -m, \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{D + Em}{\alpha + \beta m}.$$

Si l'on remplace λ par cette valeur dans l'équation (3), celle-ci se met sous la forme

$$y = mx + \frac{F(\alpha + \beta m)^2 - (D + Em)^2}{2(D\beta - E\alpha)(\alpha + \beta m)}.$$

Dans le calcul, on a supposé que $\alpha + \beta m$ et $D\beta - E\alpha$ n'étaient pas nuls. La condition $\alpha + \beta m = 0$ exprime que la direction de coefficient angulaire m est parallèle à l'axe de la parabole, et l'on sait qu'il n'y a pas de tangente parallèle à cette direction. La condition $D\beta - E\alpha = 0$ exprime que la parabole se réduit à deux droites parallèles.

En faisant le même calcul pour la parabole $y^2 - 2px = 0$, on trouve l'équation bien connue

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Gaston SINGIER, à Houplines.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Avesnes-sur-Helpe (Nord) ; J. Dagnaux, à Dijon ; R. Dufresne, lycée Charlemagne ; A. Le Marchand, à Paris ; G. Mouffilet, à Lyon ; L. Naucelle, à la Châtre ; A. Rousseau ; N. Savary, 61e d'artillerie ; L. Simon, à Fourmies ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

QUESTIONS PROPOSÉES

2161. — En désignant par a et b deux nombres réels, tels que a soit plus petit que b, indiquer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_a^b (x^2 - a^2)\sqrt{\frac{x - a}{b - x}}\,dx.$$

2162. — 1° Trouver la fonction la plus générale, définie entre 0 et $+\infty$, qui satisfasse à l'équation différentielle

$$xy' + y = 2x + 2 - \frac{1}{x},$$

et indiquer d'une façon sommaire les variations de cette fonction ainsi que la courbe représentative.

2° Trouver le lieu des minima de cette fonction quand la constante d'intégration varie et trouver la valeur de cette constante qui sépare les fonctions qui s'annulent pour deux valeurs positives de x, de celles qui ne s'annulent pas.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE (*Suite.*)

par M. **G. Fontené.**

V. Mouvement planétaire (première méthode).

9. Pour le mouvement des planètes et des comètes, on a

$$F = \frac{-\mu m}{r^2},$$

et on peut employer la méthode du paragraphe II. On a d'abord

$$(1) \qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Recherche de la trajectoire.

10. Pour la recherche de la trajectoire, on a, d'après la relation [C'],

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{C^2}\left(\frac{2\mu}{r} + h\right),$$

ou, en transformant le trinome en $\frac{1}{r}$,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4}\left(1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}\right);$$

il y a intérêt a faire apparaitre immédiatement la quantité $1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}$. On pose

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \rho \cdot \frac{\mu}{C^2}\sqrt{1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}},$$

et l'on a

$$d\theta = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{1-\rho^2}}$$

Si la variable ρ *croit* d'abord de -1 à $+1$, on prend par exemple

$$d\theta = \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad \theta = \text{arc cos}\,\rho \qquad (-\pi < \theta < 0);$$

la variable ρ *décroissant* ensuite de $+1$ à -1, on doit prendre

$$d\theta = \frac{d\rho}{-\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad \theta = \text{arc cos}\,\rho \qquad (0 < \theta < \pi);$$

l'argument θ croit ainsi de $-\pi$ à $+\pi$, et, pour une même valeur de ρ croissant ou décroissant, c'est-à-dire pour une même valeur de r décroissant ou croissant, on a deux valeurs opposées de θ, à savoir une valeur négative pour r décroissant, une valeur positive pour r croissant.

L'équation de la trajectoire est

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}} \cos\theta}{\frac{C^2}{\mu}} \tag{2}$$

cette trajectoire est une conique de foyer O, et la valeur $\theta = 0$ correspond au sommet le plus voisin de O.

11. En Mécanique plane, l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un point introduit quatre constantes que l'on détermine par les conditions initiales. On donne ici, pour une valeur r_0 du rayon vecteur, la grandeur v_0 de la vitesse, la valeur V_0 de l'angle que la direction du rayon vecteur fait avec la direction de la vitesse enfin les valeurs θ_0 et t_0 des variables θ et t. On peut supposer $\theta_0 = 0$, $t_0 = 0$, et il reste les valeurs v_0 et V_0 correspondant à r_0. Ces deux valeurs déterminent les deux constantes C et h:

$$\begin{cases} C = r_0 v_0 \sin V_0, \\ h = v_0^2 - \dfrac{2\mu}{r_0}. \end{cases}$$

Ayant C et h, on peut déterminer les deux éléments métriques qui fixent la grandeur de la trajectoire (conique de foyer O). En comparant l'équation (2) à l'équation

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p},$$

on a

$$\begin{cases} p = \dfrac{C^2}{\mu}, \\ e = \sqrt{1 + \dfrac{C^2 h}{\mu^2}}; \end{cases}$$

le genre de la conique dépend uniquement du signe de h, c'est-à-dire de la grandeur de la vitesse initiale, non de sa direction : *la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que v_0^2 est inférieur, égal ou supérieur à $\frac{2\mu}{r_0}$.*

On peut remplacer les deux relations précédentes par celles que fournit l'élimination de C. Soit ε le signe de $-h$, de sorte que l'on a $\varepsilon = +1$ pour une ellipse, $\varepsilon = -1$ pour une hyperbole. On écrit

$$\frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu}, \qquad 1 - e^2 = \frac{-C^2 h}{\mu^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varepsilon b^2}{a^2} = \frac{-C^2 h}{\mu^2},$$

et l'on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon a = \dfrac{\mu}{-h}, \\ \varepsilon b^2 = \dfrac{C^2}{-h}; \end{cases}$$

on voit que *la valeur de a dépend seulement de la valeur de h, c'est-à-dire de la grandeur de la vitesse initiale, non de sa direction ;* ce résultat complète celui qui est relatif au genre de la conique [1].

---

(1) La formule (1) peut s'écrire

$$r^2 = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{r} - \frac{2a - r}{r} = \frac{\mu}{a}\,\frac{r'}{r},$$

r' étant la distance du point M au second foyer de la conique. Lorsque la courbe est une hyperbole, si le point M se meut sur la branche qui n'entoure pas le foyer O, on a $r' = r_1$, d'où

$$r_1 - r = 2a, \qquad 2a + r = r_1, \qquad \frac{2a + r}{r} = \frac{-r'}{r} = \frac{r'}{-r}.$$

12. Il est facile de vérifier que la valeur de la quantité $1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}$, *déduite des données initiales*, est positive ou nulle, comme l'exige dès le début l'équation différentielle de la trajectoire. On écrit

$$h = \left(v_0 - \frac{\mu}{r_0 v_0}\right)^2 - \frac{\mu^2}{r_0^2 v_0^2},$$

d'où $$\frac{C^2 h}{\mu^2} = \frac{C^2}{\mu^2}\left(v_0 - \frac{\mu}{r_0 v_0}\right)^2 - \sin^2 V_0, \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{C^2 h}{\mu^2} = \frac{C^2}{\mu^2}\left(v_0 - \frac{\mu}{r_0 v_0}\right)^2 = \cos^2 V_0.$$

La trajectoire sera un cercle si l'on a $e = 0$, ce qui donne (comme on le savait à l'avance) deux conditions, puisque e^2 s'exprime par une somme de deux carrés. Ces conditions sont

$$V_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad v_0^2 = \frac{\mu}{r_0};$$

a priori on doit avoir $V_0 = \frac{\pi}{2}$, et

$$\frac{m v_0^2}{r_0} = -F_0 = \frac{m\mu}{r_0^2}, \qquad \text{ou} \qquad v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}.$$

Recherche de la loi cinématique du mouvement, dans le cas d'une orbite elliptique ou parabolique.

13. Pour la recherche de la loi cinématique du mouvement, on a, d'après la relation [C''],

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Il faut introduire ici les éléments métriques de la trajectoire au lieu des constantes C *et* h *;* on a, dans le cas de l'ellipse,

$$h = \frac{-\mu}{a}, \qquad C^2 = \mu\frac{b^2}{a} = \mu a(1 - e^2),$$

avec a et e ; cela donne

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{-\mu a(1 - e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a}\,\frac{a^2(e^2 - 1) + 2ar - r^2}{r^2} = \frac{\mu}{a}\,\frac{a^2e^2 - (a - r)^2}{r^2},$$

en transformant le trinome en r : on en déduit

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = r\frac{dr}{\pm\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}},$$

avec $ae = c$.

La variable r croissant d'abord de la valeur $a - c$ à la valeur $a + c$, décroissant ensuite de la valeur $a + c$ à la valeur $a - c$, de sorte que $a - r$ décroît d'abord de $+c$ à $-c$ pour croître ensuite de $-c$ à $+c$, on prend le signe $+$ dans la première période, le signe $-$ dans la seconde. On pose

$$a - r = ae\cos u,$$

u variant de 0 à π dans la première période, de π à 2π dans la seconde, ce qui donne

$$\pm\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2} = ae\sin u.$$

On a donc
$$r = a(1 - e\cos u),$$
$$dr = ae\sin u\,du,$$

d'où $$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = r\,du = a(1 - e\cos u)du, \qquad \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}\,t = u - e\sin u,$$

ou (3) $$nt = u - e\sin u, \qquad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}};$$

si l'on se donne t, on a une équation transcendante en u.

Le temps T de la révolution est donné par la formule

$$nT = 2\pi;$$

T dépend donc de n seul, c'est-à-dire de a, non de e. On a vu que la valeur de a dépend seulement de la grandeur de la vitesse initiale, non de sa direction ; il en est donc de même de T.

La valeur de T est donnée en fonction de a par la relation

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}, \qquad \text{ou} \qquad \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

on obtient facilement cette relation en écrivant

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{\dfrac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}}{\dfrac{b^2}{a}} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

On a déjà r et t en fonction de u ; si l'on veut avoir θ en fonction de u, on écrit

$$\frac{p}{1 + e\cos\theta} = a(1 - e\cos u), \qquad \text{ou} \qquad (1 + e\cos\theta)(1 - e\cos u) = 1 - e^2,$$

etc. On a finalement

$$\begin{cases} r = a(1 - e\cos u), \\ \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}, \\ nt = u - e\sin u. \end{cases}$$

On peut interpréter géométriquement la variable u. On a posé

$$a - r = ae\cos u;$$

d'après la formule connue $r = a - ex$, ou $a - r = ex$, dans laquelle x représente l'abscisse du point M comptée depuis le centre Ω, on a donc

$$\cos u = \frac{x}{a};$$

l'ellipse étant considérée comme projection d'un cercle, le point M étant la projection du point M', on a

$$u = \widehat{A\Omega M'}.$$

On aurait pu introduire l'angle u en écrivant

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = r\frac{dr}{\pm e\sqrt{a^2 - x^2}};$$

cela conduit en effet à poser

$$\cos u = \frac{x}{a} = \frac{a - r}{ae}.$$

Cette interprétation de la variable u met sur la voie d'une démonstration géométrique de la relation (3). On a, par le théorème des aires,

$$\text{aire AOM} = \frac{\pi ab}{T}t;$$

or, O étant le foyer et Ω le centre,

$$\text{aire AOM'} = \text{aire A}\Omega\text{M'} - \text{aire O}\Omega\text{M'} = \frac{1}{2}a^2(u - e\sin u),$$

d'où

$$\text{aire AOM} = \frac{1}{2}ab(u - e\sin u);$$

donc

$$\frac{2\pi}{T}t = u - e\sin u.$$

14. Pour $b = 0$, on a $\qquad r = \dfrac{2p}{e}$

La trajectoire est alors une parabole

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

avec $p = \frac{C^2}{\mu}$. La relation [C'] donne, pour la loi cinématique du mouvement,

$$dt = \frac{rdr}{\pm\sqrt{2r\mu - C^2}}, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{2\mu}dt = \frac{rdr}{\pm\sqrt{r - \frac{p}{2}}},$$

en introduisant p au lieu de C.

On pose

$$r - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}v^2, \qquad \pm\sqrt{r - \frac{p}{2}} = v\sqrt{\frac{p}{2}}, \qquad \frac{dr}{\pm 2\sqrt{r - \frac{p}{2}}} = \sqrt{\frac{p}{2}}dv.$$

et l'on a

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}dt = rdv = \frac{p}{2}(1 + v^2)dv.$$

(3') $$t = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}\left(v + \frac{v^3}{3}\right).$$

Comme on a $$r = \frac{p}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right),$$

la variable v n'est pas autre chose que $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ (voir plus loin). L'équation de la courbe étant $y^2 = 2px$,

on a encore $$r - \frac{p}{2} = x = \frac{y^2}{2p}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p}{2}v^2 = \frac{y^2}{2p}, \qquad v = \frac{y}{p}.$$

Remarque.

15. Après avoir obtenu l'équation de la trajectoire au moyen de la relation [C'], on pourrait, au lieu de chercher la loi cinématique du mouvement en se servant de la relation [C'], employer dans ce but l'intégrale des aires. On a

$$dt = \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2};$$

on pose $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = v$, et l'on a à faire l'intégration d'une fraction rationnelle. On est conduit à poser encore, avec $e < 1$,

$$v\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = w,$$

et la quantité w qui se présente ainsi n'est pas autre chose que $\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, u étant l'anomalie excentrique ; cela résulte d'une formule donnée plus haut.

16. C'est de cette façon que l'on fait d'ordinaire le calcul du temps pour une orbite parabolique.

On a alors

$$dt = \frac{p\sqrt{p}}{4\sqrt{\mu}}\frac{d\theta}{\cos^4\frac{\theta}{2}};$$

on pose $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = v. \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = dv,$$

et l'on a
$$dt = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}(1+v^2)dv,$$
$$t = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}\left(v + \frac{v^3}{3}\right) = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right),$$
résultat déjà obtenu.

(*A suivre.*)

ALGÈBRE

2078. — *On dit qu'une équation du quatrième degré est réciproque quand il existe une valeur de λ pour laquelle l'équation prend la forme*
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + b\lambda x + a\lambda^2 = 0.$$
Montrer que, dans ce cas, l'équation est résoluble à l'aide d'équations du second degré.

1° *Trouver la condition pour que l'équation $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f = 0$ soit réciproque de cette manière.*

2° *Si on fait la transformation $x = y + h$, il y a trois valeurs de h pour lesquelles l'équation en y devient réciproque ainsi. Former l'équation du troisième degré qui donne h et trouver la valeur de λ qui correspond à chaque valeur de h.*

3° *L'équation en y se décompose en deux trinomes, $a(y^2+py+\lambda)(y^2+qy+\lambda)$; trouver p et q, la condition pour que $p = q$. Montrer directement que si le polynome du quatrième degré est un carré parfait, l'équation en h est indéterminée. Expliquer le résultat.*

L'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + b\lambda x + a\lambda^2 = 0$, s'écrit
$$a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0.$$
Posons $x + \frac{\lambda}{x} = z$ d'où $x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} = z^2 - 2\lambda$ et
$$x^2 - zx + \lambda = 0; \tag{1}$$
nous aurons pour déterminer z l'équation du second degré
$$az^2 + bz + c - 2a\lambda = 0.$$
z étant connu, (1) donnera les valeurs de x cherchées. L'équation proposée est donc résoluble à l'aide d'équations du second degré.

On peut procéder comme il suit. Posons
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + b\lambda x + a\lambda^2 = a(x^2+px+\lambda)(x^2+qx+\lambda);$$
on a, pour déterminer p et q, $p + q = \frac{b}{a}$, $pq = \frac{c}{a} - 2\lambda$; d'où l'équation du second degré
$$p^2 - \frac{b}{a}p + \frac{c}{a} - 2\lambda = 0.$$
Par suite, les racines de l'équation réciproque seront données par les deux équations du second degré :
$$x^2 + px + \lambda = 0, \qquad x^2 + qx + \lambda = 0.$$

1. Soit l'équation
$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f = 0.$$
Elle sera réciproque s'il existe un nombre λ tel que
$$d = b\lambda, \qquad f = a\lambda^2,$$
ce qui nous donne la condition $ad^2 - fb^2 = 0$.

Cette condition étant remplie, on aura soit $\lambda = \frac{d}{b}$, soit $\lambda^2 = \frac{f}{a}$.

2. Effectuons la transformation $x = y + h$, nous aurons

(2) $f(y+h) = ay^4 + 4(ah+b)y^3 + 6(ah^2+2bh+c)y^2 + 4(ah^3+3bh^2+3ch+d)y + f(h) = 0.$

La condition précédente devient

$$a(ah^3+3bh^2+3ch+d)^2 - f(h)(ah+b)^2 = 0,$$

et, en développant, on a, pour déterminer h, l'équation du troisième degré

(3) $(6abc - 2a^2d - 4b^3)h^3 + (9ac^2 - 6b^2c - a^2f - 2abd)h^2 + (6acd - 2abf - 4b^2d)h + ad^2 - fb^2 = 0.$

L'équation (2) peut donc être rendue réciproque de trois manières différentes.

Chaque valeur de λ s'obtiendra en remplaçant h dans l'expression

$$\lambda = \frac{ah^3+3bh^2+3ch+d}{ah+b}$$

par chacune des racines de l'équation (3). On pourra utiliser aussi la relation

$$\lambda^2 = \frac{f(h)}{a}.$$

3. En reprenant le calcul fait au début, on est conduit pour déterminer p et q à l'équation du second degré

$$aP^2 - 4(ah+b)P + \frac{2(2a^2h^3+6abh^2+6b^2h+3bc-ad)}{ah+b} = 0.$$

La condition pour que $p = q$ s'obtient en exprimant que cette équation admet une racine double ; on trouve ainsi aisément la relation $2b^3 - 3abc + a^2d = 0$.

Elle est indépendante de h ; on pouvait le prévoir *a priori* car l'équation en y, étant dans l'hypothèse $p = q$ carré parfait, est réciproque quel que soit h.

Si $f(x)$ est carré parfait on aura

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f \equiv a(x^2+px+\lambda^2)^2 \equiv a[x^4 + 2px^3 + (2\lambda+p^2)x^2 + 2\lambda px + \lambda^2],$$

et, en identifiant,

$$2b = ap,$$
$$6c = a(2\lambda+p^2),$$
$$2d = a\lambda p,$$
$$f = a\lambda^2.$$

Si nous remplaçons, dans les coefficients de l'équation (3), b, c, d, f par les valeurs précédentes, nous voyons que tous ces coefficients sont nuls ; donc l'équation (3) en h est indéterminée. Ce fait est évident. Si l'équation en x est carré parfait, l'équation transformée en y sera également carré parfait quel que soit h ; du reste, dans ce cas l'équation proposée et sa transformée sont toujours réciproques.

L. NAUGELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; A. Courtois, à Avesnes ; J. Dagnaux, à Dijon.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2095. — *On considère une courbe* Γ *du troisième degré et un de ses points d'inflexion* O. *Par ce point on mène une sécante quelconque* OAB.

1° *Lieu du point d'intersection des tangentes en* A *et* B *à* Γ.

2° *On fait une transformation homographique de façon que* O *et la tangente en ce point aillent à l'in-*

fini. Montrer qu'avec des axes convenables l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

3° Se servir de cette forme pour démontrer ce théorème dû à Salmon :

Si d'un point quelconque M pris sur une courbe du troisième degré on mène les quatre tangentes à la courbe autres que celle ayant son point de contact en M, leur rapport anharmonique est constant.

1. Si d'un point O quelconque, pris dans le plan d'une cubique, on mène une sécante OABC, qui rencontre la cubique en trois points, il y a trois conjugués harmoniques du point O sur cette sécante, par rapport aux couples AB, AC, BC. Le lieu du conjugué harmonique de O sur toutes les sécantes qui passent en O par rapport à la cubique est donc une cubique (*).

Quand le point O vient sur la cubique en un point ordinaire où la tangente rencontre la courbe en deux points confondus, cette sécante particulière rencontre la cubique donnée aux points O, A, B, A étant confondu avec O ; le conjugué harmonique de O sur la sécante envisagée est donc indéterminé et l'on voit que la tangente en O fait partie du lieu ; l'autre partie est une conique. Si le point O est un point d'inflexion les deux points A et B viennent coïncider avec O, quand la sécante se place sur la tangente d'inflexion ; alors les conjugués harmoniques de O par rapport aux couples (OA) et (OB) sont indéterminés ; cette tangente fait deux fois partie du lieu. Le vrai lieu est une droite, et nous apercevons ainsi ce théorème intéressant :

Le lieu des conjugués harmoniques d'un point d'inflexion d'une cubique, par rapport à cette courbe sur toutes les sécantes qui passent en ce point est une droite.

Pour démontrer ce théorème par le calcul, prenons le point d'inflexion pour origine et la tangente de ce point pour axe des y ; l'équation de la cubique sera

$$x + 2axy + bx^2 + Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 = 0.$$

Coupons-la par la sécante $y = tx$, nous aurons pour abscisses des points de rencontre les deux racines de l'équation

$$1 + (b + 2at)x + (A + 3Bt + 3Ct^2 + Dt^3)x^2 = 0.$$

Soient x l'abscisse du conjugué harmonique de O, x' et x'' celles des deux points précédents ; nous avons

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{2}{x} = -b - 2at.$$

Le lieu de ce conjugué harmonique est donc la droite

$$(D) \qquad 2ay + bx + 2 = 0.$$

La première partie du problème en découle tout naturellement : le lieu du point de rencontre des tangentes aux points A et B est la droite (D). A ce point de vue, la droite (D) se comporte comme la polaire d'un point par rapport à une conique.

2. En rejetant le point O à l'infini sur Oy et la tangente en ce point sur la droite de l'infini, la droite (D) devient le diamètre des cordes parallèles à Oy, et, en la prenant pour axe des x, on obtient l'équation

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Il suffit de déplacer l'origine sur Ox pour avoir la forme indiquée

$$y^2 = ax^3 + bx + c, \qquad \text{ou} \qquad ay^2 = x^3 + px + q.$$

3. Pour traiter la dernière partie, nous nous appuierons sur ce fait que l'équation aux rapports anharmoniques des racines d'une équation du quatrième degré

$$Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0$$

est

$$\frac{(x+1)^2(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(x^2-x+1)^3} = \frac{27T^2}{S^3}.$$

(*) Il est visible que le point O n'est pas sur le lieu

en posant
$$S = AE - 4BD + 3C^2,$$
$$T = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}.$$

Appelons alors (x_0, y_0) un point de la cubique, et coupons-la par une droite passant en ce point,
$$y - y_0 = \lambda(x - x_0);$$
nous aurons l'équation aux abscisses des points de rencontre
$$a[y_0 + \lambda(x - x_0)]^2 = x^4 + px + q.$$

Posons $x = x_0 + x'$ et tenons compte de ce que le point (x_0, y_0) est sur la cubique, nous aurons $x' = 0$, qui correspond au point choisi et $x'^2 + x'(3x_0 - a\lambda^2) + 3x_0^2 + p - 2a\lambda y_0 = 0$.

En écrivant que cette équation a une racine double, nous aurons l'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (x_0, y_0)
$$(a\lambda^2 - 3x_0)^2 + 4(2a\lambda y_0 - 3x_0^2 - p) = 0, \qquad \text{ou} \qquad a^2\lambda^4 - 6ax_0\lambda^2 + 8ay_0\lambda - 3x_0^2 - 4p = 0.$$
Ici $A = a^2$, $B = 0$, $C = -ax_0$, $D = 2ay_0$, $E = -3x_0^2 - 4p$

Alors
$$S = -a^2(3x_0^2 + 4p) + 3a^2x_0^2 = -4a^2p,$$
$$T = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & -ax_0 \\ 0 & -ax_0 & 2ay_0 \\ -ax_0 & 2ay_0 & -3x_0^2 - 4p \end{vmatrix},$$
$$T = a^3x_0(3x_0^2 + 4p) - 4a^4y_0^2 + a^3x_0^3, \qquad T = 4a^3(x_0^4 + px_0 - ay_0^2) = -4a^3q.$$

Nous voyons donc que S et T sont constants ; par suite le rapport anharmonique, r, est constant.

Bonne solution de M. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

2096. — *On considère le cercle* $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ *et un point* M, *ayant pour coordonnées* x *et* y.

1° *Trouver le conjugué* M′ *du point* M, *dont l'abscisse* x' *est égale à* $-x$. *Calculer* x *et* y *en fonction de* x' *et* y' *et inversement. Quel est le lieu du point* M′, *quand le point* M *décrit le cercle donné ? Quand le point* M *décrit une droite ?*

2° *Dans ce dernier cas, le lieu est une hyperbole, dont une asymptote est parallèle à* Oy. *Trouver le lieu de son centre et l'enveloppe de sa seconde asymptote, quand la droite donnée enveloppe la parabole qui a pour foyer l'origine et pour sommet le point symétrique du centre du cercle par rapport au point* O.

3° *On suppose que le point* M *soit sollicité par une force représentée par le vecteur* MM′. *Trouver les lignes de force et les lignes de niveau du champ ainsi créé. On ajoute à cette force une force égale à l'ordonnée du point* M′ *changée de signe. Etudier le mouvement que prend le point* M, *ayant pour masse l'unité et soumis à ces deux forces. Pour* $t = 0$, $x = 2a$, $y = 0$, *la vitesse est parallèle à* Oy *et égale aussi à* $2a$. *Faire varier* t *de* 0 *à* 2π *seulement.*

1. Le point M′ est sur la polaire du point M et sur la symétrique de la droite $X = x$ par rapport à l'axe des y. Les coordonnées du point M′ vérifient donc les deux équations
$$x'(x - a) + y'y - ax = 0 \qquad \text{et} \qquad x' = -x.$$

Nous avons ainsi
$$x' = -x \qquad \text{et} \qquad y' = +\frac{x^2}{y};$$
de même
$$x = -x', \qquad y = \frac{x'^2}{y'}.$$

Chacun des points se déduit de l'autre de la même manière.

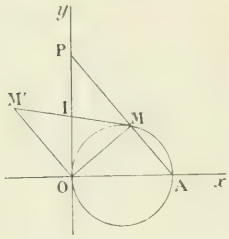
Quand le point M décrit le cercle donné, le lieu du point M′ a pour équation

$$x'^2 + \frac{x'}{y'^2} + 2ax' = 0.$$

Cette équation se décompose en deux : $x' = 0$, qui représente l'axe des y, et

$$x'(x'^2 + y'^2) + 2ay'^2 = 0,$$

qui représente une cissoïde de Dioclès ayant pour point de rebroussement l'origine, avec Ox comme tangente, et, pour asymptote, la droite $x' = -2a$.



Le premier lieu est un lieu exceptionnel, qui correspond au cas où le point M est en O, car, à ce moment, les deux droites qui donnent le point M′ sont confondues avec Oy.

Le second lieu est facile à apercevoir géométriquement. En effet le point M′ est sur la tangente au cercle, et tel que $IM' = MI$; les deux droites OM et OM′ sont donc rectangulaires, OM′ est parallèle à AM, et il est visible que $OM' = MP$, ce qui montre bien que le lieu du point M′ est une cissoïde de Dioclès égale à celle qui est définie par le cercle, la tangente Oy et le point O.

Quand le point M parcourt la droite $ux + vy + w = 0$, le lieu du point M′ a pour équation (en supprimant l'accent)

$$vx^2 - uxy + wy = 0.$$

C'est une hyperbole ayant pour directions asymptotiques $x = 0$ et $vx - uy = 0$; la première est Oy et la seconde est parallèle à la normale à la droite donnée.

2. Les coordonnées du centre sont données par

$$2vx - uy = 0, \qquad ux - w = 0.$$

Ce sont $x = \frac{w}{u}$, $y = \frac{2vw}{u^2}$; la deuxième asymptote a pour équation

$$v\left(x - \frac{w}{u}\right) - u\left(y - \frac{2vw}{u^2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad uvx - u^2y + vw = 0.$$

Nous avons à écrire maintenant que la droite donnée est tangente à la parabole

$$y^2 = 4ax + 4a^2,$$

c'est-à-dire que le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite est sur la tangente au sommet $x + a = 0$, ou que les trois équations

$$ux + vy + w = 0, \qquad \frac{x}{u} = \frac{y}{v}, \qquad x + a = 0,$$

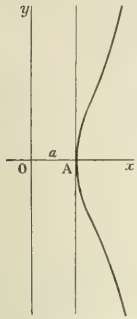
ont une solution commune. Ceci donne

$$-ua - \frac{v^2a}{u} + w = 0, \qquad \text{ou} \qquad uw - a(u^2 + v^2) = 0.$$

Le lieu du centre s'obtient en remplaçant dans cette relation $\frac{w}{u}$ par x et $\frac{v}{u}$ par $\frac{y}{2x}$. Nous avons ainsi

$$x - a - a\frac{y^2}{4x^2} = 0, \qquad \text{ou} \qquad 4x^2(x - a) - ay^2 = 0.$$

Ce lieu est une courbe du quatrième degré, située à droite de $x = a$, tangente à cette droite, ayant Oy pour direction asymptotique et symétrique par rapport à Ox. Il est facile de voir en outre



que y^2 croît toujours quand x varie de a à $+\infty$. La courbe a donc la forme ci-contre.

Pour avoir l'enveloppe de la deuxième asymptote, portons dans son équation la valeur de w, nous aurons $u^2vx - u^3y + av(u^2+v^2) = 0$,

et, en posant $\frac{v}{u} = \lambda$,

$$\lambda x - y + a\lambda(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que cette équation en λ a une racine double, ce qui donne

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4(x+a)^3 + 27ay^2 = 0.$$

Cette enveloppe est une développée de parabole, de la parabole

$$y^2 = -4a(x-a).$$

Il est facile de voir géométriquement que le lieu du point M′ est une hyperbole quand le point M parcourt une droite D. En effet la polaire du point M décrit alors un faisceau homographique à la série M ayant pour sommet le pôle de la droite D, et la droite $x' = -x$ décrit aussi un faisceau homographique à la même série ayant pour sommet le point à l'infini sur Oy. Le lieu du point M′ est donc une conique qui passe aux sommets des deux faisceaux, c'est-à-dire une hyperbole ayant Oy pour direction asymptotique.

L'asymptote parallèle à Oy correspond au point M dont la polaire est parallèle à Oy, c'est-à-dire au point de rencontre de la droite D avec Ox.

3. Les composantes de la force MM′ sont

$$X = x' - x, \qquad Y = y' - y, \qquad \text{ou} \qquad X = -2x, \qquad Y = \frac{x^2}{y} = y.$$

Les lignes de force ont pour équation différentielle

$$-2xdy - \frac{x^2 - y^2}{y}dx = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = -dx.$$

C'est une équation homogène qui s'intègre à vue en remarquant que le premier membre est la différentielle de $\frac{y^2}{x}$. L'intégrale générale est donc

$$\frac{y^2}{x} + x = C, \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = Cx;$$

les courbes intégrales sont les cercles du faisceau déterminé par le cercle donné et l'axe des y.

Les lignes de niveau seront donc les cercles du faisceau conjugué, $x^2 + y^2 - Cy = 0$. Elles se trouvent directement d'ailleurs, et aussi facilement que les précédentes, en intégrant une autre équation différentielle homogène du premier ordre.

Lorsqu'on ajoute à la force précédente celle qui a pour composante 0 et $\frac{-x^2}{y}$, on obtient la force $X = -2x$, $Y = -y$, et les équations du mouvement du point M sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -y.$$

Elles ont pour équations intégrales

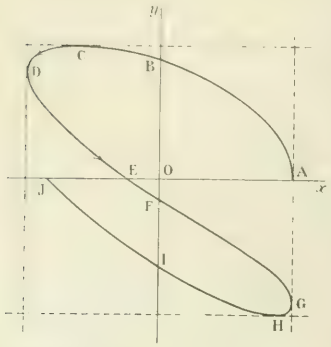
$$x = A\cos t\sqrt{2} + B\sin t\sqrt{2}, \qquad y = A'\cos t + B'\sin t.$$

Or, pour $t = 0$, $x = 2a$, $y = 0$; donc $A = 2a$, $A' = 0$; d'autre part, pour la même valeur de t, $t = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 2a$; donc B est nul et B′ égal à $2a$.

Les équations du mouvement sont donc

$$x = 2a\cos t\sqrt{2}, \qquad y = 2a\sin t.$$

La trajectoire est une courbe transcendante qui ne se ferme jamais et qui est tout entière inscrite dans un carré ayant l'origine pour centre et, pour sommets, les points $x = \pm 2a$, $y = \pm 2a$.



Les valeurs particulières de t qui correspondent à y sont 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π. Celles qui correspondent à x sont

$$0,\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \frac{3\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{2\pi}{\sqrt{2}},\ \frac{5\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

En ne prenant que les valeurs de t comprises entre 0 et 2π et les classant toutes, on a la suite :

$$0,\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2\sqrt{2}},\ \frac{2\pi}{\sqrt{2}},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2\sqrt{2}},\ 2\pi.$$

Pour la première, $y = 0$, $x = 2a$, la courbe part du point A ; pour la seconde, $x = 0$, y positif et un peu inférieur à $2a$, la courbe passe au point B. Les autres valeurs correspondent aux points C, D, E, F, G, H, I, J, K. Le point E est voisin du point O, parce que $\pi\sqrt{2}$ (en degrés, 253° environ) est voisin de $\frac{3\pi}{2}$. Le point J est plus loin du point O, parce que $2\pi\sqrt{2}$ est voisin de 3π. La courbe est dès lors aisée à tracer.

G. DEPERROIS, 21e d'infanterie à Évreux.

Bonnes solutions : MM. H. Faure, lycée de Clermont-Ferrand ; A. Courtois, à Avesnes-sur-Helpe ; L. Simon, à Fourmies ; L. Naucelle, à la Châtre ; Jouglens ; A. Rousseau.

Assez bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; Dodier et Ulmann, à Héricourt ; G. Singier, à Houplines ; H. Frobert, à Paris ; E. Rouge, à Ste-Barbe ; A. Joublain ; G. Betier, à Poitiers.

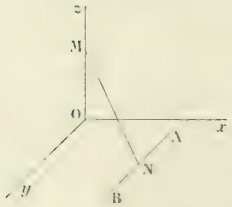
CONCOURS DE 1913 (*Suite.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Cours préparatoires (*Candidats français et candidats étrangers.*)

Mathématiques.

I. — **2163**. Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$, et, dans le plan des xy, une droite AB parallèle à Oy. On considère les droites MN qui s'appuient sur Oz et sur AB et qui font avec Oz un angle donné.



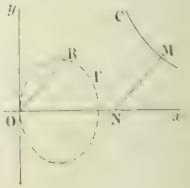
1° Trouver l'équation de la surface décrite par ces droites.

2° Dire la nature des sections de cette surface par des plans parallèles au plan des yz.

3° Trouver le lieu des asymptotes de ces sections.

4° Trouver le lieu des foyers de ces sections.

II. — **2164** Soient, en axes rectangulaires, une courbe C et sa normale MN limitée à Ox.



On mène par O une droite OB égale et parallèle à NM. Déterminer la courbe C par la condition que le point B décrive une conique Γ ayant son sommet en O et son axe suivant Ox.

On commencera par traiter le cas simple où la conique Γ est une parabole.

On prendra ensuite le cas général où la conique Γ est : $x = a \pm \sqrt{a^2 - my^2}$.

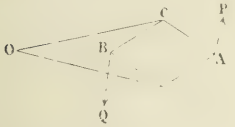
Discuter la forme de C suivant les valeurs de a et de m.

(27 mai, de 8 h. à midi.)

I. — **2165** Un point se meut de telle façon que sa vitesse varie proportionnellement au rayon vecteur r

issu d'un centre fixe, et que son accélération passe par ce centre. Exprimer, en fonction du temps, le rayon r et l'angle qu'il forme avec une direction fixe. Déterminer la trajectoire. Calculer, en fonction de r, la grandeur de l'accélération totale, celle de l'accélération centripète, celle du rayon de courbure. Trouver enfin l'hodographe.

II. — **2166**. Sur un plan horizontal parfaitement poli repose un système de six tiges dont quatre constituent un losange ABCD, tandis que les deux autres, OC et OD, égales entre elles, peuvent tourner autour du point fixe O. Des articulations placées aux divers points d'assemblage permettent au système de se déformer librement. On applique en A, dans le plan de la figure, une force donnée P, et l'on demande quelle force Q il faut en même temps appliquer en B pour que ce système demeure en équilibre.



Calculer les tensions de six tiges.

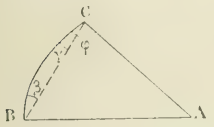
[On admet que la présence de chaque tige équivaut à deux forces, égales et opposées, appliquées à ses deux extrémités, et l'on appelle tension de la tige la valeur commune de ces forces.]

(29 mai, de 8 h. à midi.)

Calcul.

2167. — Dans la figure ABC, on donne :

$$AB = 252^m,35$$
$$AC = 195^m,28$$
$$\widehat{A} = 31^{gr},4265$$



La courbe BC est un arc de parabole ayant B pour sommet et BA pour axe.

Calculer :

1° La surface ABC ;

2° L'angle φ que fait en C l'arc de parabole avec la droite AC ;

3° Les angles β et γ que fait en B et C l'arc de parabole avec la corde BC.

(26 juin, de 3 h. à 4 h. 1/2.)

Physique.

I. — Etablir et discuter la formule des lentilles minces.

II. — Pour représenter la compressibilité de l'air à température constante, on utilise, au lieu des réseaux habituels d'isothermes, un diagramme dans lequel on porte en ordonnées le poids spécifique de l'air (poids en kilogrammes de 1 mètre cube) et en abscisses la pression (exprimée en kilogrammes par centimètre carré).

1° Tracer dans ce diagramme les isothermes de 0 et de 100 degrés centigrades, l'air étant supposé suivre les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ;

2° Indiquer l'allure générale qu'ont dans ce diagramme les isothermes de l'air, lorsque l'on ne fait plus cette approximation, mais que l'on tient compte de la compressibilité réelle du fluide, notamment sous les fortes pressions ou aux basses températures. On examinera le cas d'une isotherme à la température ordinaire et celui d'une isotherme à une température inférieure à la température critique. On donnera les explications nécessaires pour justifier l'allure adoptée pour les isothermes ; on ne se préoccupera pas du tracé *exact* de ces courbes.

III. — **2168**. Une sphère conductrice de 1^{cm} de rayon, éloignée de tout autre conducteur, est portée à un potentiel de 50 unités électrostatiques C. G. S, par rapport au sol. On demande :

1° La charge en coulombs prise par la sphère ;

2° L'intensité du champ électrique en unités C. G. S. dans le voisinage immédiat de la sphère et à une distance de 10^{cm} du centre de la sphère ;

3° La valeur de la pression électrostatique sur la sphère, évaluée en millimètres de mercure ;

4° La force en grammes qui tendrait à séparer sous l'action de cette pression les deux moitiés de la sphère, si celle-ci était coupée suivant un plan diamétral.

(30 mai, de 8 h. à midi.)

Chimie.

I. — Décrire et comparer l'action des acides azotique, chlorhydrique et sulfurique sur les métaux usuels suivants : zinc, fer, étain, plomb, cuivre.

(On se bornera au cas des acides agissant isolément.)

II. — Acide sulfhydrique : préparations usuelles ; propriétés physiques et chimiques ; composition ; usages.

III. — **2169**. On fait passer un mélange de formène et d'éthylène dans un tube contenant de l'oxyde de cuivre chauffé au rouge, puis dans une série de tubes à ponce sulfurique et à potasse.

On observe une augmentation de poids de 3^g pour les tubes à ponce sulfurique, et de 6^g pour les tubes à potasse.

On demande de déduire de ces résultats :

1° Le volume du mélange gazeux initial, mesuré à 0° et sous la pression de 760^{mm} ;

2° La composition en volume de ce mélange.

(On prendra pour poids atomiques : $O = 16$; $H = 1$; $C = 12$; pour densité de l'oxygène : 1,1052 ; pour poids du litre d'air à 0° et 760^{mm} : $1^g,293$.)

(26 mai, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

I. — **2170.** Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, on considère la surface (S) définie par l'équation

$$z = xy + x^3$$

et la droite (D) définie par les équations

$$y = b, \qquad z = c,$$

où b et c sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit, cette droite (D) restera fixe.

1° Montrer que la surface (S) est réglée et trouver ses génératrices.

2° A chaque génératrice rectiligne (G) de la surface (S) on fait correspondre le plan (P) mené par la droite (D) et parallèle à la symétrique de (G) par rapport au plan xOy. Déterminer le lieu du point d'intersection de (G) et de (P), quand la droite (G) décrit la surface (S).

Montre que ce lieu est une courbe (C) située sur une quadrique (Q) et déterminer cette quadrique.

3° Former l'équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec un plan donné par son équation $ux + vy + wz + s = 0$.

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4, de quatre points de la courbe (C) pour que ces quatre points soient dans un même plan.

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses x_1, x_2, x_3, de trois points de la courbe (C) pour que ces trois points soient en ligne droite.

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). Montrer que les droites qui coupent (C) en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique (Q).

5° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe (C) en trois points donnés se coupent sur la courbe (C) est que ces trois points soient en ligne droite.

6° Par un point quelconque M de la courbe (C) il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe (C) au point M et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient M′ et M″ les seconds points de contact de ces deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe (C) en M′ et M″.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses de trois points M, M′, M″ de la courbe (C) pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe (C) ?

7° Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points M, M′, M″, de la courbe (C) satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse ξ du quatrième point d'intersection μ de la courbe (C) avec le plan (Π) déterminé par les points M, M′, M″.

Calculer, en fonction de ξ, les coefficients de l'équation du plan (Π) et les coordonnées du point de concours A des tangentes à la courbe (C) aux points M, M′, M″. Ce point A sera dit le point associé au point μ de la courbe (C).

8° Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de b et de c, par rapport auxquelles le point A est le pôle du plan (Π) ; déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique (Q) déjà considérée.

Déterminer le lieu (Γ) du point A, ainsi que l'enveloppe du plan (Π), quand le point μ décrit la courbe (C).

9° A trois points quelconques en ligne droite μ_1, μ_2, μ_3, pris sur la courbe (C), sont associés les trois sommets A_1, A_2, A_3, d'un triangle inscrit dans la courbe (Γ). Déterminer, en supposant $b = 0$, l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite $\mu_1\mu_2\mu_3$ varie. Montrer que, dans la même hypothèse $b = 0$, le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ passe par deux points fixes.

(*Durée : 6 heures.*)

II. — **2171**. On donne deux axes rectangulaires et on considère l'équation différentielle

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales C, dont l'équation est de la forme $y^2 = f(x)$, $f(x)$ désignant un polynome en x. Ecrire l'équation générale des courbes C ; montrer que, par tout point du plan, il passe soit une, soit trois courbes C, et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois ; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes C qui passent par l'un d'eux soient orthogonales ;

2° On donne le point A($x = 0,5$; $y = 0$). Soit P celle des courbes C qui passe par A et tourne sa concavité vers la partie positive de l'axe Ox ; soit B le point de la courbe P qui a pour ordonnée $\sqrt{6}$. Soit Q celle des courbes C passant par B et qui tourne sa concavité vers les x négatifs ; soit enfin A′ le point où cette courbe coupe l'axe Ox. Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes AB, BA′, et l'axe Ox.

3° Un point mobile, partant de A, parcourt successivement l'arc AB de P, puis l'arc BA′ de Q. Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à 1 ; au point B on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à 0,1 près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc ABA′.

4° Au point B, l'accélération du mobile subit une discontinuité. Calculer par ses projections sur les deux axes de coordonnées la variation géométrique du vecteur-accélération au point B.

(*Durée : 4 heures.*)

Physique.

I. — Courbes d'Andrews, point critique.

II. — **2172**. Un puissant aimant permanent, A, est équivalent à l'ensemble de deux pôles magnétiques distants de 8 centimètres. Cet aimant est fixé sur une règle graduée, la direction de cette règle et celle de la ligne des pôles de l'aimant sont horizontales et dans le plan du méridien magnétique.

1° Une petite boussole, B, dont l'aiguille est horizontale, peut être déplacée le long de la règle graduée, et l'on constate que son aiguille se retourne lorsqu'elle passe à 60 centimètres du milieu de l'aimant A. On demande quel est le moment magnétique de cet aimant A sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre, mesurée à 1 ou 2 p. 100 près, vaut 0,2 (C. G. S.). Est-il légitime de faire ce calcul en assimilant l'aimant A à un aimant infiniment court ?

2° On fait tourner la règle graduée d'un petit angle autour de la verticale passant par le centre de la boussole B, de manière que le déplacement du centre de l'aimant A, que l'on mesure à 1 millimètre près, soit de 5 centimètres. Quelle est alors la direction de l'aiguille dans la boussole B ? Si l'on fait osciller cette aiguille autour de sa position d'équilibre, quelle sera la période des oscillations, sachant qu'en l'absence de l'aimant A, la période des oscillations dans le champ terrestre serait de 1 seconde ?

3° On replace ensuite la règle graduée et l'aimant A dans leur position primitive, et l'on retire la boussole B pour lui substituer un pendule constitué par un aimant C identique à A, dont la ligne des pôles est verticale dans la position d'équilibre. On fait osciller ce pendule autour d'un axe perpendiculaire au plan du méridien magnétique, et la période des oscillations est de 12 secondes. Cette période devient 10 secondes lorsque l'on désaimante l'aimant oscillant C. On sait en outre que l'inclinaison du champ magnétique terrestre au lieu considéré est de 60 degrés.

Déduire de là quelle serait la période des oscillations si l'on aimantait à nouveau C exactement de la même manière, mais en sens inverse ; et quel est le moment d'inertie du pendule C par rapport à son axe de suspension. Déterminer enfin quelle serait, avec cette nouvelle aimantation, la position d'équilibre que prendrait le pendule C si l'on supprimait l'aimant A.

(*Durée : 6 heures.*)

Épure.

2173. — *Solide de révolution engendré par une ellipse.* — L'ellipse est horizontale ; son centre est situé à 10^{cm} de chaque plan de projection. Sur l'épure, les projections de ce centre sont sur le grand axe de la feuille, symétriques par rapport au petit axe. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à la ligne de terre ; il vaut 20^{cm} ; le petit axe vaut 8^{cm}.

L'axe de révolution passe par le centre de l'ellipse. Il est de front, incliné à 45° sur le plan horizontal. On s'élève sur cet axe de droite à gauche.

1° Représenter le *volume* engendré par la *surface* de l'ellipse.

2° Déterminer les ombres produites sur ce solide, tant à l'extérieur qu'à l'intérieur. Les rayons lumineux sont perpendiculaires au second bissecteur. La lumière vient d'en haut.

Faire un cadre de 28 × 14cm.

On ne demande aucune explication écrite.

(*Durée : 1 heures.*)

Groupe II.

Mathématiques.

I. — **2174.** On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Un point matériel M, de masse égale à 1, est mobile dans ce plan sous l'action d'une force (F) dont les projections X et Y sur les axes sont $X = x, \qquad Y = y - kx,$
x et y désignant les coordonnées du point M.

1° Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point M.

2° Déterminer le mouvement du point M en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont $(\alpha, 0)$ et que sa vitesse a pour projections sur les axes $(-\alpha, 2\alpha)$. Construire la trajectoire (T) correspondant à ce mouvement.

3° Evaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque M de sa trajectoire (T) au point M' où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur OM.

4° Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire (T) et calculer à 0,01 près le rapport d'homothétie.

5° La trajectoire (T) passe par le point O. Evaluer, en fonction de l'abscisse du point M, l'aire limitée par l'arc de courbe OM et la corde OM, ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de Oy.

II. — **2175.** Evaluer à 0,01 près les intégrales

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}.$$

(*Durée : 4 heures.*)

Physique.

I. — Définition et principe de la mesure des principales grandeurs photométriques. (Il est inutile de décrire des photomètres.)

II. — **2176.** Pour déterminer le moment magnétique d'une longue tige aimantée, on l'a suspendue par son centre de gravité, et l'on a fait glisser sur la tige une bague d'une masse de 1 décigramme. En mettant cette bague à 50 centimètres du centre de gravité, la tige aimantée placée horizontalement est restée en équilibre. On a aussi mesuré l'inclinaison du champ magnétique terrestre $I = 60°$; et l'on a encore trouvé que la composante horizontale du champ terrestre vaut $H = 0{,}2$ (C. G. S.) à environ 1 p. 100 près, l'accélération de la pesanteur étant $g = 981$ (C. G. S.).

On a construit d'autre part un long solénoïde cylindrique formé d'une seule couche de fil, dont les spires circulaires, au nombre de mille, ont 5 centimètres de rayon et sont distantes de 1 millimètre. Un courant de 2 ampères passe dans ce solénoïde. On demande d'abord quelle surcharge il faudrait placer à l'extrémité de ce solénoïde pour que, en le suspendant par son centre de gravité, son axe puisse rester horizontal malgré l'action du champ terrestre.

On dispose ensuite la tige aimantée suivant l'axe du solénoïde de manière que la moitié environ de la tige soit encore à l'extérieur.

En admettant que le pôle de l'aimant intérieur au solénoïde puisse être assimilé à une masse magnétique ponctuelle, on demande de calculer en grammes poids la force exercée par le solénoïde sur ce pôle. On calculera également la force exercée par ce pôle sur la spire du solénoïde la plus voisine.

Dans une dernière expérience, on imprime à l'aimant un mouvement pendulaire rectiligne suivant l'axe du solénoïde. La période du mouvement est de 1 seconde, et la distance des positions extrêmes est de 1 centimètre. On demande d'exprimer la loi de variation en fonction du temps de la force électromotrice induite dans le solénoïde, et de calculer la valeur de cette force électromotrice au moment de son maximum.

(*Durée : 6 heures.*)

Chimie.

I. — Azotates naturels et synthétiques.

Extraction, préparation, purification; propriétés physiques et chimiques; caractères analytiques.

II. — Acide azotique.

Préparation, purification; propriétés physiques et chimiques : insister particulièrement sur ses éthers-sels et sur les dérivés organiques nitrés.

N. B. — Au cours de son exposé, le candidat ne négligera jamais de faire ressortir l'importance des dérivés de l'acide azotique au triple point de vue industriel, agricole et militaire.

(*Durée : 4 heures.*)

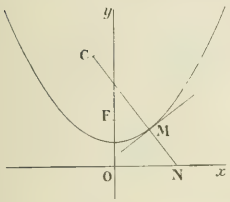
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1912 (*Suite*).

Algèbre et analyse (Suite).

2083. — *Démontrer que le rayon de courbure en un point d'une parabole est le double de la portion de normale comprise entre ce point et la directrice (rapporter la parabole à sa directrice Ox et à son axe Oy).*



Soit une parabole ayant pour axe Oy et pour directrice Ox; si nous désignons par p l'ordonnée du foyer, l'équation de la courbe est

$$x^2 + (y - p)^2 = y^2, \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{x^2 + p^2}{2p}.$$

Menons la normale au point $M(x, y)$ de la courbe; soit N le point où elle rencontre Ox, et soit C le centre de courbure au point M. Les deux points N et C sont de part et d'autre du point M, et pour établir que $MC = 2MN$, il faut démontrer que $\overline{NC} = 3\overline{NM}$, ou que l'ordonnée y_1 du point C est égale à $3y$.

Or on a

$$y_1 = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad \text{puis} \qquad y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p}, \qquad 1 + y'^2 = \frac{x^2 + p^2}{p^2}.$$

On en déduit

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{x^2 + p^2}{p} = 2y, \qquad \text{et} \qquad y_1 = 3y.$$

Remarque. — On peut établir que cette propriété est caractéristique de la parabole, ou avec plus de précision, que toute courbe telle qu'on ait $\overline{NC} = 3\overline{NM}$, ou $y_1 = 3y$, est une parabole qui a pour directrice Ox.

En effet, en remplaçant y_1 par $y + \frac{1 + y'^2}{y''}$, la relation $y_1 = 3y$ s'écrit $2yy'' = 1 + y'^2$.

On en déduit
$$\frac{2y'y''}{1 + y'^2} = \frac{y'}{y},$$

ou en intégrant
$$L(1 + y'^2) = L\frac{y}{a}, \qquad \text{et} \qquad 1 + y'^2 = \frac{y}{a},$$

a étant une constante arbitraire.

Remplaçons maintenant y' par $\frac{dy}{dx}$, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y-a}{a}, \qquad dx = \pm\frac{\sqrt{a}\,dy}{\sqrt{y-a}}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$x - x_0 = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{y-a}, \qquad \text{ou} \qquad (x-x_0)^2 = 4a(y-a),$$

ou encore

$$(x-x_0)^2 + (a-2a)^2 = y^2$$

Cette équation représente une parabole ayant pour directrice Ox.

G. LACH, à Douai.

Données solutions par MM. Gaston Butier, 2e d'artillerie, à Poitiers ; R. Dufresne, lycée Charlemagne ; R. Manen, à Albi ; A. Le Mercrand, à Paris ; L. Nalefile, à La Châtre ; M. Roux, instituteur, à Chalon sur Saône ; N. Savary, 61e d'artillerie ; Petre Stefanescu, lycée de Severin (Roumanie) ; L. Simon, à Fourmies ; Gaston Singier, à Houplines ; Marcel Ulmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

Calcul numérique.

2084. — *Soit la fonction* $y = \sin \pi x - x^4$, *où* x *est* > 0.

1° *On demande de dire combien il y a de racines positives et plus grandes que zéro de la fonction* y : *il y en a une au moins.*

2° *Soit* x_1 *une de ces racines : on demande de la calculer de façon que* πx_1 *soit connu en grades à un centième de grade près.*

On s'aidera de la table de logarithmes.

Les racines positives de la fonction $f(x) = \sin \pi x - x^4$ sont évidemment comprises entre 0 et 1, puisque cette fonction est négative pour toute valeur de x plus grande que 1.

Si l'on construit les arcs des deux courbes $y = \sin \pi x$, $y = x^4$, correspondant aux valeurs de x comprises entre 0 et 1, on voit sans difficulté que ces arcs ont un seul point commun, et l'abscisse de ce point est l'unique racine positive de la fonction $f(x)$.

D'autre part, on a

$$f(1) = \sin \pi - 1 < 0, \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{5}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{6^4 - 2.5^4}{6^4} > 0\,;$$

par suite la racine est comprise entre $\frac{5}{6}$ et 1.

Soit u la valeur de πx en grades, on a $\pi x = \frac{\pi u}{200}$, ou $x = \frac{u}{200}$, et l'équation devient

$$\sin u - \frac{u^4}{200^4} = 0,$$

ou en prenant les logarithmes dans le système à base 10,

$$\varphi(u) = \log \sin u - 4 \log u + 4 \log 200 = 0.$$

Aux valeurs de x égales à $\frac{5}{6}$ et 1 correspondent les valeurs de u égales à $\frac{5 \times 200}{6} = 166{,}66\ldots$ et 200, et comme les fonctions $\varphi(u)$ et $f(x)$ varient dans le même sens, on a

$$\varphi\left(\frac{5 \times 200}{6}\right) > 0, \qquad \varphi(200) < 0.$$

Calculons d'abord la racine à 1 grade près. Nous avons

$$\varphi(167) = \log \sin 167 - 4 \log 167 + 4 \log 200.$$

$$\begin{aligned} \log \sin 167 &= \log \sin 33 = 1{,}69501 \\ -4 \log 167 &= \bar{9}{,}40912 \\ 4 \log 200 &= 9{,}20412 \\ \hline \varphi(167) &= 0{,}00825 > 0. \end{aligned}$$

La racine est supérieure à 167. Substituons 168.

$$\begin{aligned} \log \sin 168 = \log \sin 32 &= \bar{1},68283 \\ -4 \log 168 &= \bar{9},09876 \\ 4 \log 200 &= 9,20412 \\ \hline \varphi(168) &= \bar{1},98571 = -0,01429 < 0. \end{aligned}$$

La racine est plus petite que 168, elle est comprise entre 167 et 168. Pour avoir la racine à $\frac{1}{100}$ de grade près, on peut continuer les substitutions, car les calculs sont fort simples.

Calcul de $\varphi(167,3)$

$$\begin{aligned} \log \sin 167,3 &= \bar{1},69140 \\ -4 \log 167,3 &= \bar{9},10600 \\ 4 \log 200 &= 9,20412 \\ \hline \varphi(167,3) &= 0,00152 > 0. \end{aligned}$$

Calcul de $\varphi(167,4)$

$$\begin{aligned} \log \sin 167,4 &= \bar{1},69019 \\ -4 \log 167,4 &= \bar{9},10496 \\ 4 \log 200 &= 9,20412 \\ \hline \varphi(167,4) &= \bar{1},99927 < 0. \end{aligned}$$

La racine est comprise entre 167,3 et 167,4.

Calcul de $\varphi(167,36)$

$$\begin{aligned} \log \sin 167,36 &= \bar{1},69067 \\ -4 \log 167,36 &= \bar{9},10536 \\ 4 \log 200 &= 9,20412 \\ \hline \varphi(167,36) &= 0,00015 > 0, \end{aligned}$$

Calcul de $\varphi(167,37)$

$$\begin{aligned} \log \sin 167,37 &= \bar{1},69055 \\ -4 \log 167,37 &= \bar{9},10528 \\ 4 \log 200 &= 9,20412 \\ \hline \varphi(167,37) &= \bar{1},99995 < 0. \end{aligned}$$

La racine est comprise entre 167,36 et 167,37. Sa valeur à $\frac{1}{100}$ de grade près par défaut est 167,36.

La valeur de x correspondante est $x = \frac{167,36}{200} = 0,8368$.

Marcel ULLMANN, 47e d'artillerie, à Héricourt.

Mécanique.

2085 — *Quelles sont les surfaces de niveau pour un champ de forces où un point de masse m est soumis à la fois à l'action de la pesanteur mg et à celle d'une force constante $m\mathrm{K}$ émanée d'un centre fixe ?*

Prenons comme origine le centre fixe, comme axe des z la verticale ascendante, et comme axes des x et des y deux droites quelconques formant avec Oz un trièdre trirectangle.

Le point $\mathrm{M}(x, y, z)$ est soumis à l'action d'une force centrale dont les projections sont $-\frac{m\mathrm{K}x}{r}$, $-\frac{m\mathrm{K}y}{r}$, $-\frac{m\mathrm{K}z}{r}$, r désignant la distance OM ; il est soumis également à l'action de la pesanteur dont les projections sont $0, 0, -mg$. Par suite, la résultante de ces deux forces a pour projections

$$\mathrm{X} = -\frac{m\mathrm{K}x}{r}, \qquad \mathrm{Y} = -\frac{m\mathrm{K}y}{r}, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{m\mathrm{K}z}{r} - mg.$$

Nous en tirons

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = -\frac{m\mathrm{K}(xdx + ydy + zdz)}{r} - mgdz.$$

ou, en remarquant que $xdx + ydy + zdz = rdr$,

$$Xdx + Ydy + Zdz = -mKdr - mgdz.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction des forces U, définie par

$$U = -m(Kr + gz) = -m(K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + gz),$$

et par suite l'équation générale des surfaces de niveau est

$$K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + gz = h,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{K^2}(gz - h)^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{g^2}{K^2}\left(z - \frac{h}{g}\right)^2$$

Cette équation représente le lieu des points dont le rapport des distances à l'origine et au plan (P), $z - \frac{h}{g} = 0$, est constant et égal à $\frac{g}{K}$.

Ce lieu est une quadrique de révolution autour de Oz, dont la méridienne dans le plan des zx a pour foyer l'origine, pour directrice la droite (D), $z - \frac{h}{g} = 0$, et pour excentricité $\frac{g}{K}$. Cette conique a pour axe focal Oz.

Donc si $g < K$, la conique est une ellipse, et les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution allongés ;

si $g > K$, ce sont des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ;

si $g = K$, ce sont des paraboloïdes de révolution.

Cas particulier. — Si $h = 0$, la conique se réduit à deux droites, et la surface à un cône de révolution. Ce cône n'est réel que si $g > K$.

André Courtois, à Avesnes-sur-Helpe (Nord).

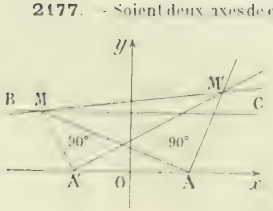
Bonnes solutions par MM. J. Dagnaux, à Dijon ; G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fourmies-en Weppes ; Marcel Ullmann, 67e d'artillerie, à Héricourt.

CONCOURS DE 1913

ÉCOLE CENTRALE

Géométrie analytique.

2177. — Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy ; sur Ox, un point A d'abscisse positive donnée a et un point A′ d'abscisse négative $-a$. On considère la droite BC dont l'équation est $y - a = 0$, et un point M d'abscisse λ sur cette droite. On mène la droite MA et, en A, la perpendiculaire AM′ à AM ; puis la droite MA′ et, en A′, la perpendiculaire A′M′ à MA′. On demande de résoudre, dans l'ordre que l'on voudra, les deux questions suivantes :

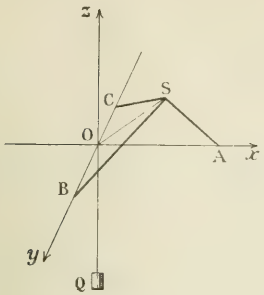


1° Lorsque λ varie, trouver et construire le lieu du point M′ ;

2° Exprimer en fonction de λ les coordonnées du point de contact de la droite MM′ avec son enveloppe, et construire cette enveloppe en faisant varier λ.

Mécanique.

2178. — Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, dont l'un Oz est vertical et dirigé positivement en sens contraire de la pesanteur. On donne, sur Ox, le point A d'abscisse positive a ; sur Oy,



le point B d'ordonnée positive $\frac{a}{2}$ et le point C d'ordonnée négative $-\frac{a}{3}$. Soit, en outre, un point S de coordonnées $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{a}{2}$. On considère trois barres SA, SB, SC, rectilignes, homogènes, de poids respectifs connus P, P′, P″ et dont on néglige les épaisseurs. Elles sont soudées en S et forment un trièdre de figure invariable qui s'appuie sur le plan xOy, supposé non-déformable, aux points A, B, C.— Au point S est attaché un cordon de poids négligeable qui passe en O, sans frottement, sur une petite poulie fixe que l'on supposera réduite à ce point O. Ce fil est tendu par un poids Q. Il n'y a pas de frottement en B et en C, mais il y a en A un frottement de coefficient $f = 1$.

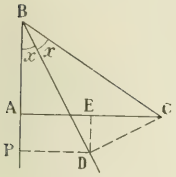
Trouver en fonction de P, P′, P″, la plus grande valeur de Q pour laquelle le trièdre peut rester en équilibre dans la position donnée et, pour cette valeur de Q, calculer les réactions du plan xOy en B et en C.

Effectuer les calculs, à un gramme près, sachant que $a = 60^{cm}$ et qu'un centimètre de longueur de chaque barre pèse 10^{g}.

(11 juin, de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

2179. — On considère un triangle ABC rectangle en A dont l'hypoténuse BC est égale à une longueur donnée a, et on prend sur la bissectrice intérieure de l'angle ABC une longueur BD égale à une longueur donnée l; on désigne par x la moitié de l'angle ABC.



1° Étudier la variation de la distance DE du point D au côté AC quand on fait varier x de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

2° Déterminer l'angle x de façon que le rapport $\frac{DC}{DP}$ des distances du point D au point C et au côté AB soit égal à un nombre donné K. Discuter.

Nota. — On pourra traiter ces deux parties dans l'ordre que l'on voudra.

(13 juin, de 3 h. à 5 h.)

Calcul.

2180. — On donne

$$a = 223,$$
$$b = 283,$$
$$c = 324,$$
$$m = 830.$$

Calculer au moyen de la règle à calcul :

1° Les nombres r, u, v, w définis par

$$r = \sqrt{\frac{abc}{m}}, \qquad u = \sqrt{\frac{mbc}{a}}, \qquad v = \sqrt{\frac{mca}{b}}, \qquad w = \sqrt{\frac{mab}{c}};$$

les cubes r^3, u^3, v^3, w^3 et les inverses $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$, de ces quatre nombres ;

2° Les plus petits angles positifs x, y, z tels que $\operatorname{tg} x = \frac{r}{a}$, $\operatorname{tg} y = \frac{r}{b}$, $\operatorname{tg} z = \frac{r}{c}$;

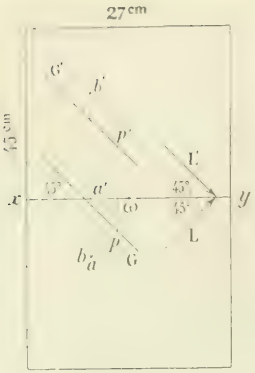
3° Les sinus et cosinus de ces trois angles x, y, z.

Avis : La composition de calcul est faite avec une règle à calcul de 26^{cm} environ. Défense d'apporter en même temps une table de logarithmes.

(14 juin, de 3 h. à 4 h.)

Épure.

2181. — Cadre 27^{cm} sur 45^{cm}. Ligne de terre xy (en trait noir fin) petit axe ; ω centre. Les plans de projection existent et sont opaques. Titre extérieur : Ombres. — Titre intérieur : Ellipsoïde et Paraboloïde.



Un ellipsoïde de révolution a pour axe le segment vertical $(ab, a'b')$; $oa' = 5^{cm}$, $aa' = 8^{cm}$, $a'b' = 14^{cm}$, le rayon de l'équateur a 5^{cm}. Une surface réglée est engendrée par une droite horizontale qui s'appuie sur $(ab, a'b')$ et sur la droite (G, G'); G fait un angle de 45° avec xy et est à une distance ap du point a égale à 5^{cm}; G′ est parallèle à G et la cote du point (p, p') est 7^{cm}.

La surface réglée divise l'ellipsoïde supposé solide et opaque en deux parties. On demande : 1° de représenter par ses projections la partie qui contient le point le plus à droite de l'ellipsoïde, 2° de trouver les ombres propres et portées relatives au corps précédent, les rayons lumineux étant parallèles à (L, L').

Les résultats seuls seront tracés à l'encre noire, traits pleins pour les lignes vues, points ronds pour les lignes cachées. Le reste sera dessiné à l'encre rouge en traits pleins (plutôt fins). On fera les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et les tangentes remarquables ; le trait rouge des tangentes trouvées sera un peu renforcé (en couleur) aux environs des points de contact ; *aucune flèche*.

On tracera tous les contours d'ombre qui existent, vus ou cachés, à l'encre noire (ou à l'encre bleue); hachures sur les ombres vues, différentes pour des surfaces différentes.

(12 juin, de 7 h. à 11 h.)

Physique.

I. — Lunette de Galilée.

II. — **2182.** Une masse m de fer de chaleur spécifique c sortant d'un four à T degrés est plongée dans l'eau d'un calorimètre à zéro dont la masse en eau est M ; la température finale du système se fixe à θ degrés ; on néglige toutes les pertes par rayonnement et autres. Au moment de l'immersion une masse x de l'eau est vaporisée à une température que l'on admet être de cent degrés.

S'il n'était pas tenu compte de cette évaporation le calcul donnerait une valeur erronée T′. On demande quel doit être le poids x pour que l'erreur commise ainsi soit de 5 0/0 sur l'évaluation de T.

Établir la formule définitive avant tout calcul numérique.

$m = 1\,400^{g}$. $M = 7\,534^{g}$. $c = 0,125$. $\theta = 15^{\circ}$. Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100° : $l = 537$.

Chimie.

I. — Propriétés physiques, chimiques, et composition de l'oxyde azoteux (appelé aussi protoxyde d'azote).

II. — **2183.** Première opération. — On prend un gramme d'un échantillon de fluorure de calcium naturel contenant comme seule impureté de la silice ; on le mélange intimement à un grand excès de silice. On ajoute au mélange de l'acide sulfurique concentré. On chauffe modérément ; il se dégage alors un gaz dont on mesure le volume :

1re Question. — Formulez la réaction ; décrivez l'opération telle que vous proposez de la réaliser, et faites un croquis de votre appareil.

2e Question. — Sachant que le volume du gaz dégagé, supposé ramené par le calcul à 0° et 76^{cm}, est égal à 100^{cm^3}, calculez le tant pour cent de fluor que contenait l'échantillon étudié.

Deuxième opération. — On répète la première opération, avec le même poids de matière, mais la totalité du gaz que produit la réaction est amenée en présence d'une solution concentrée de fluorure de potassium qui l'absorbe. Il se produit un précipité formé d'un seul composé défini (et non d'un mélange de plusieurs composés).

3e Question. — Formulez la réaction ; décrivez l'opération telle que vous proposez de la réaliser, et faites un croquis de votre appareil.

4e Question. — Admettez que l'on ait su peser ce précipité tout à fait insoluble, et calculez le poids que l'on a dû trouver.

Chaque candidat reçoit un tableau renfermant les poids atomiques des corps simples et la valeur du volume moléculaire des corps gazeux.

(11 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.)

ÉCOLE NAVALE

Algèbre, Analyse et Trigonométrie.

I. — **2184**. 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y - e^{mx},$$

où m désigne une constante donnée.

2° Déterminer l'intégrale y de cette équation qui prend pour $x = 0$ la valeur 0. Indiquer, suivant les différentes valeurs de m, la forme de la courbe (C) qui représente la variation de cette intégrale.

3° On considère la courbe (C) qui correspond à la valeur particulière $m = 2$, et une corde PQ de cette courbe parallèle à Ox. Calculer, en fonction de son ordonnée y, la longueur de cette corde PQ, ainsi que l'aire comprise entre cette corde et l'arc de courbe qu'elle sous-tend.

II. — **2185**. On considère l'équation

$$4x^3 \sin \alpha + 6x^2 \sin 2\alpha + 4x \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 0$$

où α désigne un angle donné.

1° Montrer que le premier membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$\rho[(x + \lambda)^4 - (x + \mu)^4],$$

où ρ, λ et μ désignent des constantes réelles ou imaginaires.

2° Résoudre l'équation donnée.

(17 juin ; durée : 3 heures.)

Géométrie analytique.

2186. — On considère deux paraboles (P) et (Q) rapportées à deux axes rectangulaires Ox, Oy, ayant l'une et l'autre le point O comme foyer et la droite Ox comme axe. Soit Δ la parallèle à Oy équidistante des directrices de ces paraboles; par un point M de Δ on mène les tangentes MA, MB à la parabole (P) et les tangentes MA′, MB′ à la parabole (Q), les lettres A, B, A′, B′ désignant les points de contact de ces tangentes.

1° Montrer que les ordonnées des points A et B sont les mêmes que celles des points A′ et B′ (dans la suite on appellera A′ le point qui a même ordonnée que le point A). Vérifier que les droites AA′, BB′ sont équidistantes du point M et que les droites AB, A′B′ se coupent sur Δ.

2° Démontrer que MB′ est perpendiculaire à MA, que MA′ est perpendiculaire à MB et que les droites AB′ et BA′ passent par le foyer O. Former l'équation du faisceau (F) de ces droites AB′ et BA′. Trouver la relation qui doit exister entre les ordonnées de deux points M et M′ de Δ pour que le faisceau (F) correspondant à M et le faisceau (F′), correspondant à M′ aient une droite commune.

3° Les normales à la parabole (P) dont les pieds sont A et B se coupent au point C ; les normales à la parabole (Q) dont les pieds sont A′ et B′ se coupent au point D. Trouver les équations des lieux décrits par les points C et D lorsque M parcourt Δ et construire les courbes correspondantes.

(18 juin ; durée : 3 heures.)

Mécanique.

I. — **2187**. *Statique.* — Une sphère homogène, de rayon R, de poids P, s'appuie sur un plan incliné parfaitement poli faisant avec l'horizon un angle α. Elle est retenue par un fil inextensible de longueur 3R attaché en un point A de sa surface et dont l'autre extrémité est un point fixe B situé à une distance 3R du plan. Le point B et la sphère sont au-dessus du plan.

Trouver la position d'équilibre, la tension et la réaction du plan. L'équilibre est-il toujours possible dans les conditions de l'énoncé ?

II. — **2188**. *Dynamique.* — Un point matériel M, de masse m, se meut sur une circonférence de rayon R ; l'arc parcouru s est défini par la relation

$$s = RL(1 + \alpha t),$$

α est une constante positive ; L désigne le logarithme népérien.

1° Déterminer la vitesse et les accélérations tangentielle et centripète à un instant t quelconque. Trouver l'hodographe du mouvement. (On pourra rapporter cette courbe à des coordonnées polaires.)

2° Soit F la force qui, en agissant seule sur le mobile, produirait le mouvement. Déterminer l'intensité de F en fonction de la vitesse v du mobile, et trouver l'angle de F et du vecteur vitesse.

3° On considère le déplacement du mobile entre l'instant initial $(t = 0)$ et l'instant t. Evaluer le travail

correspondant de F, et l'exprimer en fonction de la vitesse initiale V et de l'arc s parcouru par le mobile. Montrer qu'il tend vers une limite quand s croît indéfiniment.

4° Le rayon R étant 100 *mètres*, la masse m 100 *grammes*, la vitesse initiale 36 *kilomètres à l'heure*, trouver les valeurs à l'instant initial de la force vive du mobile et de la force F. Ces mesures seront données en unités industrielles (unités fondamentales : mètre, seconde, kilogramme-force).

(30 juin : durée : 3 heures.)

Calcul.

2189. — Calculer les trois angles x, y, z compris entre $-90°$ et $+90°$, satisfaisant aux relations

$$\sin x = \frac{\sin a \cos b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} + \sin b \cos a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin y = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

où l'on suppose

$$k = 0{,}31427,$$
$$a = 123° 48' 10'',$$
$$b = 51° 11' 20''.$$

(18 juin : durée : 2 heures.)

Epure.

La ligne de terre est le petit axe de la feuille. Un tétraèdre régulier dont l'arête a une longueur de quinze centimètres repose par une de ses faces sur le plan horizontal de projection ; cette face est située tout entière en avant de la ligne de terre, un de ses côtés est parallèle à cette ligne de terre à une distance de un centimètre et les projections de son centre se trouvent sur le grand axe de la feuille.

On considère la sphère qui passe par les milieux des arêtes du tétraèdre et on demande de représenter par ses projections la portion de cette sphère supposée solide qui est à l'intérieur du tétraèdre.

(19 juin : durée : 2 heures 1/2.)

Physique.

I. — **2190.** 1° Le tube de verre d'un baromètre normal est exactement cylindrique et a une section s à 0°. Il plonge verticalement dans le mercure d'une cuvette très large. La température étant 0° et la hauteur de la colonne barométrique étant H, on met la partie supérieure du tube en communication avec l'extérieur par une ouverture assez large pour que la pression atmosphérique puisse s'y exercer instantanément.

On demande d'exprimer en calories-gramme-degré la quantité de chaleur dégagée dans le mercure après cessation complète des mouvements provoqués par la chute de la colonne barométrique.

2° Comment ce résultat serait-il modifié si le tube était incliné sur la verticale d'un angle α assez petit cependant pour qu'il subsiste une chambre barométrique ?

3° Comment ce même résultat serait-il modifié si la cuvette, au lieu d'être très large, avait une section S à l'extérieur du tube ?

4° Comment serait-il encore modifié, l'appareil restant le même et pour la même pression atmosphérique, si la température était $t°$ au lieu de 0° ? On désignera par μ le coefficient de dilatation absolue du mercure et par λ le coefficient de dilatation linéaire du verre.

5° Les conditions initiales restant celles de la 1re question, on met la chambre barométrique en large communication, non plus avec l'atmosphère, mais avec un récipient de grand volume contenant de l'air sous une pression inférieure à celle de l'atmosphère et mesurée par une hauteur h de mercure à 0°. Quelle sera la chaleur dégagée dans le mercure après retour à l'équilibre ?

On fera l'application numérique pour la première question seulement, avec les données numériques suivantes :

$s = 1$ cm². H = 76 cm. Densité du mercure à 0° : $d = 13{,}6$.

Accélération de la pesanteur : $g = 981$.

Équivalent mécanique : $J = 4{,}18 \times 10^7$ ergs par calorie-gramme-degré.

II. — Détermination expérimentale des foyers et des plans principaux d'un système optique centré.

(17 juin : durée : 3 heures.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1912.

Mathématiques spéciales.

2077. — 1° *Si, dans une équation du troisième degré*

$$(1) \qquad z^3 - p_1 z^2 + p_2 z - p_3 = 0,$$

le coefficient p_1 *est nul, la fonction* $z_1^2 - z_2 z_3 = z_1^2 + z_2 z_3 + z_3^2$, *non symétrique par rapport aux lettres, est équivalente à une fonction symétrique des racines de l'équation. Le cas où* $p_1 = 0$ *est-il le seul où il existe un polynome homogène du second degré à trois variables qui jouisse de la même propriété?*

Le coefficient p_1 *n'étant pas nul, former l'équation* (2) *qui a pour racines les valeurs que prend la fonction* $x^2 + xy + y^2$ *quand on y remplace* x *et* y *par deux racines quelconques de l'équation* (1). *L'équation* (2) *peut-elle être équivalente à l'équation* (1) *dont on l'a déduite?*

2° *Les médianes d'un triangle* ABC *se coupant en un point* O, *on fait tourner ce triangle de* 60° *autour de* O *dans un sens et dans l'autre; on obtient ainsi deux nouvelles positions* A'B'C', A''B''C'' *du triangle* (A' *et* A'' *étant les nouvelles positions du point* A). *Soient* A'_1, A''_1 *les milieux de* BA', BA''; B'_1, B''_1 *les milieux de* CB', CB''; C'_1, C''_1, *les milieux de* AC', AC''; A'_2, A''_2, *les milieux de* CA', CA''; B'_2, B''_2, *les milieux de* AB', AB''; C'_2, C''_2, *les milieux de* BC', BC''. *Montrer que les angles* $A'_1OA''_1$, $A'_2OA''_2$, $B'_1OB''_1$, $B'_2OB''_2$, $C'_1OC''_1$, $C'_2OC''_2$ *ont même bissectrice et qu'il existe sur cette bissectrice deux points* ω', ω'' *symétriques par rapport à* O, *tels que les quadrilatères* $\omega'\omega''A'_1A''_1$, $\omega'\omega''A'_2A''_2$, $\omega'\omega''B'_1B''_1$, ... *soient inscriptibles.*

Démontrer qu'il existe un triangle $A_1B_1C_1$ *homothétique du triangle* ABC *par rapport à* O *et tel que, si l'on prend les inverses* A_2, B_2, C_2 *des sommets* A_1, B_1, C_1, *le pôle d'inversion étant soit* ω', *soit* ω'', *le centre des moyennes distances des points* A_2, B_2, C_2 *est soit* ω', *soit* ω''.

(*On pourra représenter les différents points par leurs affixes, rapportées à un système d'axes rectangulaires ayant* O *pour origine, et utiliser la propriété indiquée au n° 1.*)

3° *On considère les triangles* ABC *variables, tels que les points* ω', ω'' *qui leur correspondent soient fixes et pour lesquels le produit des longueurs des médianes est donné. Trouver le lieu des sommets de ces triangles.* (*On pourra se borner à construire ce lieu dans le cas où les données sont telles que l'un des triangles* ABC *ait deux sommets confondus.*)

Étant donné un point A *du lieu, construire le triangle* ABC *qui lui correspond.*

1. Si p_1 est nul, il est évident que la fonction des racines $u = z_1^2 - z_2 z_3$ est égale à $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_2 z_3$; pour le voir, il n'y a qu'à remplacer z_1 par $-(z_2 + z_3)$ dans l'expression de u. On a donc alors

$$2u = z_1^2 - z_2 z_3 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_3 = \Sigma z_1^2,$$

ce qui montre bien que u est une fonction symétrique des racines; dans le cas actuel, $u = -p_2$.

Considérons maintenant un polynome homogène et du second degré en z_1, z_2, z_3

$$u = az_1^2 + bz_2^2 + cz_3^2 + 2a'z_2z_3 + 2b'z_3z_1 + 2c'z_1z_2;$$

s'il est équivalent à une fonction symétrique des racines de l'équation du troisième degré, il ne doit pas changer par l'échange de z_1 avec z_2 et nous aurons aussi

$$u = az_1^2 + bz_1^2 + cz_1 + 2a'z_1z_2 + 2b'z_1z_2 + 2c'z_1z_2.$$

par suite,
$$a(z_1 - z_2) + b(z_1^2 - z_2^2) + 2a'z_2(z_1 - z_2) + 2b'z_2(z_1 - z_2) = 0.$$

Supposons maintenant que l'équation ne soit pas une équation particulière ayant une racine double; nous pourrons diviser par $z_1 - z_2$ et nous aurons

$$a + b(z_1 + z_2) + 2(b' + a')z_2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (a + bp_1) + 2(b' + a')z_2 = 0.$$

Or ici z_3 désigne évidemment l'une quelconque des racines de l'équation du troisième degré; nous devrons donc avoir

$$a + bp_1 = 0, \qquad 2(b' + a') + b = 0.$$

Si p_1 n'est pas nul, nous aurons $b = a$ et $b' = a'$; de même, $c = a$, $c' = a'$; le polynome u est alors un polynome symétrique.

Si $p_1 = 0$, nous avons aussi

$$2(b' + a') + b = 0;$$

nous aurons de même

$$2(c' + b') + c + b = 0 \qquad \text{et} \qquad 2(a' + c') + a + c = 0.$$

Il est facile de voir que ces trois relations se réduisent à deux et que deux des six coefficients se déterminent à l'aide des quatre autres. En tenant compte de l'homogénéité du polynome par rapport aux six coefficients, nous voyons qu'il y a une triple infinité de tels polynomes, non symétriques par rapport aux lettres, mais équivalents à des fonctions symétriques des racines de l'équation du 3e degré. Ceci n'a lieu d'ailleurs que dans le cas où p_1 est nul.

Les polynomes indiqués au début de l'énoncé : $z_1^2 - z_2z_3$, $z_2^2 - z_1z_3$, $z_3^2 - z_1z_2$, $z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2$, etc., sont des cas particuliers de ceux que nous venons d'obtenir. Il est facile alors, en faisant $a = 1$ et remplaçant b par $1 + 2(a' - b')$, c par $1 + 2(a' - c')$, de vérifier que tous ces polynomes sont équivalents à des fonctions symétriques.

Appelons maintenant x, y, z les trois racines de l'équation et cherchons celle qui admet pour racines les valeurs de

$$t = x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy.$$

Nous avons
$$x + y = p_1 - z, \qquad xy = \frac{p_3}{z},$$

et
$$t = (p_1 - z)^2 - \frac{p_3}{z} = \frac{z^3 - 2p_1z^2 + p_1^2z - p_3}{z};$$

puis, comme $z^3 - p_1z^2 + p_2z - p_3 = 0$,

$$t = \frac{-p_1z^2 + p_1z - p_2z}{z} = -p_1z + p_1^2 - p_2.$$

Il suffit donc de faire la transformation

$$z = \frac{p_1^2 - p_2 - t}{p_1},$$

ce qui donne l'équation du troisième degré en t

$$p_1^3 - p_2 - t)^3 - p_1^2(p_1^2 - p_2 - t)^2 + p_1^2p_2(p_1^2 - p_2 - t) - p_1^3p_3 = 0.$$

Cette équation, développée, s'écrit

$$t^3 - 2(p_1^2 - 3p_2)t^2 + (p_1^4 - 3p_2p_1^2 + 3p_3)t - (p_1^3p_3 - p_2^2 - p_1^2p_3) = 0,$$

et il n'y a plus qu'à l'identifier avec l'équation donnée pour obtenir les relations qui doivent exister entre p_1, p_2, p_3 :

$$2p_1^2 - 3p_2 = p_1^2, \qquad p_1^4 - 3p_1^2p_2 + 3p_3 = p_2^2, \qquad p_1^3p_3 - p_2^2 - p_1^2p_3 = p_3.$$

Ces relations nous donnent

$$p_2 = \frac{2p_1^2 - p_1^2}{3}, \qquad p_3 = \frac{p_1^2p_2^2 - p_2^3}{1 + p_1^2},$$

et enfin
$$p_1^3 - p_2(2p_1^2 - p_1^2) + \frac{(2p_1^2 - p_1^2)^2}{3} - \frac{2p_1^2 - p_1^2}{3} = 0;$$

cette dernière donne p_1 et les autres donnent ensuite p_2 et p_3.

Développons l'équation en p_1; elle s'écrit

$$p_1^3 - p_3^2 - p_1^2 + p_1 = 0,$$

puis

$$p_1(p_1 - 1)(p_1 + 1) = 0.$$

Elle donne successivement : $p_1 = 0$, $p_1 = 1$, $p_1 = -1$: mais puisque $p_1 \geq 0$, il n'y a que deux valeurs acceptables, les valeurs $p_1 = 1$ et $p_1 = -1$.

Pour $p_1 = 1$, nous avons $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{27}$ et l'équation en z est

$$z^3 - z^2 + \frac{z}{3} - \frac{1}{27} = 0;$$

la transformation est alors $z = \frac{2}{3} - t$: deux des racines, z et t, ont pour somme $\frac{2}{3}$. l'autre est égale à $\frac{1}{3}$, le produit zt a $\frac{1}{9}$, les trois racines sont égales à $\frac{1}{3}$. Ceci se vérifie immédiatement en remarquant que le polynome $z^3 - z^2 + \frac{z}{3} - \frac{1}{27}$ est le cube de $z - \frac{1}{3}$.

Pour $p_1 = -1$, nous voyons que p_2 est égal à 1 et que p_3 est indéterminé. L'équation est alors

$$z^3 + z^2 + z - p_3 = 0;$$

la transformation est la transformation identique $z = t$, et ceci est facile à expliquer, car nous avons évidemment

$$z_1^3 + z_1^2 + z_1 = z_2^3 + z_2^2 + z_2, \qquad \text{ou} \qquad z_1 - z_2(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 + z_1 + z_2 + 1) = 0.$$

Ceci nous montre que

$$z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 + z_1 + z_2 + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = z_1;$$

les trois valeurs de la fonction $x^2 + xy + y^2$ sont donc égales aux trois racines de l'équation proposée.

2. Les médianes des triangles ABC se coupant au point O, la somme des affixes de ces trois points, $z_1 + z_2 + z_3$, est nulle et ces trois nombres sont racines d'une équation du troisième degré de la forme $z^3 + p_2 z - p_3 = 0$. Nous savons alors que la quantité $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2$ est équivalente à une fonction symétrique des racines ; c'est donc un invariant relatif aux sommets du triangle. D'autre part, nous avons

$$I = z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = (z_1 - \alpha z_2)(z_1 - \alpha^2 z_2),$$

α et α^2 étant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, par exemple $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Appelons alors z_1' et z_1'' les affixes des points A′ et A″ ; nous aurons

$$z_1' = z_1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \qquad \alpha z_1' = -z_1;$$

nous aurons de même $\alpha^2 z_1'' = -z_1$; par suite, $z_1' = \alpha^2 z_1''$, $z_1'' = -\alpha z_1'$.

L'invariant I est donc égal à $(z_1' - z_1'')(z_2 - z_2')$.

Soient alors z' et z'' les affixes des milieux de BA′ et BA″ ; nous voyons que

$$I = 4z'z'', \qquad z'z'' = \frac{I}{4}.$$

et qu'en posant $z^2 = \frac{I}{4} = z'z''$, nous définirons un couple de points ω' et ω'', qui sera le même pour tous les couples de milieux, tels que A_1' et A_1''. Ces deux points sont symétriques par rapport au point O, sur la bissectrice de l'angle (OA_1', OA_1'') et à des distances de O égales à $\sqrt{|z'|\,|z''|} = \frac{1}{2}\sqrt{|I|}$.

Figurons alors les cinq points O, A_1', A_1'', ω' et ω''. Nous savons que

Fig 1.

$$\overline{A_1O\omega} = \overline{\omega'OA_1''} \qquad \text{et} \qquad \overline{O\omega'}^2 = OA_1.OA_1'';$$

par conséquent $\dfrac{O\omega'}{OA_1''} = \dfrac{OA_1''}{O\omega'}$ et les deux triangles $OA_1\omega'$, $O\omega'A_1''$ sont semblables, les angles 1 et 1, ainsi que 2 et 2, sont égaux ; l'angle ω' est donc le supplément de l'angle $A_1'O\omega$; de même l'angle ω'' est le supplément de l'angle $A_1'O\omega''$, et le quadrilatère $\omega'A_1''\omega''A_1'$ est inscriptible. Il en est de même de tous ceux qu'indique l'énoncé (*fig.* 1 et 2).

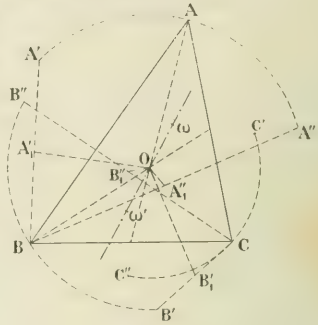


Fig. 2.

Soit λ le rapport d'homothétie du triangle $A_1B_1C_1$ au triangle ABC, les affixes des sommets de ce nouveau triangle sont $\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3$. D'autre part, appelons maintenant z_1' l'imaginaire conjugué de z_1, z_0 l'affixe du point ω' et z_0' son imaginaire conjugué, enfin k la puissance d'inversion ; nous aurons, pour transformer un point quelconque du plan,

$$Z - z_0 = \frac{k}{z' - z_0'}, \qquad Z = X + iY$$

étant l'affixe du point transformé de $z = x + iy$.

Appliquons aux trois points A_1, B_1, C_1, qui se transforment en A_2, B_2, C_2, et appelons Z_1, Z_2, Z_3 les affixes de ces nouveaux points ; nous aurons

$$Z_1 - z_0 = \frac{k}{\lambda z_1' - z_0'}, \qquad Z_2 - z_0 = \frac{k}{\lambda z_2 - z_0'}, \qquad Z_3 - z_0 = \frac{k}{\lambda z_3' - z_0'};$$

puis,

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - 3z_0 = \frac{k}{\lambda z_1 - z_0} + \frac{k}{\lambda z_2 - z_0} + \frac{k}{\lambda z_3 - z_0}.$$

Si nous voulons que le point ω' soit le centre des moyennes distances des trois points A_2, B_2, C_2, il faudra que $Z_1 + Z_2 + Z_3 - 3z_0 = 0$, ou

$$\frac{1}{\lambda z_1 - z_0} + \frac{1}{\lambda z_2 - z_0} + \frac{1}{\lambda z_3 - z_0} = 0;$$

ce qui donne

$$\lambda^2 \Sigma z_1 z_2 - 2\lambda z_0 \Sigma z_1 + 3z_0^2 = 0.$$

Or $\Sigma z_1' = 0$, $\Sigma z_1 z_2' = z_1 z_2 + z_0(z_1 + z_2) = z_1 z_2 - (z_1 + z_2)^2$, $\Sigma z_1 z_2 = -z_1^2 - z_1 z_2 - z_2^2 = -\Gamma$; d'autre part, $4z_0^2 = \Gamma$, $4z_0'^2 = \Gamma'$; donc l'équation qui donne λ devient

$$4z_0^2\lambda^2 - 3z_0^2 = 0, \qquad \lambda^2 = \frac{3}{4}.$$

Il suffit donc de prendre $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Nous prendrons ici pour axe des x la droite $\omega'\omega''$ et pour origine des coordonnées le milieu de ce segment. Nous savons que z_1', qui se réduit ici à $\overline{O\omega'}^2$, est égal à $\dfrac{1}{4}$; d'autre part, nous avons vu au début que I ou u est égal à $\dfrac{z_1' + z_2' + z_3'}{2}$, c'est-à-dire ici à $-p_2$, puisque $z_1 + z_2 + z_3$ est nul ; donc p_2 est constant et réel, et même négatif. D'ailleurs le produit des médianes étant constant, cela veut dire que le produit des longueurs OA, OB, OC est constant ; donc le module de p_3 est constant et égal à a^3.

Posons $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$; l'équation $z^3 + p_2 z - p_3 = 0$ deviendra

$$\rho^3(\cos 3\omega + i\sin 3\omega) + p_2\rho(\cos\omega + i\sin\omega) = p_3 = a^3(\cos\lambda + i\sin\lambda);$$

elle se décompose en deux :

$$\rho^3 \cos 3\omega + p_2 \rho \cos \omega = a^3 \cos \lambda,$$
$$\rho^3 \sin 3\omega + p_2 \rho \sin \omega = a^3 \sin \lambda,$$

et l'élimination de λ entre ces deux équations est immédiate ; elle donne l'équation du lieu des sommets

$$\rho^6 + 2p_2\rho^4 \cos 2\omega + p_2^2\rho^2 = a^6.$$

Quand deux des sommets B et C sont confondus, le triangle s'aplatit sur une droite AB, le point O est sur cette droite aux $\frac{2}{3}$ à partir de A, et la droite $\omega'\omega''$, c'est-à-dire Ox, est sur cette droite AB, qui correspond à ce triangle particulier. Nous avons alors $4p_2^3 + 27p_3^2 = 0$, le p_3 de ce triangle est réel et se réduit à a^3. Changeons de notation et posons alors $p_3^2 = 4l^6$; nous aurons $p_2^3 = -27l^6$, $p_2 = -3l^2$, et l'équation du lieu deviendra, dans ce cas particulier,

$$\rho^6 - 6l^2\rho^4 \cos 2\omega + 9l^4\rho^2 - 4l^6 = 0.$$

Pour construire cette courbe, au moins sommairement, remarquons que l'équation en ρ a des coefficients périodiques, et que leur période est π ; il suffit donc de faire varier ω dans un intervalle d'étendue 2π. Or le changement de ω en $-\omega$ laisse l'équation invariable ; donc la courbe est symétrique par rapport à Ox, et en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier ω de 0 à π ; le changement de ω en $\pi - \omega$ laisse encore l'équation invariable ; la courbe est symétrique par rapport à Oy, et, en tenant compte aussi de cette nouvelle symétrie, il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega = 0$, l'équation devient

$$\rho^6 - 6l^2\rho^4 + 9l^4\rho^2 - 4l^6 = 0,$$

ou

$$\rho^2(\rho^2 - 3l^2)^2 - 4l^6 = 0 ;$$

elle se décompose en

$$\rho^3 - 3l^2\rho + 2l^3 = 0,$$
$$\rho^3 - 3l^2\rho - 2l^3 = 0 ;$$

la première admet la racine positive double $\rho = l$, et la seconde, la racine positive simple $\rho = 2l$; le premier point de Ox, A, est un point double, le second, B, est un point simple.

Quand ω augmente, $\cos 2\omega$ diminue, la somme des valeurs de ρ^2 diminue ; pour $\omega = \frac{\pi}{4}$, l'équation n'a déjà plus qu'une seule racine positive et cela se poursuit jusqu'à $\omega = \frac{\pi}{2}$. A ce moment, l'équation devient

$$\rho^6 + 6l^2\rho^4 + 9l^4\rho^2 - 4l^6 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \rho^2(\rho^2 - 3l^2)^2 - 4l^6 = 0 ;$$

elle se décompose en

$$\rho^3 + 3l^2\rho - 2l^3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \rho^3 + 3l^2\rho + 2l^3 = 0,$$

qui n'admettent qu'une racine positive, comprise entre 0 et l.

Pour savoir à quel moment l'équation cesse d'avoir trois racines positives, il suffit d'annuler le discriminant de l'équation cubique en ρ^2. Ceci donne, en posant $\cos 2\omega = u$, la relation

$$32u^3 - 27u^2 - 36u + 31 = 0,$$

qui se décompose en $\quad u - 1 = 0 \quad$ et $\quad 32u^2 + 5u - 31 = 0.$

L'unique valeur positive de u est donc

$$u = \cos 2\omega = \frac{-5 + \sqrt{3993}}{64}, \qquad \cos 2\omega = \frac{63,1 - 5}{64} = \frac{58,1}{64} = 0,90 ;$$

cette valeur de 2ω est voisine de 65°, et ω a pour valeur correspondante un nombre α voisin de 37 ou 38°.

Alors de 0 à α, il y a trois valeurs positives de ρ ; pour $\omega = \alpha$, deux d'entre elles sont confondues ; la droite $\omega = \alpha$ est tangente à la courbe ; enfin, au delà, de $\omega = \alpha$ à $\omega = \frac{\pi}{2}$, il n'y a plus qu'un seul ρ qui soit positif, les deux autres ont cessé d'être réels.

Vérifions enfin que le point A est un point double. Pour cela, formons tg V en ce point : nous avons

$$\operatorname{tg} V = \frac{d\omega}{dz}; \qquad \text{d'autre part} \qquad \cos 2\omega = \frac{z^6 + 9l^4z^2 - 4l^6}{6l^2z^3},$$

$$\cos 2\omega = \frac{z^3}{6l^2} + \frac{3}{2}\frac{l^2}{z} - \frac{2}{3}\frac{l^6}{z^3}, \qquad -2\sin 2\omega\frac{d\omega}{dz} = \frac{z^2}{3l^2} - \frac{3l^2}{z^2} + \frac{8}{3}\frac{l^6}{z^4} = \frac{z^6 - 9l^4z^2 + 8l^6}{3l^2z^4},$$

$$\frac{d\omega}{dz} = -\frac{(z^2 - l^2)(z^2 - 8l^2)}{6l^2z\sin 2\omega}.$$

Dans le second nombre, l'un des facteurs, $-\dfrac{z^2 - l^2z^2 - 8l^2}{6l^2z}$, a pour limite $\dfrac{1}{l}$, quand ω tend vers 0 et z vers l; l'autre facteur, $\dfrac{z^2 - l^2}{\sin 2\omega}$, prend une forme indéterminée, et en lui appliquant la règle de L'Hospital, et appelant λ la limite de $\dfrac{d\omega}{dz}$, on a $\lambda = \dfrac{1}{l^3}\dfrac{l}{\lambda}$, $\lambda^2 = \dfrac{1}{l^2}$, $\lambda = \pm\dfrac{1}{l}$.

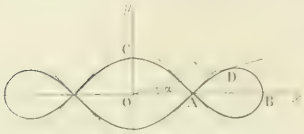


Fig. 3.

Les deux valeurs de $\operatorname{tg} V$ sont donc $\operatorname{tg} V = \pm 1$. La courbe a la forme ci-contre (*fig.* 3).

Lorsqu'on se donne le point A, on se donne l'affixe, z_1, de ce point, et il suffit de trouver les affixes des deux autres points, z_2 et z_3.

On a $z_2 + z_3 = -z_1$, $I = p_2 = 3l^2 = z_2^2 + z_3^2 + z_2z_3$, $I = 3l^2 = z_1^2 - z_2z_3$; ceci donne $z_2z_3 = -z_1^2 - 3l^2$,

et nous sommes ramenés à construire deux affixes dont la somme et le produit sont donnés.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2106 *On considère un faisceau ponctuel de coniques et une droite Δ; le pôle de Δ décrit une conique Γ harmoniquement circonscrite au faisceau. Les tangentes à Γ aux sommets du triangle conjugué rencontrent les côtés opposés en trois points situés sur une même droite Δ'; les deux droites Δ et Δ' sont réciproques. Soit Γ' la conique qui correspond à Δ'.*

Démontrer que si l'une des droites Δ, Δ' tourne autour d'un point fixe, l'autre enveloppe une conique harmoniquement inscrite au faisceau; que le point d'intersection de Δ et de Δ' décrit une cubique, et que le quatrième point de rencontre des coniques Γ et Γ' décrit une sextique ayant trois points triples aux sommets du triangle conjugué.

Prenons pour triangle de référence le triangle conjugué commun à toutes les coniques du faisceau donné : si nous désignons par

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

les équations de deux de ces coniques, l'équation générale des coniques de ce faisceau sera

$$(A + \lambda)x^2 + (B + \lambda)y^2 + (C + \lambda)z^2 = 0.$$

Le pôle de la droite Δ, $ax + by + cz = 0$, est défini par les équations

$$\frac{A + \lambda}{a} = \frac{B + \lambda}{b} = \frac{C + \lambda}{c}.$$

on aura le lieu de ce point en éliminant λ entre ces trois équations. Pour faire cette élimination, nous égalons ces trois rapports à un paramètre $-\mu$, nous obtenons trois équations linéaires en λ et μ et

nous écrivons que le déterminant complet du système est nul. Ceci nous donne

$$\begin{vmatrix} Ax & x & u \\ By & y & v \\ Cz & z & w \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$wB - Cy)z + v(C - A)zx + w(A - B)xy = 0,$$

ou encore, en posant $B - C = a, \quad C - A = b, \quad A - B = b,$

$$(\Gamma) \qquad auyz + bvzx + cwxy = 0.$$

C'est l'équation de la conique Γ. Cette conique est circonscrite au triangle conjugué.

La tangente au point $(y = 0, \ z = 0)$ a pour équation $bvz + cwy = 0$, ou $\frac{y}{bv} + \frac{z}{cw} = 0$; elle rencontre le côté $x = 0$ en un point situé sur la droite

$$(\Delta') \qquad \frac{x}{au} + \frac{y}{bv} + \frac{z}{cw} = 0;$$

les deux autres points analogues sont également situés sur cette droite.

Pour avoir la conique Γ', il suffit de remplacer dans l'équation de Γ u, v, w respectivement par $\frac{1}{au}, \frac{1}{bv}, \frac{1}{cw}$; nous obtenons ainsi

$$(\Gamma') \qquad \frac{yz}{u} + \frac{zx}{v} + \frac{xy}{w} = 0.$$

Il y a visiblement réciprocité entre (Δ) et (Δ').

Supposons maintenant que (Δ) passe par le point fixe (x_0, y_0, z_0), nous avons

$$(1) \qquad ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de Δ' en éliminant u, v, w entre l'équation (1) et les suivantes :

$$\frac{-\frac{x}{au^2}}{x_0} = \frac{-\frac{y}{bv^2}}{y_0} = \frac{-\frac{z}{cw^2}}{z_0},$$

ou

$$\frac{u^2}{\frac{x}{ax_0}} = \frac{v^2}{\frac{y}{by_0}} = \frac{w^2}{\frac{z}{cz_0}}.$$

Remplaçons dans (1) u, v, w par les quantités proportionnelles $\pm\sqrt{\frac{x}{ax_0}}, \ \pm\sqrt{\frac{y}{by_0}}, \ \pm\sqrt{\frac{z}{cz_0}}$; nous obtenons

$$\pm\sqrt{\frac{xx_0}{a}} \pm\sqrt{\frac{yy_0}{b}} \pm\sqrt{\frac{zz_0}{c}} = 0,$$

et cette équation représente une conique inscrite dans le triangle de référence.

Le lieu du point de rencontre de Δ et Δ' s'obtient en éliminant u, v, w entre les équations

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0,$$
$$\frac{x}{au} + \frac{y}{bv} + \frac{z}{cw} = 0.$$

Les deux premières nous donnent

$$\frac{u}{yz_0 - zy_0} = \frac{v}{zx_0 - xz_0} = \frac{w}{xy_0 - yx_0},$$

et en portant ces valeurs dans la troisième nous avons

$$\frac{x}{a(yz_0 - zy_0)} + \frac{y}{b(zx_0 - xz_0)} + \frac{z}{c(xy_0 - yx_0)} = 0,$$

équation d'une cubique.

Enfin, pour avoir le lieu du quatrième point de rencontre des coniques Γ et Γ', nous éliminons u, v, w entre les équations

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0,$$
$$auyz + bvzx + cwxy = 0,$$
$$\frac{yz}{u} + \frac{zx}{v} + \frac{xy}{w} = 0.$$

Des deux premières nous tirons

$$\frac{u}{x(cyy_0 - bzz_0)} = \frac{v}{y(azz_0 - cxx_0)} = \frac{w}{z(bxx_0 - ayy_0)},$$

et en portant dans la troisième nous avons

$$\frac{yz}{x(cyy_0 - bzz_0)} + \frac{zx}{y(azz_0 - cxx_0)} + \frac{xy}{z(bxx_0 - ayy_0)} = 0,$$

ou

$$\frac{y^2z^2}{cyy_0 - bzz_0} + \frac{z^2x^2}{azz_0 - cxx_0} + \frac{x^2y^2}{bxx_0 - ayy_0} = 0.$$

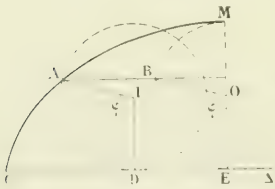
Sous cette forme on reconnaît l'équation d'une sextique ayant trois points triples aux sommets du triangle conjugué.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Bonnes solutions par MM. Lach, à Douai ; L. Naugeille, à La Châtre.

2107. — *Soit* M *le point le plus haut d'une cycloïde engendrée par un cercle* O *qui roule sur une droite* Δ *et qui actuellement touche la cycloïde au point* M. *Soit* AB *une parallèle à* Δ *qui coupe la cycloïde en* A *et le cercle en* B. *Montrer que* AB = arc BM, *et en déduire la construction du centre instantané de rotation qui correspond au point* A *de la cycloïde.*

Le cercle O touche Δ en E. Soit I le centre du cercle générateur au moment où il passe en A et D le point de contact sur Δ. Si C est le point de départ sur Δ du mobile, et si on pose



$\widehat{DIA} = \widehat{EOB} = \varphi$, on a $CD = \text{arc } DA = \text{arc } EB = R\varphi$;

d'où $AB = DE = R(\pi - \varphi)$.

C'est précisément la valeur de l'arc BM. Le centre instantané de rotation, D, qui correspond au point A de la cycloïde, s'obtient donc en menant AD parallèle à BE ; d'ailleurs le point A se déduit du point B en menant, en sens contraire du mouvement, BA parallèle à Δ et égal à arc MB.

A. ROUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

Bonnes solutions MM. R. Manen, à Albi ; D. Beylouq, à Bordeaux ; M. Ullmann, à Héricourt ; G. Lach, à Douai ; L. Simon, à Fournies ; R. Dufour ; G. Hile.

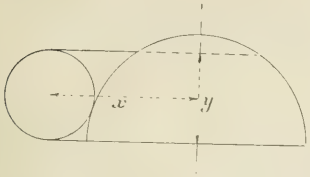
CONCOURS DE 1913 (*Suite.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs.)

Algèbre et Analyse.

I. — **2191.** Un tore circulaire circonscrit à une sphère de rayon R satisfait aux conditions suivantes : le plan du parallèle inférieur passe par le centre de la sphère ; le diamètre y du méridien est inférieur ou égal à R ; le



volume du tore est égal à n fois le volume du segment de la sphère compris entre les plans des parallèles extrêmes.

1° Former l'équation qui donne la distance x du centre du méridien du tore à l'axe;

2° Discuter le problème sur cette équation ;

3° Prenant R égal à l'unité et faisant $n = k\pi$, quelles sont les valeurs commensurables de y qui rendent x et k commensurables ? Choisir un exemple.

4° Parmi ces valeurs commensurables de y, il en est une pour laquelle k prend la valeur $\frac{63}{97}$; écrire l'équation en x correspondante (avec $R = 1$) ; calculer x, en déduire y et constater que la valeur ainsi déterminée pour y rentre bien parmi les valeurs de y obtenues au 3°.

II. — Former une série de Fourier qui prenne la valeur x de zéro à π et la valeur $2\pi - x$ de π à 2π. On peut déduire de cette série des séries numériques assez rapidement convergentes permettant de calculer π.

Examiner en particulier le cas $x = \frac{\pi}{3}$.

A quel terme de la série faudrait-il s'arrêter dans ce cas pour avoir π à moins d'un centième près ? En déduire π avec deux décimales exactes.

On rappelle que, si $f(x)$ a pour développement de Fourier dans l'intervalle de 0 à 2π

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots + B_1 \sin x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots,$$

on a

$$2\pi A_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

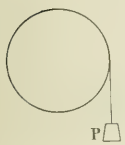
$$\pi A_n = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx,$$

$$\pi B_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

(*Durée : 4 heures.*)

Géométrie et Mécanique.

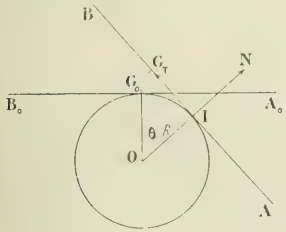
I. — Une cordelette est fixée par l'une de ses extrémités à la surface d'un tambour plein et homogène et, après avoir fait un certain nombre de tours sur ce tambour, supporte par l'autre extrémité un poids P. Les tourillons du tambour tournent sur un dispositif analogue à celui de la machine d'Atwood, pour rendre le frottement négligeable : ces tourillons sont de très petit diamètre de sorte qu'on peut faire abstraction de leur rayon de giration ; la cordelette est assez fine et flexible pour que sa raideur soit également négligeable.



Le tambour pèse 1800 grammes.

Quelle valeur faut-il donner au poids P pour que, le système étant abandonné à lui-même, ce poids prenne une accélération égale au dixième de l'accélération g en chute libre dans le vide ?

II. — Une pièce de bois de longueur $A_0B_0 = l = 2^m$ est posée en équilibre sur un cylindre horizontal fixe de rayon $R = 1^m$, perpendiculairement aux génératrices, de telle sorte que son milieu G_0 soit à l'aplomb de l'axe O du cylindre.



On lui imprime, dans un plan normal à cet axe, une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 1$.

On néglige le frottement de roulement et la résistance de l'air et l'on fait abstraction de l'épaisseur de la pièce ; mais on tient compte du frottement de glissement dont le coefficient est $f = 0{,}40$.

On demande d'examiner si, dans ces conditions, la planche, roulant sans glisser, oscillera autour du point G_0, ou si, entraînée trop loin par la vitesse initiale, elle finira par glisser.

Les candidats pourront suivre de préférence la marche ci-après :

1° Former, par le théorème des forces vives, l'équation entre la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ et l'angle θ;

2° Ecrire, au moyen du théorème du mouvement du centre de gravité G, les équations qui définissent la réaction normale N et la réaction tangentielle T en fonction de θ, ω et $\frac{d\omega}{dt}$;

3° Déduire des équations 2° l'équation déterminant l'angle limite θ pour lequel la planche peut venir s'arrêter sans glisser sur le cylindre ;

7° Répondre à la question en s'aidant des équations 1° et 3° ; l'équation 3° en θ devra être résolue de manière qu'on puisse obtenir θ à un degré près ; on comparera cette valeur de θ à celle que l'obtiendrait en supposant la planche placée obliquement en équilibre limite sur le cylindre.

Géométrie descriptive et Perspective cavalière.

Diviser la feuille en deux parties égales par une parallèle à ses petits côtés. — Affecter chacune de ces parties aux épures ci-dessous définies.

I. *Partie de gauche.* — Soient AωA le grand axe et BωB le petit axe de cette partie. Le point o marqué sur l'axe AA est pris pour projection horizontale d'une verticale autour de laquelle on fait tourner la surface plane *abcdefgh* définie par le croquis ci-joint.

On considère la partie du solide de révolution ainsi obtenu qui est située en avant d'un plan vertical dont la trace horizontale passe par le point m de AA et fait un angle de 30° avec BB qu'elle rencontre à gauche de AA.

On obtient ainsi une sorte de tourelle en encorbellement sur un mur vertical.

On soutient cet encorbellement par un contrefort adossé au mur et qui a la forme d'un prisme vertical. La base de ce prisme est un rectangle dont le grand axe passe par o et est perpendiculaire au plan du mur. Un sommet du rectangle est au point n de AA.

On demande de représenter le solide supposé opaque formé par le corps de révolution et le prisme, limités d'une part à leur commune intersection et d'autre part au plan vertical défini plus haut.

Le prisme sera en outre limité à un plan horizontal dont la trace verticale est à 30^{mm} au-dessous de BωB.

Les parties vues seront en trait plein. Les parties cachées en pointillé.

On représentera, de part et d'autre, les amorces du mur vertical.

II. *Partie de droite.* — Ayant rapporté l'ensemble précédent à un trièdre trirectangle dont l'origine soit confondue avec le point projeté en o de la base inférieure du prisme, l'axe Ox étant horizontal de front, dirigé vers la droite, Oy de bout et dirigé d'arrière en avant, Oz vertical, de bas en haut, on construira la perspective cavalière du solide précédemment défini (réduit, au reste, à ses seules parties vues) en prenant le point O sur le grand axe de cette partie de droite, à 50^{mm} au-dessous du prolongement de la droite BωB, de la partie de gauche, et donnant à l'image du trièdre la disposition ci-contre, avec un rapport de réduction égal à 1/2 le long de Oy.

(*Durée : 3 heures.*)

QUESTION PROPOSÉE

2192. — Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et le point A de Oz qui a pour cote $+1$. Sur OA comme diamètre on décrit un cercle (C) dans le plan yOz. Soit d'autre part D la première bissectrice de l'angle Oxz.

1° On prend un point P sur (C) tel que l'angle de OP avec Oy soit égal à φ. On le joint au point Q de D qui a même cote. On obtient une droite Δ dont on demande les équations. Trouver l'équation de la surface (S) qu'elle engendre quand P décrit (C).

2° On oriente Δ de P vers Q. Désignant par M un point quelconque de Δ, on pose $\overline{PM} = \rho$. Calculer les coordonnées du point M en fonction de ρ et φ.

3° Ligne de striction de (S) et paramètre de distribution relatif à Δ.

4° Construire la section de (S) par le plan $x = \frac{3}{8}$.

3° Le point M, supposé de masse 1, est attiré par O suivant une force égale à OM. On l'abandonne de P sans vitesse initiale. Calculer ρ en fonction du temps. Calculer la réaction.

Trouver les positions d'équilibre et l'équation polaire du lieu de leurs projections sur le plan xOy. Construire ce lieu.

Certificat de Mathématiques générales, Clermont, juillet 1912.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2062. — *Soient, dans une ellipse,* MN *la corde normale en* M, I *le milieu de* MN, P, Q, R *les pieds des trois autres normales abaissées de* I. *Lorsque* M *parcourt l'ellipse, le centre de gravité du triangle* PQR, *le centre de son cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre du cercle des neuf points décrivent des courbes du sixième degré.*

Discuter ces courbes et calculer leurs aires.

Soit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, et soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M. La normale en ce point a pour équation

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}-c^2=0;$$

le milieu I de la corde interceptée par l'ellipse sur cette normale est le point de rencontre de cette droite et du diamètre conjugué de sa direction, diamètre qui a pour équation

$$\frac{x}{a^2}+\frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}\cdot\frac{y}{b^2}=0.$$

En résolvant ces deux équations on obtient immédiatement les coordonnées α, β du point I :

$$\alpha=\frac{a^3c^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi},\qquad \beta=-\frac{b^3c^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi}.$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à ce point rencontre l'ellipse aux points M, P, Q, R. Nous allons chercher l'équation du cercle circonscrit au triangle PQR, et pour cela nous formerons d'abord l'équation générale des coniques passant par les trois points P, Q, R.

Il suffit de connaître les équations de trois de ces coniques. Nous connaissons déjà l'ellipse donnée

$$E\equiv b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

l'hyperbole d'Apollonius relative au point I.

$$F\equiv(a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi)xy-b^3\cos^2\varphi\sin\varphi\,x-a^3\sin^2\varphi\cos\varphi\,y=0.$$

Pour en avoir une troisième, mettons en évidence les coordonnées du point M dans ces deux équations en les écrivant

$$E\equiv b^2(x-a\cos\varphi)(x+a\cos\varphi)+a^2(y+b\sin\varphi)(y-b\sin\varphi)=0,$$
$$F\equiv a^4\sin^2\varphi\,y(x-a\cos\varphi)+b^4\cos^2\varphi\,x(y-b\sin\varphi)=0,$$

puis éliminons $x-a\cos\varphi$ et $y-b\sin\varphi$ entre ces deux équations : nous obtenons

$$G\equiv b^6\cos^2\varphi\,x(x+a\cos\varphi)-a^6\sin^2\varphi\,y(y+b\sin\varphi)=0,$$

qui représente une conique qui passe par les points P, Q, R et qui ne passe pas au point M.

L'équation générale des coniques passant par les points P, Q, R est alors

$$\lambda E+\mu F+\nu G=0,$$

et il suffit d'écrire que cette équation représente un cercle.

En écrivant que le coefficient de xy est nul, on a $\alpha\beta = 0$; puis que le coefficient de x^2 est égal à celui de y^2, on a

$$\gamma b^2 - \beta b^2 \cos^2\varphi = \gamma a^2 - \beta a^6 \sin^2\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \gamma c^2 = \beta(a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi).$$

Remplaçons β par $a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi$, γ par c^2, l'équation du cercle s'écrit

$$(a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi)(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + c^2(b^2 \cos^2\varphi\, x^2 - a^6 \sin^2\varphi\, y^2 + ab^6 \cos^3\varphi\, x - ba^6 \sin^3\varphi\, y) = 0$$

ou, en ordonnant,

$$(a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi)(x^2 + y^2) + b^2c^2 \cos^2\varphi\, x - a^6c^2 \sin^2\varphi\, y - ab(a^6 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi) = 0.$$

Les coordonnées du centre ω de ce cercle sont

$$x_\omega = -\frac{b^2c^2 \cos^2\varphi}{2a(a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi)}, \qquad y_\omega = \frac{a^6c^2 \sin^2\varphi}{2b(a^4 \sin^2\varphi + b^6 \cos^2\varphi)}.$$

Cherchons maintenant les coordonnées du centre de gravité G du triangle PQR; ce sont

$$(1) \qquad x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) étant les coordonnées des points P, Q, R.

Si on élimine y entre l'équation de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et celle de l'hyperbole d'Apollonius relative au point $I(\alpha, \beta)$

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

on obtient une équation du quatrième degré en x dont les deux premiers termes sont $c^2x^4 - 2a^2\alpha x^3$; par suite la somme des racines de cette équation est $\frac{2a^2\alpha}{c^2}$, et comme ces racines sont l'abscisse de M, $a \cos\varphi$, et celles des points P, Q, R, on a

$$a \cos\varphi + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2a^2\alpha}{c^2},$$

ou, en remplaçant α par sa valeur $\frac{a^6c^2 \sin^2\varphi \cos\varphi}{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}$,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2a^6 \sin^2\varphi \cos\varphi}{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi} - a \cos\varphi,$$

ou

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{a \cos\varphi(a^4 \sin^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi)}{3(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}.$$

De même, en éliminant x entre les mêmes équations, on trouve

$$b \sin\varphi + y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{2b^2\varphi}{c^2},$$

et

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = -\frac{b \sin\varphi(b^4 \cos^2\varphi - a^4 \sin^2\varphi)}{3(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}.$$

On a donc

$$(2) \qquad x_G = \frac{a \cos\varphi(a^4 \sin^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi)}{3(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}, \qquad y_G = \frac{b \sin\varphi(b^4 \cos^2\varphi - a^4 \sin^2\varphi)}{3(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}.$$

L'orthocentre H divise le segment $G\omega$ dans le rapport $\frac{HG}{H\omega} = \frac{2}{3}$; ses coordonnées sont donc

$$x_H = \frac{x_G - \frac{2}{3}x_\omega}{1 - \frac{2}{3}} = 3x_G - 2x_\omega, \qquad y_H = 3y_G - 2y_\omega,$$

ou, en remplaçant x_ω, y_ω, x_G, y_G par leurs valeurs,

$$(3) \qquad x_H = \frac{\cos\varphi(a^4 \sin^2\varphi - b^4 \cos^2\varphi)}{a(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}, \qquad y_H = \frac{\sin\varphi(b^4 \cos^2\varphi - a^4 \sin^2\varphi)}{b(a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi)}.$$

Enfin, le centre Ω du cercle des neuf points est le milieu de $H\omega$; on a donc

$$x_\Omega = \frac{x_\Pi + x_\omega}{2}, \qquad y_\Omega = \frac{y_\Pi + y_\omega}{2},$$

ou

$$(1) \quad x_\Omega = \frac{\cos\varphi\,[2a^4\sin^2\varphi - b^2(a^2+b^2)\cos^2\varphi]}{4a(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y_\Omega = \frac{\sin\varphi\,[2b^4\cos^2\varphi - a^2(a^2+b^2)\sin^2\varphi]}{4b(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

Nous allons maintenant construire les lieux géométriques de ces différents points.

Lieu du centre du cercle circonscrit. — Les coordonnées de ce point sont données par les formules (1).

$$x = -\frac{b^2c^2}{2a}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \qquad y = \frac{a^2c^2}{2b}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu. Si on y remplace $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, on voit que le lieu est une courbe unicursale du sixième degré.

Pour avoir toute la courbe, il suffit de faire varier φ dans un intervalle quelconque dont l'étendue soit égale à 2π. Mais, si l'on change φ en $\pi+\varphi$, x et y changent de signe en conservant chacun la même valeur absolue; donc, la courbe est symétrique par rapport au point O. Il suffira alors de faire varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à π, par exemple l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, et de prendre le symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à l'origine. Enfin, si l'on change φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change simplement de signe ; la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. L'intervalle de variation $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ peut se décomposer en deux, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$, et à ces intervalles correspondent des branches de courbe symétriques par rapport à Ox.

On voit donc que, pour avoir toute la courbe, il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et de prendre le symétrique du tracé obtenu par rapport aux deux axes.

En prenant les dérivées de x et y par rapport à φ, on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{b^2c^2}{2a}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\frac{3a^4\sin^2\varphi + (2a^2+b^2)\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a^2c^2}{2b}\sin^2\varphi\cos\varphi\,\frac{3b^4\cos^2\varphi + (2b^2+a^2)\sin^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2},$$

on en conclut que dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ x et y sont des fonctions croissantes. Quand φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, x croît de $-\frac{c^2}{2a}$ à 0 et y de 0 à $\frac{c^2}{2b}$; on obtient ainsi la branche de courbe AB (*fig.* 1) qui est tangente en A à Ox et en B à Oy, car on voit aisément que $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $\varphi = 0$ et est infini pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

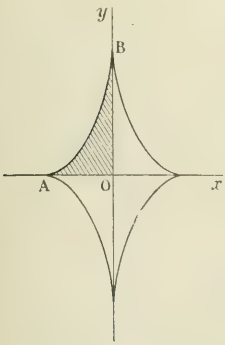


Fig. 1.

En achevant par symétrie on a toute la courbe.

Lieu du centre de gravité du triangle POR. — Les coordonnées de ce point sont

$$(2) \quad x = \frac{a\cos\varphi\,(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi\,(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

Le lieu est encore une courbe unicursale du sixième degré. L'équation en coordonnées rectilignes s'obtient aisément. En divisant membre à membre les valeurs de x et de y, on a $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{ay}{bx}$, on en déduit

$$\sin\varphi = \frac{-ay}{\pm\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{bx}{\pm\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}},$$

les signes se correspondant ; puis, en portant ces valeurs dans l'une des équations (2), et en élevant au carré, on a

$$9(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(b^2x^2 - a^6y^2)^2 = 0.$$

On voit ainsi que la courbe est symétrique par rapport aux deux axes, et qu'elle admet à l'origine un point quadruple dont les tangentes confondues deux à deux ont pour pentes $\pm \frac{b^2}{a^2}$.

On la construit aisément en posant $y = tx$; la courbe est une rosace à quatre branches qui rencontre Ox aux points qui ont pour abscisses $\pm \frac{a}{3}$, et Oy aux points d'ordonnées $\pm \frac{b}{3}$ (*fig.* 2).

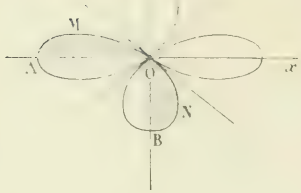


Fig. 2.

Lieu du point de concours des hauteurs. — Les équations paramétriques du lieu sont

$$x = \frac{\cos\varphi\,(a^6\sin^2\varphi - b^6\cos^2\varphi)}{a(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)},$$

$$y = \frac{\sin\varphi\,(b^6\cos^2\varphi - a^6\sin^2\varphi)}{b(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}.$$

Son équation cartesienne s'obtient comme précédemment ; elle s'écrit

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) - (b^4x^2 - a^4y^2)^2 = 0.$$

La courbe a encore la forme d'une rosace à quatre branches.

Lieu du centre du cercle des neuf points. — Les équations paramétriques du lieu sont

$$x = \frac{\cos\varphi\,[2a^6\sin^2\varphi - b^2(a^2 - b^2)\cos^2\varphi]}{4a(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{\sin\varphi\,[2b^6\cos^2\varphi - a^2(a^2 - b^2)\sin^2\varphi]}{4b(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}.$$

Il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$; x et y s'annulent respectivement pour les valeurs φ_1 et φ_2, comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et définies par les égalités

$$\operatorname{tg}^2\varphi_1 = \frac{b^2(a^2 + b^2)}{2a^6}, \qquad \operatorname{tg}^2\varphi_2 = \frac{2b^6}{a^2(a^2 + b^2)};$$

on voit aisément que φ_1 est plus grand que φ_2.

Les signes et les valeurs remarquables de x et y sont indiquées dans le tableau suivant :

φ	0		φ_2		φ_1		$\frac{\pi}{2}$
x	$\frac{a^2 + b^2}{4a}$			$-$	0	$+$	0
y	0		0	$-$		$-$	$-\frac{a^2 + b^2}{4b}$

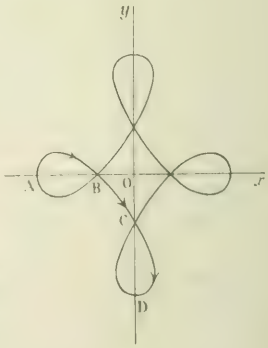


Fig. 3.

On en déduit la branche de courbe ABCD, et on achève par symétrie par rapport aux deux axes.

Calcul des aires. — Nous remarquerons que les équations paramétriques des courbes considérées peuvent se mettre sous la forme générale

$$x = \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta}{\alpha'\sin^2\alpha + \beta'\cos^2\beta}, \qquad y = \frac{A'\sin\alpha + B'\sin\beta}{\alpha'\sin^2\alpha + \beta'\cos^2\beta},$$

A, B, A', B', α, β' étant des constantes, les deux dernières positives.

Nous allons calculer l'aire de la courbe définie par ces équations. Comme la courbe est symétrique par rapport aux deux axes, il suffit de calculer le quart de cette aire. Nous utiliserons la formule

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dy - y\,dx,$$

en observant toutefois que U est un nombre algébrique qui a pour valeur absolue l'aire décrite par le rayon vecteur joignant l'origine O à un point M de la courbe, et pour signe le signe $+$ si OM tourne dans le sens positif quand φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et le signe $-$ dans le cas contraire.

Le calcul est un peu plus simple en écrivant $x\,dy - y\,dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$.

Comme $\frac{y}{x} = \frac{A'\sin\varphi + B'\sin^3\varphi}{A\cos\varphi + B\cos^3\varphi}$, on a

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{(A\cos^2\varphi + B\cos^4\varphi)(A' + 3B'\sin^2\varphi) + (A'\sin^2\varphi + B'\sin^4\varphi)(A + 3B\cos^2\varphi)}{(A\cos\varphi + B\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi,$$

puis

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{AA' + 3(AB' + BA' + BB')\sin^2\varphi\cos^2\varphi + AB'\sin^4\varphi + BA'\cos^4\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2}\,d\varphi.$$

On aura donc

$$2U = AA'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} + 3(AB' + BA' + BB')\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2}$$

$$+ AB'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} + BA'\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2}.$$

Cela posé, on trouve aisément

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$$

Dérivons les deux membres successivement par rapport à α et β, puis ajoutons les égalités obtenues, après avoir divisé la première par α et la deuxième par β; nous avons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha^3\beta^3}.$$

De même, en dérivant par rapport à α et β les deux membres de l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{2\alpha(\alpha + \beta)},$$

on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi(2\alpha + \beta)}{4\alpha^3(\alpha + \beta)^2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{4\alpha\beta(\alpha + \beta)^2}.$$

De la première on déduit, en permutant α, β et en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{(\alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi(2\beta + \alpha)}{4\beta^3(\alpha + \beta)^2}.$$

Le quart U de l'aire de la courbe est donc donné par la formule

$$U = \frac{\pi}{8}\left[\frac{AA'(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^3\beta^3} + \frac{3(AB' + BA' + BB')}{\alpha\beta(\alpha + \beta)^2} + \frac{AB'(2\alpha + \beta)}{\alpha^3(\alpha + \beta)^2} + \frac{BA'(2\beta + \alpha)}{\beta^3(\alpha + \beta)^2}\right].$$

Appliquons cette formule aux courbes qui ont été construites précédemment.

Lieu du centre du cercle circonscrit. — Les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{b^2c^2\cos^2\varphi}{2a(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{a^2c^2\sin^3\varphi}{2b(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

On a donc

$$A = 0, \qquad B = -\frac{b^2c^2}{2a}, \qquad A = 0, \qquad B = \frac{a^2c^2}{2b}, \qquad \alpha = a^2, \qquad \beta = b^2,$$

et par suite

$$U = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{BB'}{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2} = -\frac{3\pi abc^4}{32(a^2+b^2)^2}.$$

Ce résultat est négatif. En effet, si on se reporte à la figure 1, on voit que lorsque φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le point $M(x, y)$ de la courbe décrit l'arc AB de A vers B; le rayon vecteur OM se déplace dans le sens négatif.

Donc l'aire limitée par l'arc AB et les deux axes est en valeur absolue $\frac{3\pi abc^4}{32(a^2+b^2)^2}$, et l'aire limitée par la courbe entière est $\frac{3\pi abc^4}{8(a^2+b^2)^2}$.

Lieu du centre de gravité. — Nous avons trouvé

$$x = \frac{a\cos\varphi(a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi)}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)},$$

ce qu'on peut écrire

$$x = \frac{a\cos\varphi[a^2 - (a^2+b^2)\cos^2\varphi]}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi[b^2 - (a^2+b^2)\sin^2\varphi]}{3(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

On a donc

$$A = \frac{a^3}{3}, \qquad B = -\frac{a(a^2+b^2)}{3}, \qquad A = \frac{b^3}{3}, \qquad B = \frac{-b(a^2+b^2)}{3}, \qquad \alpha = a^2, \qquad \beta = b^2,$$

et par suite

$$U = -\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{36(a^2+b^2)^2}.$$

Quand φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le point (x, y) décrit la courbe (*fig.* 2) dans le sens AMONB; le rayon vecteur tourne dans le sens négatif, donc U est négatif.

L'aire couverte de hachures a pour valeur absolue $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{36(a^2+b^2)^2}$, et par suite l'aire limitée par la courbe tout entière est $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{9(a^2+b^2)^2}$.

Lieu de l'orthocentre. — On trouve

$$U = -\frac{\pi}{8ab}(2a^4 + b^4 - 3a^2b^2).$$

Conclusion analogue au cas précédent.

Lieu du centre du cercle des neuf points :

$$x = \frac{\cos\varphi(2a^4 - 2a^2 - b^2(a^2+b^2)\cos^2\varphi)}{4a(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}, \qquad y = \frac{\sin\varphi(2b^4 - 2b^2 + a^2(a^2+b^2)\sin^2\varphi)}{4b(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

$$A = \frac{a}{2}, \qquad B = -\frac{2a^2 - b^2(a^2+b^2)}{4a}, \qquad A = \frac{b}{2}, \qquad B = -\frac{2b^2 + a^2(a^2+b^2)}{4b},$$

$$\alpha = a^2, \qquad \beta = b^2.$$

On calcule d'abord

$$AB' + BA' + BB' = \frac{a^2b^2(a^2 - b^2)^2}{16ab},$$

puis on a

$$U = \frac{\pi}{8}\left[\frac{a^2+b^2}{4ab}\cdot\frac{3ab(a^4 - b^4)}{16(a^2+b^2)^2} - \frac{(2a^2 + b^2[2b^2 + a^2(a^2+b^2)])}{3ab(a^2+b^2)^2} - \frac{(2b^2 + a^2)(2a^2 + b^2(a^2+b^2))}{8ab(a^2+b^2)^2}\right],$$

ou, en simplifiant,
$$U = \frac{\pi}{8}\left[-\frac{3ab(a^2-b^2)^2}{16(a^2+b^2)^2} - \frac{(a^2+b^2)^2}{4ab(a^2+b^2)^2}\right].$$

Figurons de nouveau la portion de courbe AMBCND décrite par le point (x, y) lorsque φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 4).

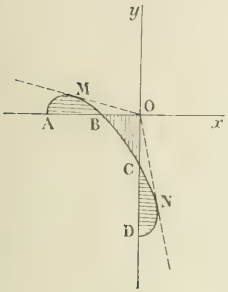


Fig. 4.

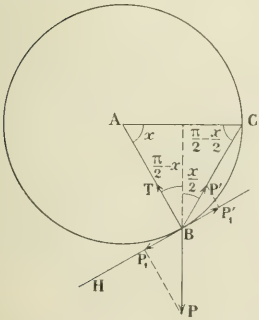
On voit immédiatement que
$$U = -\text{aire OBAMO} + \text{aire OMB} + \text{aire OBC} + \text{aire OCN} - \text{aire ONDCO},$$
ce qui montre que U est la somme algébrique des aires couvertes de hachures, les aires couvertes de hachures horizontales étant précédées du signe —, et les aires recouvertes de hachures verticales, du signe +.

Prenons maintenant la valeur absolue de U et multiplions-la par 4, nous avons
$$\frac{\pi}{8}\left[\frac{3ab(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a^2+b^2)^2}\right]$$
qui représente la somme des aires des quatre boucles de la figure 3 diminuée de l'aire de la région où se trouve l'origine.

Dr Werner GAEDECKE.

MÉCANIQUE

2086. — *Un fil de poids négligeable est fixé par l'une de ses extrémités* A ; *il supporte en* B, *à une distance donnée* AB = *a du point* A, *un poids* P ; *il passe ensuite sur une très petite poulie* C *située à la même hauteur que le point* A *et à une distance* AC *de ce point égale aussi à a ; enfin il supporte par son extrémité libre un poids* $P' = \frac{P}{\sqrt{3}}$.



1° *Trouver la figure d'équilibre du système.*

2° *Montrer que cette figure d'équilibre est stable.*

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1912.*)

Le point B est en équilibre sous l'action de son poids P, de la tension P' du fil BC et de la tension T du fil BA. Nous écrirons que la somme des projections de ces forces sur l'horizontale et sur la verticale est nulle.

En désignant par x l'angle CAB, nous obtenons sans difficulté
$$T\cos x - P'\sin\frac{x}{2} = 0, \qquad T\sin x + P'\cos\frac{x}{2} - P = 0;$$
et, en éliminant T, nous avons
$$P\cos x - P'\cos\frac{x}{2} = 0,$$
ou enfin, en remplaçant $\cos x$ par $2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ et P' par $\frac{P}{\sqrt{3}}$.
$$2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0.$$

Cette équation admet une seule racine positive $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui nous donne

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{\pi}{3}.$$

Il en résulte que dans la position d'équilibre, le triangle ABC est équilatéral.

Il reste à montrer que cette position d'équilibre est stable. Pour cela, déplaçons le point B à partir de la position d'équilibre. Ce point décrit le cercle de centre A et de rayon AB; projetons les forces P et P′ sur la tangente en B au cercle suivant P_1 et P'_1. La résultante R de ces deux forces a pour valeur algébrique $P_1 - P'_1$ (sens positif BH), ou $P\cos x - P\cos\frac{x}{2}$, ou encore

$$R = P\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{x}{2}\right).$$

Cette fonction est nulle pour $x = \frac{\pi}{3}$, et sa dérivée $P\left(-\sin x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{x}{2}\right)$ est négative pour $x = \frac{\pi}{3}$; donc lorsque x croît de $\frac{\pi}{3} - \varepsilon$ à $\frac{\pi}{3} + \varepsilon$, la résultante R décroît; elle est positive pour $x < \frac{\pi}{3}$ et négative pour $x > \frac{\pi}{3}$. Elle ramène donc le point B à sa position d'équilibre, ce qui montre que la position d'équilibre est stable.

MARCEL ULLMANN, 47e d'artillerie, à Héricourt.

Bonnes solutions par MM. André Courtois, à Avesnes-sur Helpe (Nord); L. Gisan; G. Lacu, à Douai; R. Manen, à Albi; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2117. — INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION. — *Données : $aa' = 22$ centimètres, $ao = a'o' = 6$ centimètres.*

Surface S : tore ayant pour axe de révolution la verticale du point o, et pour méridienne le cercle (C, C′) de centre a, a′ et de rayon ao.

Surface Σ : Soient : D le contour apparent horizontal de S, (b, b′) et (f, f′) deux points de D situés à droite du plan de front de C, et définis par

$$a'b' = a'f' = 3 \text{ centimètres}.$$

On construira le centre h du cercle passant par les trois points o, b, f.

La surface Σ est engendrée par le cercle (C, C′) tournant autour de la verticale du point h.

1° *On [illegible] quelconque avec sa bissectrice pour la section méridienne de Σ et pour la courbe d'intersection de S et Σ. On représentera la construction en traits noirs discontinus ou en traits rouges.*

2° *Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :*

en projection horizontale, le solide commun à S et Σ ;

en projection verticale, la partie de Σ extérieure à S.

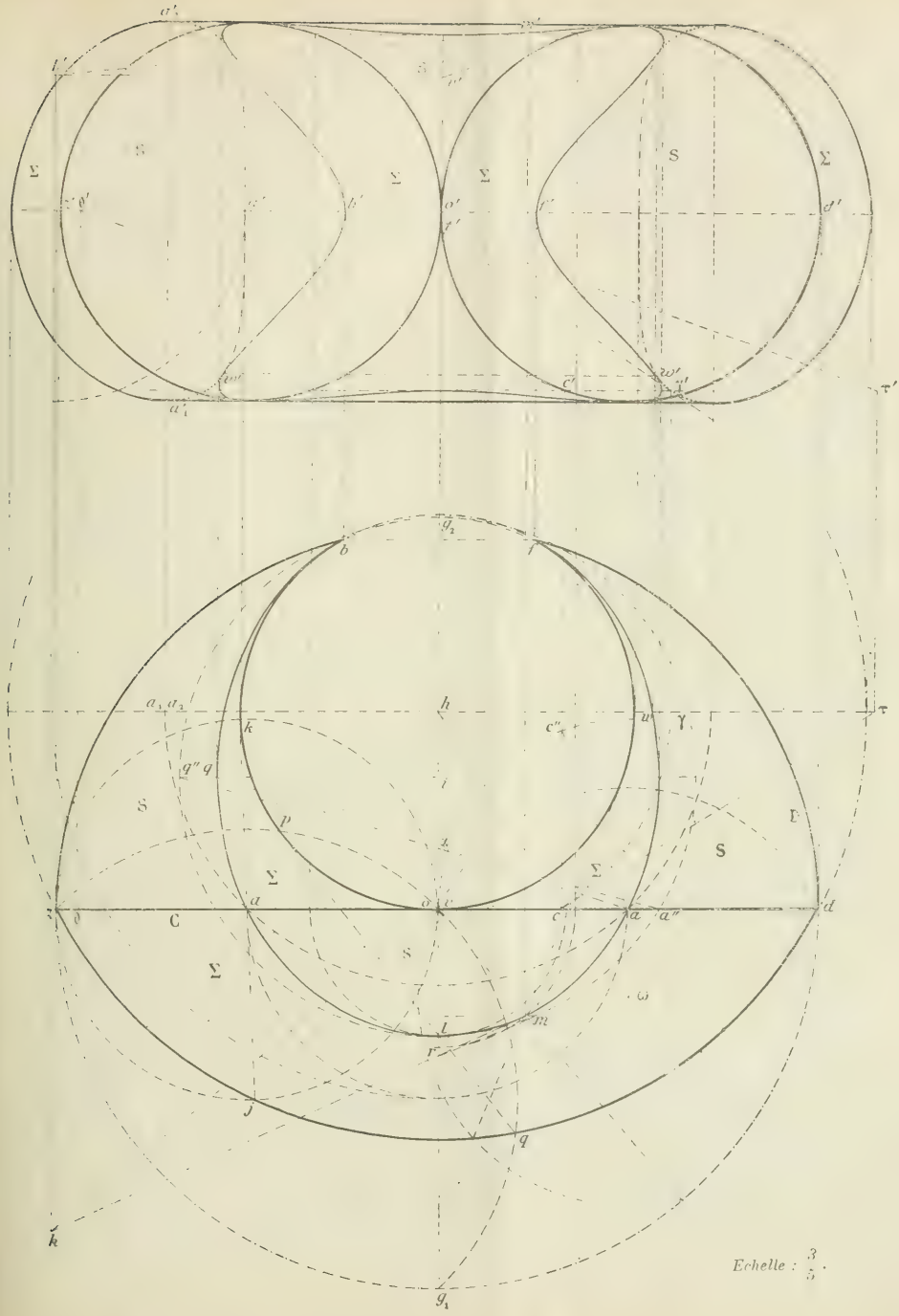
3° *Rédiger, sur feuille séparée, une notice expliquant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, la construction des points [illegible] et [illegible].*

Titre et cadre inutiles.

(École des Mines de Saint-Étienne, concours de 1912.)

Le tore S a pour contour apparent horizontal la circonférence engendrée par l'extrémité d, d' du diamètre horizontal du cercle C, et le point o. Son contour apparent vertical se compose des deux circonférences égales tangentes au point o', et des deux tangentes communes horizontales à ces deux circonférences, limitées aux points de contact.

Le tore Σ a pour contour apparent horizontal les deux circonférences concentriques engendrées par les deux


Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
C
S
Σ
S
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Σ
S
Σ
Echelle : 3/5.

extrémités (o, o') et (d, d') du diamètre horizontal de C dans sa révolution autour de l'axe vertical h. Son contour apparent vertical se compose des deux courbes symétriques par rapport à l'axe vertical, formant la méridienne de front, et des deux horizontales projections du parallèle décrit par chacune des extrémités du diamètre vertical du cercle C.

Méridienne de Σ. — On obtient un point quelconque de la méridienne de front en amenant un point (c, c') du cercle générateur dans le plan de front de l'axe par une rotation autour de h. La tangente en ce point (γ, γ') est la trace verticale du plan tangent en ce point à la surface. Or nous savons que ce plan coupe l'axe de la surface au même point que le plan tangent en (c, c') ; ce plan tangent est déterminé par la tangente au cercle C en ce point, dont nous avons le rabattement sur le plan de l'équateur en $c''\theta$, et par la tangente au parallèle du point c, $c\tau$. Nous aurons le point d'intersection de ce plan avec l'axe en le coupant par le plan de front de l'axe, qui donne la ligne de front $\tau't'$ parallèle à $c'\theta'$, et cette ligne coupe l'axe au point t' cherché. La tangente à la méridienne est donc la droite $t'\gamma'$.

Intersection des deux surfaces. — La courbe d'intersection se compose des deux cercles C qui forment la méridienne de S et d'une autre courbe que nous allons déterminer. On pourrait la trouver en coupant les deux surfaces par une série de plans horizontaux ; chacun de ces plans détermine sur chaque surface des sections circulaires dont les points communs sont des points de la courbe d'intersection. Remarquons à cet égard qu'un plan horizontal quelconque coupe le cercle générateur C en deux points dont les projections horizontales sont symétriques par rapport au point a.

Rappelons alors la proposition suivante : étant donnés deux axes fixes Ox et Oy rectangulaires, un point A fixe sur Ox et deux points O et ω fixes sur Oy, si on prend sur Ox deux points variables B_1 et B_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à A et que l'on décrive les circonférences de rayons OB_1 et ωB_2, le lieu de leurs points d'intersection est une ellipse qui a Oy pour axe de symétrie. Il en résulte que la projection horizontale de l'intersection des deux tores sera une ellipse ayant un axe de symétrie sur la droite oh. On savait d'ailleurs que la courbe commune aux deux surfaces était symétrique par rapport au plan vertical des axes, oh, et aussi par rapport au plan horizontal, équateur commun des deux surfaces.

Au lieu de prendre des plans horizontaux auxiliaires pour déterminer l'intersection des deux surfaces, il y a avantage à se servir des sphères qui passent par le cercle générateur C. Toutes ces sphères ont en effet leurs centres sur le plan de l'équateur et par suite coupent chacun des deux tores suivant un autre cercle dont le plan est vertical, et dont on a le diamètre en joignant les points d'intersection des cercles de contour apparent horizontal. En particulier nous obtenons le grand axe de l'ellipse en déterminant les points qui sont sur oh et pour cela il suffit de faire passer la sphère par le cercle de profil og_1 et le cercle C ; son contour apparent horizontal coupe en p et q les deux parallèles du tore Σ, et la droite pq donne un sommet l de l'ellipse. On a de la même manière le second sommet sur le même axe, en faisant passer la sphère par le cercle de profil og_2. Enfin on obtient les points de l'ellipse situés sur le plan méridien od en prenant la sphère limite qui a pour rayon oa, et en joignant jk qui coupe le méridien de front au point a cherché. Connaissant maintenant l'axe g_1g_2 de l'ellipse et le point a, on peut trouver facilement le second axe au moyen du cercle principal de l'ellipse : la corde $a''\alpha q''$ donne dans l'ellipse la corde αq qui passe par le sommet q cherché. On aurait pu aussi utiliser les points b et f où se coupent les cercles de contour apparent horizontal de chaque tore. Nous avons donné la construction d'un point courant (m, m') au moyen de la sphère auxiliaire de centre ω. On peut trouver la tangente en ce point par la méthode ordinaire au moyen du plan des normales aux deux surfaces, mais puisque nous savons déjà que le point m est un point de l'ellipse dont nous avons construit le cercle principal, on peut obtenir immédiatement la tangente en m à cette ellipse soit mr. Pour en déduire la projection verticale, il suffit de définir le plan tangent en M au tore S, par exemple, par la tangente $(mv, m'v')$ au cercle générateur qui passe en ce point, et par l'horizontale $(vh, v'h')$. La tangente à la courbe en (m, m'), étant dans ce plan tangent, rencontre cette horizontale en un point (h, h') et la droite $h'm'$ est la tangente à la projection verticale en m'.

Parties vues et parties cachées sur chaque projection. — En projection horizontale nous devons conserver le solide commun. Ce solide se projette entièrement dans la portion de surface commune aux deux contours apparents horizontaux. Cette portion de surface est limitée par l'arc $dqjz$ et l'arc $bkof$ d'une part, puis par les deux arcs bz et fd d'autre part. Elle est d'ailleurs divisée par les lignes d'intersection en différents segments tels qu'une verticale, mobile dans toute son étendue, et limitée supérieurement à celle des surfaces qui est vue par l'observateur, a son extrémité supérieure sur la même surface tant qu'elle reste sur le même segment, et sur l'autre surface si elle traverse une ligne d'intersection.

On en déduit sans peine pour chaque segment celle des surfaces qui est vue par l'observateur situé à l'infini en haut, comme nous l'avons indiqué par les lettres S et Σ.

En projection verticale nous devons seulement conserver la partie du solide Σ extérieure au tore S. Comme le tore S a sa projection verticale à l'intérieur du contour apparent du tore Σ, nous voyons immédiate-

ment qu'il faudra conserver toutes les régions qui se projettent entre ce contour apparent et la ligne d'intersection des deux tores. En raisonnant alors comme nous l'avons fait pour la projection horizontale, mais en prenant une droite de bout mobile dans toute la région qui nous intéresse, nous voyons que le solide vu par l'observateur situé en avant et à l'infini appartient successivement aux tores Σ et S comme l'indique la figure. Il y a lieu d'observer que les arcs tel que a'_1a' de la méridienne du tore Σ sont cachés, d'abord par le solide Σ puis par ce qui reste du solide S, tandis que si l'on ne considérait que les surfaces des tores S et Σ dans les mêmes conditions, la portion d'arc intérieure au cercle C serait vue.

Bonne solution : M. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

CHIMIE

2076. — *Pour le projet d'une usine à acide sulfurique devant produire chaque jour 100 tonnes d'acide (répondant à la formule SO^4H^2), on résoudra les problèmes théoriques suivants :*

1° Quelle sera, en tonnes, la consommation journalière de pyrite de fer ?

2° Quelle sera, en mètres cubes, le volume total d'air (supposé pris à 0° et 76cm) nécessaire chaque jour à la fabrication, à partir de la pyrite ?

3° Quel sera, chaque jour, le nombre de calories dégagées par la formation de l'acide sulfurique liquide à partir du gaz sulfureux, de l'oxygène gazeux et de l'eau liquide ?

Données :

$S + 2O = SO^2$ *gaz* $+ 69^c,2$ (*en calories-kilogrammes par molécule-gramme*).

$S + 3O + H^2O$ *liquide* $= SO^4H^2$ *liquide* $+ 124^c$ (*id.*).

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(*École Centrale, 1912.*)

1. La formule de la pyrite est FeS^2 et représente $56 + 64 = 120$ grammes. Si l'on admet que tout le soufre soit finalement transformé en acide sulfurique, ces 120 grammes donnent $2SO^4H^2$ ou 196 grammes d'acide sulfurique. Donc pour produire 100 tonnes de cet acide, il faut $\frac{120 \times 100}{196} = 61,22$ tonnes de pyrite.

2. Le fer de la pyrite est transformé en oxyde Fe^2O^3, qui contient 1,5 atomes d'oxygène par atome de fer, le soufre en anhydride SO^3 qui contient 6 atomes d'oxygène pour 2 atomes de soufre. Chaque molécule, ou 120 grammes, de pyrite exige donc 7,5 atomes d'oxygène, soit un volume de ce gaz égal à $7,5 \times 11,2 = 84$ litres, ou un volume d'air égal à $\frac{100}{21} \times 84 = 400$ litres. La transformation de 120 kilogrammes exigera 400 mètres cubes et celle de 61,22 tonnes, $\frac{61\,220 \times 400}{120} = 204\,000$ mètres cubes environ.

3. Pour une molécule-gramme ou 98 grammes d'acide sulfurique, la chaleur dégagée est $124 - 69,2 = 54,8$. Pour 1 gramme elle sera $\frac{54,8}{98}$ et pour 100 tonnes elle sera $\frac{54,8}{98} \times 10^6 = 56$ millions de calories environ. C'est la chaleur dégagée par la combustion de 7 tonnes de charbon.

Assez bonnes solutions de MM. G. Bailleul, R. Dufresne et M. Ullmann.

CONCOURS DE 1913 (*Suite.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre et Analyse.

I. **2193.** Soit y une quelconque des fonctions de x qui satisfont à la relation

$$(1) \qquad (x-1)(x-2)y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

On pose

$$y = xu,$$

où u est une nouvelle fonction de x. On demande :

1° De substituer cette expression de y dans l'équation (1), de façon à trouver la relation correspondante entre u et ses dérivées première et seconde ;

2° De déduire du résultat la valeur la plus générale de u satisfaisant à la relation obtenue, par suite la valeur la plus générale $f(x)$ de y satisfaisant à la relation (1) ;

3° De dire ce que sont les courbes $y = f(x)$.

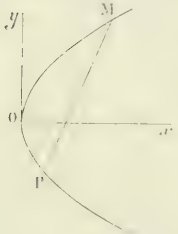
II. — **2194.** Soit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = 2a(1 + \cos\omega),$$

a étant un paramètre ; on demande de calculer le moment d'inertie de l'aire de cette courbe par rapport au pôle.

Géométrie analytique.

2195. — Par un point M(α, β) pris sur la parabole



$$y^2 = 2px$$

rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on mène une corde MP de coefficient angulaire m.

1° Former l'équation de l'hyperbole H circonscrite au triangle OMP et admettant les axes de coordonnées comme directions asymptotiques ;

2° Montrer qu'il passe en M une seconde corde MP′ telle que l'hyperbole H′ correspondante (hyperbole obtenue avec MP′ comme H l'a été avec MP) soit égale à l'hyperbole H ;

3° La corde MP étant donnée, déterminer les centres C et C′ des deux hyperboles H et H′ par une construction géométrique très simple.

Calcul numérique.

2196. — Combien l'équation

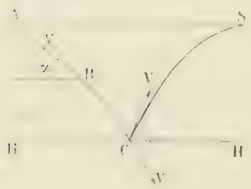
$$\log x + \frac{2}{3 + 18x} + 0{,}0436 = 0$$

a-t-elle de racines positives, le logarithme étant un logarithme vulgaire (base 10) ?

Calculer avec trois décimales la racine ou les racines positives de cette équation. On pourra se contenter d'appliquer, dans ce but, la méthode de substitution.

Mécanique.

2197. — Un point pesant est lancé du sommet A d'un plan AB de longueur $AB = l$ incliné à l'angle α sur l'horizontale, suivant la ligne de plus grande pente, avec une vitesse initiale V_0 ; l'angle du frottement du point sur le plan incliné est $\varphi = 30°$; le point, parvenu en B à l'extrémité inférieure du plan incliné, tombe en chute libre suivant l'arc de parabole BC et rencontre en C le plan horizontal H′H sur lequel il rebondit en conservant sa vitesse et de manière que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion ; il décrit ensuite la parabole CS dont le sommet est le point S situé, eu égard au choix de la vitesse initiale V_0, au même niveau que le point A.



Le plan AB de longueur l et toujours incliné à l'angle α sur l'horizontale, étant ensuite supposé parfaitement poli ($\varphi = 0$), il faut réduire la vitesse initiale V_0 à une certaine valeur v_0 pour que le sommet S de la parabole CS soit encore au niveau du point A.

1° Quel doit être l'angle α ; indiquer cet angle par la valeur numérique de sa tangente, pour que v_0 soit exactement la moitié de V_0 ?

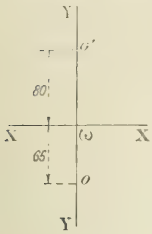
2° Calculer numériquement, pour cette valeur de l'angle α, la vitesse c_0 en supposant

$$AB = l = 7 \text{ mètres.}$$

On fera $g = 9{,}81$.

Épure de Géométrie descriptive.

2198. — Soit un point (o, o') situé sur le grand axe YY de la feuille et dont les coordonnées par rapport au petit axe XX sont $\omega o = 65^{mm}$, $\omega o' = 80^{mm}$.



Ce point est le centre d'un carré dont une diagonale est une droite de front de 16 centimètres de longueur inclinée à 45° sur l'horizon, sa trace horizontale étant à gauche de YY.

L'autre diagonale a sa projection verticale réduite à 13 centimètres, sa trace verticale étant à gauche de YY.

1° Construire les projections de ce carré.

2° Si l'on porte sur deux côtés consécutifs de ce carré et de part et d'autre de leurs milieux des longueurs égales à la demi-diagonale, on obtient deux segments de droites égaux entre eux et à la diagonale du carré.

On les fait tourner chacun d'eux autour de l'axe du carré qui lui est parallèle. Ils engendrent ainsi deux cylindres de révolution.

Représenter la surface supposée sans épaisseur obtenue en ne conservant de ces deux surfaces cylindriques que les parties situées en dessous du plan du carré et extérieures à leur intersection.

On représentera les parties vues en trait plein noir, les parties cachées en pointillé, les principales lignes de construction en rouge.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

2199. — On considère la courbe C définie en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = \frac{t}{1+t^2}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad z = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

I. — Construire les projections de la courbe C sur les trois plans de coordonnées. Indiquer les éléments de symétrie de ces courbes et de la courbe C. Indiquer pour chacune des symétries trouvées la relation entre les t de deux points symétriques.

II. — Montrer qu'il existe une infinité de surfaces du second degré contenant la courbe C. Former leur équation générale. Déterminer les cônes ou cylindres qui font partie de ces surfaces. S'il y a des cylindres, déterminer leurs sections droites.

III. — Former la relation qui doit exister entre quatre valeurs distinctes de t pour que les quatre points correspondants soient dans un même plan. Mettre cette relation sous une forme aussi simple que possible.

Déduire de cette relation celle qui doit exister entre deux valeurs de t pour que les tangentes aux points correspondants soient dans un même plan. Montrer que ce plan est tangent à un des cylindres obtenus précédemment.

IV. — Calculer l'aire d'une des boucles fermées de la projection de C sur le plan des xz.

Calcul trigonométrique.

2200. — Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

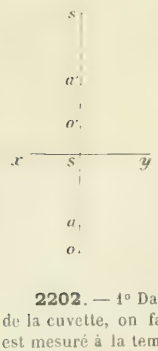
Calculer les valeurs que prend $f(x)$ quand on y fait successivement $x = 7$ et $x = 8$.

Renseignements contenus dans les tables de Chollet :

$$\log \pi = 0{,}49715, \qquad \frac{1700}{\pi} = 475{,}633811, \qquad \frac{1600}{\pi} = 509{,}295818.$$

Épure.

2201. — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — Données : Centre de la feuille au point s ; ligne de



terre xsy ; $ss' = 150$ millimètres ; $sa = sa' = 75^{mm}$; $so = 105^{mm}$; $so' = 30^{mm}$. Le cylindre est de révolution autour d'une parallèle à xy menée par le point (a, a'). Le rayon de la sphère inscrite dans le cylindre est de 45^{mm}. Le cône a pour sommet le point (s, s') et pour base un cercle situé dans le plan passant par la ligne de terre et le point (o, o'). Le centre de ce cercle est en (o, o') ; son rayon est de 90^{mm}.

1° Construire un point quelconque de l'intersection, avec sa tangente. On représentera la construction en traits noirs discontinus ou en traits rouges.

2° Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées, les projections horizontale et verticale du solide commun au cône et au cylindre.

3° Rédiger, sur feuille séparée, une notice expliquant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, la construction des points et tangentes.

Titre et cadre inutiles.

Physique.

2202. — 1° Dans un tube de Torricelli ayant 1^{cm2} de section et $2^{m},75$ de hauteur au-dessus du mercure de la cuvette, on fait passer un volume V d'air humide ($V = 275^{cm3}$) à l'état hygrométrique e : ce volume est mesuré à la température t et sous la pression atmosphérique P correspondant à une hauteur H de mercure à 0°.

On demande à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube et quel sera l'état hygrométrique de l'air contenu dans le tube.

La pression qui règne sur le mercure de la cuvette est la pression atmosphérique P ; la température du milieu ambiant est t.

On supposera la dilatation du mercure dans le tube négligeable.

On représentera par F la tension maximum de la vapeur d'eau à la température t.

2° On augmente ensuite la pression qui règne sur le mercure de la cuvette, jusqu'au moment précis où la vapeur d'eau devient saturante à la température t.

On demande quelle sera l'augmentation de pression $(P' - P)$ nécessaire et à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube.

3° On élève la température du milieu ambiant de t à t' en maintenant constante la pression P' qui règne sur le mercure de la cuvette.

On demande à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube et quel sera l'état hygrométrique de l'air contenu dans le tube.

On représentera par F' la tension maximum de la vapeur d'eau correspondant à la température t' ; on négligera la dilatation du mercure et celle du verre.

4° Même problème que 3° en tenant compte de la dilatation du mercure ; on se contentera de poser les équations sans les résoudre.

Application numérique :

$H = 75^{cm}$ de mercure,	$t =$ 12 degrés,
$F = 10^{mm},4$,	$e =$ 0,5,
$V = 15^{cm3},07$,	$t = 100$ degrés.

Chimie.

2203. — On fait brûler 1^{g} d'acier à x °/₀ de carbone dans un volume limité d'oxygène pur en amorçant l'allumage électriquement. On absorbe le gaz carbonique résultant de l'oxydation du carbone dans une quantité connue (n^{cm3}) de solution alcaline NaOH placée dans le vase même où se fait la combustion. Les autres produits d'oxydation restent dans la coupelle où ont brûlé les copeaux d'acier.

Une expérience préalable a montré que 32^{cm3} d'une solution sulfurique à $5^{g},0406$ de SO^4H^2 par litre saturaient exactement les n^{cm3} de la solution de soude.

On constate qu'après combustion $30^{cm3},05$ de la même solution sulfurique suffisent pour saturer l'excès de soude libre et transformer en bicarbonate tout le carbonate neutre qui s'est formé par union du CO^2 avec la soude.

(Les titrages par la solution sulfurique s'effectuent en présence de phénolphtaléine comme indicateur.)

On demande la teneur de l'acier en carbone.

$S = 32$; $O = 16$; $C = 12$.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

24e Année. — N° 1. Octobre 1913.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE (*Fin*),

par M. **G. Fontené**.

VI. Mouvement planétaire (deuxième méthode).

17. Dans l'étude d'un mouvement *rectiligne* où la force est fonction de la seule distance

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x),$$

on prend l'intégrale des forces vives, sauf si $f(x) = ax + b$; dans ce dernier cas, on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b,$$

et on intègre directement. Si l'on a par exemple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x,$$

l'emploi de l'intégrale des forces vives donnerait

$$v^2 = k^2(a^2 - x^2), \qquad kdt = \frac{d\frac{x}{a}}{\pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}},$$

et une discussion analogue à celle du n° 9 donnerait

$$kt = \text{arc}\sin\frac{x}{a}, \qquad \frac{x}{a} = \sin kt,$$

kt variant d'abord de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, puis de $+\frac{\pi}{2}$ à $3\frac{\pi}{2}$ si la variable x croît d'abord de $-a$ à $+a$ avec le signe $+$ devant le radical, puis décroît de $+a$ à $-a$ avec le signe $-$ devant le radical. On préfère écrire directement

$$x = a\sin kt;$$

on en déduit l'expression de la vitesse en fonction de l'abscisse

$$v^2 = k^2(a^2 - x^2),$$

et on aurait tort de demander ici cette expression à l'intégrale des forces vives, car elle donnerait seulement $v^2 = -k^2x^2 + h$, et il faudrait déterminer la constante h en fonction des deux constantes (a et $t_0 = 0$) introduites par l'intégration de l'équation différentielle du second ordre, intégration faite d'un seul coup, sans passer par une équation du premier ordre.

Un fait analogue se produit ici. La formule de Binet donne, pour le mouvement planétaire, une

équation différentielle linéaire à coefficients constants,

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right) = 0;$$

on a donc immédiatement

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}(1 + e\cos\theta),$$

e étant une constante d'intégration.

On ne doit pas demander ici l'expression de la vitesse à l'intégrale des forces vives. La première expression de v^2 écrite au n° 2 donne

$$v^2 = \frac{\mu^2}{C^2}(1 + 2e\cos\theta + e^2) - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2}{C^2}(e^2 - 1).$$

On retrouve les formules

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{C^2 h}{\mu^2}}.$$

18. La trajectoire une fois connue, la loi cinématique du mouvement peut s'obtenir au moyen de l'intégrale des aires ; c'est le calcul indiqué aux numéros 15 et 16.

VII. Le problème inverse.

19. On donne la trajectoire plane d'un mobile de masse m, et on la suppose parcourue autour d'un point fixe suivant la loi des aires, la constante des aires ayant une valeur connue ; on demande l'accélération γ, et par suite la force. Il faut d'ailleurs observer que l'expression obtenue pour la valeur de la force *en chaque point de la courbe*, $F = \gamma(r, \theta)$, n'implique en aucune façon une loi de force *dans le plan* ; cette expression peut être modifiée de mille façons en tenant compte de l'équation de la courbe.

20. On peut d'abord calculer la vitesse par la première des deux expressions de v^2 écrites au n° 2, et en déduire la force par le théorème de la force vive (formule B). Pour le mouvement planétaire, avec

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p},$$

on a ainsi

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(1 + 2e\cos\theta + e^2) = 2\frac{C^2}{p}\cdot\frac{1}{r} - \frac{C^2}{p^2}(1 - e^2),$$

d'où l'on déduit

$$F = \frac{-m\dfrac{C^2}{p}}{r^2}.$$

On peut encore employer la formule de Binet,

$$F = \frac{-mC^2}{r}\left[\frac{d^2\dfrac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right];$$

pour le mouvement planétaire, la parenthèse se réduit à $\dfrac{1}{p}$, et l'on a encore

$$F = \frac{-m\dfrac{C^2}{p}}{r^2}.$$

Quelle que soit la planète ou la comète que l'on considère, que l'orbite soit elliptique, parabolique ou hyperbolique, *la valeur de la constante* $\dfrac{C^2}{p}$ *déduite de l'expérience est toujours la même* ; pour une

orbite elliptique, on calcule cette valeur par la formule

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

On écrit donc

$$F = \frac{-m\mu}{r^2}, \qquad \mu = \frac{C^2}{p}$$

et on fait de cette loi une loi de force dans l'espace. Mais cela tient, comme on voit, à ce que l'on considère plusieurs mobiles parcourant une trajectoire plane autour d'un même point fixe suivant la loi des aires, avec une circonstance particulière : $\frac{C^2}{p} = \text{const.}$

Des deux façons de faire indiquées au début de ce numéro, la première (calcul de la vitesse et emploi du théorème de la force vive) rattache le calcul de la vitesse et celui de l'accélération. On peut écrire

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \qquad h = \frac{-C^2}{\varepsilon b^2} = \frac{-\mu}{\varepsilon a}.$$

21. La trajectoire étant donnée, il semble naturel de faire le calcul du temps, indépendamment de la recherche de la force, par l'intégrale des aires. C'est le calcul indiqué au n° **15**.

22. J'emprunte l'exemple suivant d'un calcul de force aux examens de l'Ecole polytechnique. Soit une développante de cercle

$$r = \frac{a}{\cos u}, \qquad \theta = \operatorname{tg} u - u,$$

décrite sous l'action d'une force centrale émanant du centre du cercle ; on demande l'expression de la force. On doit ici calculer v^2, et en déduire F ; cela donne

$$v^2 = \frac{C^2}{r^2 - a^2}, \qquad F = \frac{-mC^2 r}{(r^2 - a^2)^2}.$$

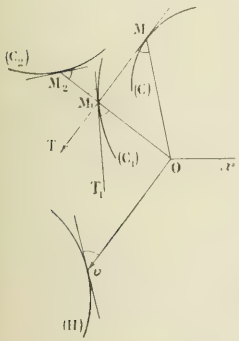
VIII. Considérations géométriques.

23. Revenons au cas général, et soit P la distance du point O à la tangente en M à la trajectoire (C) ; le principe des aires, $2dA = Cdt$, donne $Pds = Cdt$ ou

(D) $$v \times P = C,$$

de sorte que *la vitesse en un point de la trajectoire* (C) *est inversement proportionnelle à la distance du point* O *à la tangente en ce point.*

24. Soit OM_1 la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente en M, et portons sur cette perpendiculaire un vecteur OM_2 égal à v ; le lieu du point M_1 est la podaire (C_1) de l'origine, le lieu du point M_2 est une courbe (C_2) inverse de cette podaire. [Cette courbe (C_2) est encore la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle directeur de centre O, le carré du rayon étant C.]



On obtient l'hodographe (H) en faisant tourner d'un angle droit autour du point O la courbe (C_2).

Soit σ l'arc de l'hodographe, θ l'angle polaire du point M. On a pour le rayon de courbure de l'hodographe

$$\rho_2 = \frac{d\sigma}{d\theta},$$

puisque la tangente à l'hodographe est parallèle au rayon vecteur ; d'autre part

$$|\gamma| = \frac{d\sigma}{dt};$$

donc

$$\frac{v_1}{\rho_2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

ou

$$(E) \qquad v_1' = \frac{C}{r^2} \times \rho_2.$$

Si la trajectoire est une conique de foyer O, la podaire est un cercle, de sorte que l'hodographe est un cercle ; la force est alors en raison inverse du carré de la distance. Inversement, si la force est en raison inverse du carré de la distance, l'hodographe est un cercle, la podaire de la trajectoire est un cercle, la trajectoire est une conique de foyer O. On pourrait encore prendre comme hypothèse le fait que l'hodographe est circulaire.

25. Le rayon de courbure d'une courbe est donné en coordonnées polaires par la formule

$$\rho \sin^3 V = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''};$$

si on applique cette formule à la courbe (C_2), ou à l'hodographe, on a

$$(\alpha) \qquad \rho_2 \sin^3 V = \frac{C}{r_1 + r_1''},$$

la dérivée étant prise par rapport à l'angle $\widehat{xOM_2} = \widehat{xOM_1} = \alpha$. L'angle V relatif à la courbe (C_2) est d'ailleurs égal, au signe près, à l'angle V relatif à la courbe (C).

D'autre part, la courbe (C) est l'enveloppe de la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - r_1 = 0;$$

le point de contact est donné par l'intersection de cette droite avec la droite

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha - r_1' = 0,$$

qui se trouve être la normale ; et le point de contact de cette normale avec son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de la courbe C, est de même sur la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + r_1'' = 0,$$

droite qui est la normale à la développée, qui est par suite parallèle à la tangente en M ; on a donc pour le rayon de courbure de la courbe C au point M la formule connue

$$(\beta) \qquad \rho = r_1 + r_1''.$$

La comparaison des formules (α) et (β), où les dérivées sont prises par rapport à α, donne la formule intéressante

$$(\gamma) \qquad \rho\rho_2 \sin^3 V = C.$$

Comme on a d'ailleurs

$$\rho \sin^3 V = \frac{1}{\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''},$$

on obtient

$$(\delta) \qquad \rho_2 = C\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right],$$

la dérivée étant prise par rapport à θ.

On a dès lors

$$(F) \qquad v_1' = \frac{C^2}{r^2} \times \left[\frac{1}{\rho \sin^3 V}\right];$$

on en déduit, en ayant égard aux signes,

$$v_1' = \frac{C^2}{r^2} \times \left[\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''\right],$$

ce qui est la formule de Binet.

On arrive plus simplement à la formule (F) en écrivant, sans avoir égard aux signes,

$$F \sin V = \frac{mv^2}{\rho}, \qquad F = \frac{mv^2 \sin^2 V}{\rho \sin^3 V} = \frac{mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^4}{\rho \sin^3 V} = \frac{mC^2}{r^2} \times \frac{1}{\rho \sin^4 V}.$$

26. Considérons le cas où la trajectoire, décrite d'après la loi des aires autour du point O, est *une ellipse de centre* O (vibration elliptique). La formule (D) qui exprime le théorème des aires montre, eu égard au second théorème d'Apollonius, que la vitesse en M est proportionnelle à la longueur du demi-diamètre ON conjugué de OM, et l'on a $v = ON \times k$, k étant une constante. La formule des forces vives, eu égard au premier théorème d'Apollonius

$$\frac{v^2}{k^2} + r^2 = \text{const.},$$

donne alors

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} = -k^2 r;$$

on obtient ainsi la loi de la force.

On peut encore déduire cette loi de la formule (F). On a pour une ellipse, en désignant par n la normale limitée à l'axe focal,

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}$$

ou, à cause de $n \times P = b^2$,

$$\rho = \frac{a^2b^2}{P^3} = \frac{a^2b^2}{r^3 \sin^3 V}, \qquad \rho \sin^3 V = \frac{a^2b^2}{r^3};$$

on a donc

$$\gamma = -\frac{C^2}{a^2b^2} \times r = -k^2 r.$$

[En partant de la loi de force $F = -mk^2 r$, les formules cartésiennes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y,$$

donnent, pour des axes convenables,

$$x = a' \cos kt, \qquad y = b' \sin kt,$$

et l'on a, pour $t = 0$, $x = a'$, $v = b' \times k$: on a donc, d'une manière générale, $v = ON \times k$. Le théorème des aires et le théorème des forces vives correspondent alors aux deux théorèmes d'Apollonius ; on a d'une part

$$v \times P = C, \qquad \text{ou} \qquad ON \times P = \frac{C}{k},$$

et d'autre part

$$v^2 = -k^2 r^2 + h, \qquad \text{ou} \qquad k^2(\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2) = h.]$$

IX. Coordonnées r et P.

27. La courbe étant donnée, avec la constante des aires, si l'on peut évaluer P en fonction de r, si l'on peut avoir l'équation de la courbe en coordonnées r et P résolue par rapport à P, on aura v par la formule (D) et le théorème de la force vive fera connaître la force en fonction de r :

$$v = \frac{C}{P(r)}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr};$$

on peut d'ailleurs écrire

$$\text{(G)} \qquad \gamma = \frac{-C^2}{P^3}\frac{dP}{dr}.$$

28. Cette méthode est applicable aux courbes données par l'équation générale

$$\text{(1)} \qquad r^n = a^n \cos n\theta.$$

On a alors

$$V = \frac{\pi}{2} - n\theta, \qquad P = r \sin V = r \cos n\theta = \frac{r^{n+1}}{a^n},$$

équation de la courbe en coordonnées r et P. On a donc

$$v = \frac{C'}{r^{n+1}} \qquad (C' = Ca^n),$$

d'où

$$F = -\frac{m(n+1)C'^2}{r^{2n+3}}.$$

La réciproque est vraie *sous la condition* $v_0 = \frac{C'}{r_0^{n+1}}$. On a en effet, avec cette hypothèse,

$$v^2 = C'^2 \int_r^\infty \frac{-2(n+1)}{r^{2n+3}}\, dr = \frac{C'^2}{r^{2n+1}}, \qquad v = \frac{C}{r^{n+1}};$$

on connaît C, ou encore on connaît P_0 qui fait connaître C, et on pose $a^n = \frac{C}{C'}$; on a alors

$$P = \frac{r^{n+1}}{a^n}, \qquad \sin V = \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

d'où

$$n\,d\theta = \frac{d\frac{r}{a^n}}{\sqrt{1 - \frac{r^{2n}}{a^{2n}}}}, \qquad r^n = a^n \cos n\theta.$$

Parmi les courbes données par l'équation générale

$$r^n = a^n \cos n\theta,$$

on peut signaler les suivantes :

$n = -1$, droite perpendiculaire à l'axe polaire.

$n = 1$, circonférence passant en O et ayant son centre sur Ox.

$n = -2$, hyperbole équilatère $(x^2 - y^2 = a^2)$.

$n = 2$, lemniscate.

$n = -\frac{1}{2}$, parabole $\left(r = \frac{a}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}\right)$.

$n = \frac{1}{2}$, cardioïde $\left(r = \frac{a}{2}\cos\theta + \frac{a}{2}\right)$.

29. La spirale logarithmique

$$r = e^{a\theta}$$

est un cas limite des courbes précédentes, en supposant que n tend vers zéro, avec un déplacement infiniment grand de l'axe polaire, a croissant au-delà de toute limite. Ce fait a été signalé par M. Haton de la Goupillière, et je crois me rappeler que M. Allégret en a donné une démonstration. Si l'on remplace l'axe polaire Ox par un nouvel axe polaire OX correspondant à la valeur θ_0 de l'angle θ, on a

$$(Ox, OM) = (Ox, OX) + (OX, OM) \qquad \text{ou} \qquad \theta = \theta_0 + \Theta;$$

l'équation générale ci-dessus devient

$$r = a\,[\cos(n\theta_0 + n\Theta)]^{\frac{1}{n}}$$

ou

$$r = a\,[\cos n\theta_0 \cos n\Theta - \sin n\theta_0 \sin n\Theta]^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons que n tende vers 0, en même temps que θ_0 croît au delà de toute limite, sous la condition

$$\operatorname{tg} n\theta_0 = -k, \qquad \frac{\sin n\theta_0}{-k} = \frac{\cos n\theta_0}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

k étant une quantité donnée. On a

$$r = \frac{a}{(1+k^2)^{\frac{1}{2n}}}(\cos n\theta + k\sin n\theta)^{\frac{1}{n}},$$

ou, en supposant que a croît indéfiniment d'après la formule

$$a = (1+k^2)^{\frac{1}{2n}}, \qquad r = (\cos n\theta + k\sin n\theta)^{\frac{1}{n}}.$$

Si l'on remplace n par $\frac{1}{p}$, p étant un infiniment grand, il vient

$$r = \left(\cos\frac{\theta}{p} + k\sin\frac{\theta}{p}\right)^p;$$

et on peut démontrer que le second membre a pour limite $e^{k\theta}$. Le résultat annoncé se trouve ainsi établi.

La formule $$V = \frac{\pi}{2} + n\theta$$

devient $$V = \frac{\pi}{2} + n\theta_0 + n\theta = \frac{\pi}{2} + n\theta_0, \qquad \text{et l'on a} \qquad \operatorname{tg} V = \frac{-1}{\operatorname{tg} n\theta_0} = \frac{1}{k},$$

comme on le verrait directement. On a alors

$$P = r\sin V, \qquad v = \frac{C'}{r} \qquad \left(C' = \frac{C}{\sin V}\right), \qquad F = \frac{-mC'^2}{r^3}.$$

Note I. — Question de signe. (D'après l'ouvrage de M. Appell.)

Lorsque la force est fonction de la seule distance, $F = \varphi(r)$, on a

$$v^2 = f(r) + h,$$

d'où, par exemple, $$dt = \frac{dr}{\pm\sqrt{\psi(r)}}, \qquad d\theta = \frac{C\,dr}{\pm r^2\sqrt{\psi(r)}}.$$

Le signe à prendre au début devant le radical sera déterminé par les conditions initiales. Comme $\frac{dr}{dt}$ est la projection de la vitesse sur le rayon vecteur, la connaissance de la vitesse initiale entraînera celle du signe de $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$, pourvu que cette vitesse initiale ne soit pas perpendiculaire au rayon vecteur, c'est-à-dire pourvu que $\psi(r_0)$ ne soit pas nul. Si la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur, considérons l'équation du mouvement sur le rayon vecteur

$$\frac{d^2r}{dt^2} = F + \frac{mC^2}{r^3};$$

à cause de $C = \pm r_0 v_0$, la force apparente qui produit ce mouvement est au début

$$F_0 + \frac{mv_0^2}{r_0};$$

la vitesse initiale, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$, du mouvement en question étant nulle, selon que l'on aura $F_0 + \frac{mv_0^2}{r_0} > 0$ ou < 0, r ira d'abord en croissant ou en décroissant, on prendra le signe $+$ ou le signe $-$.

Reste le cas singulier où, la vitesse initiale étant perpendiculaire au rayon vecteur, on a en même temps

$$F_0 + \frac{mC^2}{r_0^3} = 0, \qquad F_0 + \frac{mv_0^2}{r_0} = 0, \qquad v_0^2 = \frac{-F_0 r_0}{m}.$$

ce qui suppose une force attractive au début ; la vitesse initiale du mouvement sur le rayon vecteur étant nulle, la force apparente qui produirait ce mouvement étant également nulle au début, le point reste immobile sur le rayon vecteur ; la trajectoire est une circonférence, le mouvement est uniforme en vertu du principe des aires. La loi de la force n'intervient pas, puisque la force est fonction de la seule distance, laquelle ne varie pas ; la force apparente dont il est question ci-dessus reste nulle pendant le mouvement. Ainsi, *quand la force est fonction de la seule distance, si la vitesse initiale est perpendiculaire*

au rayon vecteur, et si l'on a

$$v_0^2 = \frac{-F_0 r_0}{m},$$

le point mobile décrit une circonférence d'un mouvement uniforme.

Avec $F = \frac{-m\mu}{r^2}$, on doit avoir $v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$, résultat déjà obtenu dans l'étude du mouvement planétaire.

Observons à ce propos que, si un mobile décrit une circonférence sous l'action d'une force centrale émanant du centre de cette circonférence, la composante tangentielle est constamment nulle, de sorte que le mouvement est uniforme, et l'on a

$$F = \frac{-mv^2}{r},$$

ce qui explique la condition $F_0 + \frac{mv_0^2}{r_0} = 0$, écrite ci-dessus.

L'une ou l'autre des formules (C') et (C'') donne d'ailleurs

$$F + m\frac{C^2}{p^3} = 0,$$

La formule

$$F = \frac{-m\frac{C^2}{p}}{p^2},$$

obtenue dans l'étude du mouvement planétaire (n° 20), renferme naturellement comme cas particulier la formule actuelle

$$F = \frac{-mC^2}{p^3}.$$

Note II. - Tangentes isotropes.— Les trajectoires paraboliques obtenues en lançant un point pesant, d'une même position initiale A, avec la même vitesse et dans des directions différentes, ont la même directrice. M. Darboux a indiqué la véritable origine de cette propriété. Le point A étant supposé placé sur l'axe Oy (axe descendant), et l'origine des coordonnées étant telle que l'on ait $v_0^2 = 2g \times \overline{OA}$, on a pour chacune des trajectoires

$$v^2 = 2gy, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy;$$

aux points de la courbe situés sur la droite $y = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = \pm i$, et cette droite est la directrice de la parabole.

M. Appell a développé cette idée (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1912, p. 289), et en a fait l'application au cas des forces centrales. Pour une attraction en raison inverse du carré de la distance, la trajectoire étant une conique de foyer O, et la vitesse étant donnée par la formule

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

les *deux* points pour lesquels on a $r = \frac{2\mu}{-h}$ sont des points à tangentes isotropes, tangentes issues du second foyer, et la valeur absolue de r est le rayon $2a$ du cercle directeur de centre O ; on retrouve ainsi la formule du n° 11,

$$2a = \frac{\mu}{-h},$$

étant le signe de $-h$. Du fait que les tangentes menées de O à la conique ont leurs points de contact à distance finie, et du fait que le produit v^2r^2 reste fini à distance finie, il résulte, comme le montre M. Appell, que les tangentes menées de O à la conique sont isotropes : le point O est un foyer ; on a ainsi les deux dernières tangentes isotropes, correspondant à $r = 0$, $v = \infty$.

Dans le cas d'une attraction proportionnelle à la distance, la trajectoire étant une ellipse de centre O, et la vitesse étant donnée par la formule

$$v^2 = -k^2r^2 + h,$$

les quatre points pour lesquels on a $r^2 = \frac{h}{k^2}$ sont les points à tangentes isotropes ; ces points étant, comme l'on sait, sur le cercle orthoptique, on a

$$a^2 + b^2 = \frac{h}{k^2},$$

résultat conforme à ce qu'on a trouvé au n° 26. Les tangentes menées de O à l'ellipse ayant leurs points de contact à l'infini, le point O n'est pas un foyer.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Places réservées aux sous-ingénieurs et contrôleurs des mines et admission des étrangers aux cours spéciaux.

Concours de 1912.

Algèbre et Analyse.

2092. — *Un point matériel est lancé en O suivant Ox à l'instant $t = 0$ avec la vitesse v_0. Il se déplace dans un milieu résistant dont la résistance est proportionnelle à la puissance m^{me} de la vitesse (m positif, mais non forcément entier). On sait que son mouvement est régi par l'équation différentielle*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K\left(\frac{dx}{dt}\right)^m.$$

Intégrer cette équation. Discuter le moment où le point s'arrêtera.

Posons $\frac{dx}{dt} = v$, l'équation donnée s'écrit

$$\frac{dv}{dt} = -Kv^m, \qquad \text{ou} \qquad v^{-m}dv = -Kdt;$$

les variables sont séparées.

1° Supposons $m = 1$. Nous avons $\frac{dv}{v} = -Kdt$, d'où nous tirons immédiatement

$$L\,|\,v\,| = -Kt + L\,|\,v_0\,|, \qquad L\left|\frac{v}{v_0}\right| = -Kt, \qquad \text{et} \qquad v = v_0e^{-Kt},$$

puis $dx = v_0e^{-Kt}dt$, et, en remarquant que pour $t = 0$ x est nul,

$$x = \frac{v_0}{K}(1 - e^{-Kt}).$$

Quand t croît de 0 à $+\infty$, x croît de 0 à $\frac{v_0}{K}$. La vitesse décroît constamment et a pour limite zéro pour t infini.

2° Soit maintenant $m \neq 1$. De l'équation $v^{-m}dv = -Kdt$ nous tirons

$$\frac{v^{1-m}}{1-m} - \frac{v_0^{1-m}}{1-m} = -Kt,$$

ou (1) $$dx = [v_0^{1-m} - K(1-m)t]^{\frac{1}{1-m}}dt,$$

et pour intégrer ceci il faut encore distinguer deux cas suivant que l'exposant $\frac{1}{1-m}$ est égal à -1 ou différent de cette valeur.

Si $\frac{1}{1-m} = -1$, c'est-à-dire si $m = 2$, la dernière équation s'écrit

$$dx = \frac{v_0 dt}{v_0 \mathrm{K} t + 1},$$

et nous donne

$$x = \frac{1}{\mathrm{K}} \mathrm{L}(1 + v_0 \mathrm{K} t).$$

Quand t croît de 0 à $+\infty$, x croît de 0 à $+\infty$; la vitesse va constamment en diminuant et a pour limite zéro pour t infini.

Dans ces deux cas particuliers, $m = 1$ et $m = 2$, le mobile ne s'arrête pas.

Si nous supposons maintenant m différent de 1 et de 2, de l'équation (1) nous tirons sans difficulté

$$x = \frac{1}{\mathrm{K}(m-2)} \left[(v_0^{1-m} - \mathrm{K}(1-m)t)^{\frac{m-2}{m-1}} - v_0^{2-m} \right].$$

Pour que le mobile s'arrête, il faut que sa vitesse soit nulle ; on doit donc avoir $1 - m > 0$ et $v_0^{1-m} - \mathrm{K}(1-m)t = 0$, c'est-à-dire

$$t = \frac{v_0^{1-m}}{\mathrm{K}(1-m)}.$$

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions par MM. André Covatois, à Avesnes-sur-Helpe (Nord) ; Dodier et Ullmann, 15e d'artillerie à Héricourt ; R. Dufour, école normale de Nancy ; G. Fourcy ; H. Frobert, à Paris ; Charles Huard, à Varzy ; G. Lach, à Douai ; M. Mazet, conducteur des ponts et chaussées à Bougie ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; Gaston Singier, à Houplines.

2093. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = xe^x.$$

Discuter la forme des solutions suivant la valeur du paramètre réel λ.

On sait que pour obtenir l'intégrale générale de l'équation avec second membre

$$(1) \qquad 2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = xe^x,$$

il suffit de calculer l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$(2) \qquad 2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0,$$

et d'ajouter à cette intégrale une intégrale particulière quelconque de l'équation (1).

Formons d'abord l'intégrale générale de l'équation (2).

L'équation caractéristique est

$$f(r) = 2r^3 - 3r^2 + \lambda = 0;$$

pour discuter la réalité de ses racines on peut appliquer le théorème de Rolle. On reconnaît sans difficulté que si λ est compris entre 0 et 1, l'équation a trois racines réelles α, β, γ ; si λ est extérieur à l'intervalle $(0, 1)$ l'équation admet une racine réelle α et deux racines imaginaires conjuguées $p + qi$ et $p - qi$; si $\lambda = 0$, l'équation admet la racine double 0 et la racine simple $\frac{3}{2}$; enfin si $\lambda = 1$, l'équation admet la racine double 1 et la racine simple $-\frac{1}{2}$.

Par suite l'intégrale générale de l'équation (2) sera

λ compris entre 0 et 1	$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}$,
λ extérieur à l'intervalle (0,1)	$Ae^{\alpha x} + e^{px}(B\cos qx + C\sin qx)$,
$\lambda = 0$	$Ae^{\frac{3}{2}x} + Bx + C$,
$\lambda = 1$	$Ae^{-\frac{x}{2}} + e^{x}(Bx + C)$.

Cherchons maintenant une intégrale particulière de l'équation (1). Pour cela, faisons le changement de fonction $y = ue^x$; l'équation différentielle devient

(3) $$2u''' + 3u'' + (\lambda - 1)u = x.$$

Si $\lambda - 1 \neq 0$, cette équation est vérifiée pour $u = \frac{x}{\lambda - 1}$, et par suite, $\frac{xe^x}{\lambda - 1}$ est intégrale de l'équation (1).

Si $\lambda = 1$, on peut vérifier l'équation $2u''' + 3u'' = x$ pour une valeur de u'' de la forme $ax + b$; on trouve sans difficulté $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{9}$. On a donc $u'' = -\frac{x}{3} + \frac{2}{9}$, d'où l'on tire, en intégrant deux fois. $u = -\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{9}$.

On en conclut que $\left(-\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{9}\right)e^x$ ou $-\frac{x^2(x-2)e^x}{18}$ est intégrale de (1).

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc

λ compris entre 0 et 1	$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + \frac{xe^x}{\lambda - 1}$,
λ extérieur à l'intervalle (0, 1)	$Ae^{\alpha x} + e^{px}(B\cos px + C\sin qx) + \frac{xe^x}{\lambda - 1}$,
$\lambda = 0$	$Ae^{\frac{3}{2}x} + Bx + C - xe^x$,
$\lambda = 1$	$Ae^{-\frac{x}{2}} + e^x(Bx + C) - \frac{x^2(x-2)e^x}{18}$.

H. FROBERT, à Paris.

Bonnes solutions par MM. André Courtois ; Dodieu ; G. Esteben ; G. Fougry ; L. A. Gioan ; Jouglens ; G. Lach ; R. Manen ; L. Naucelle ; L. Simon ; A. Rousseau, M. Ullmann.

Géométrie.

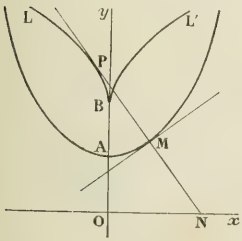
2094. — *Trouver la développée de la chaînette représentée par l'équation*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

où a désigne une longueur donnée.

Exprimer l'arc de cette développée en fonction de l'arc correspondant de la chaînette.

La normale au point $M(x, y)$ de la chaînette $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ a pour équation



$$Y - y = -\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}}(X - x),$$

ou, en remplaçant y par $a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$,

$$X + Y\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} - x - \frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a} = 0.$$

Dérivons cette équation par rapport à x, nous avons

$$\frac{1}{a}Y\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} - 1 - \mathrm{ch}\,\frac{2x}{a} = 0;$$

ces deux équations déterminent le point limite P de la normale. En résolvant ces deux équations par rapport à X, Y, nous obtenons les coordonnées du point P,

$$X = x - \frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}, \qquad Y = 2a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a};$$

ce sont les équations paramétriques de la développée.

Nous voyons ainsi que l'ordonnée du point P est double de celle du point M; on en conclut que le point M est le milieu de PN, résultat bien connu.

Si l'on change x en $-x$, X change de signe et Y ne change pas; donc la développée est symétrique par rapport à Oy, ce qui était à prévoir. Nous ferons varier x de 0 à $+\infty$.

Nous avons

$$\frac{dX}{dx} = 1 - \mathrm{ch}\,\frac{2x}{a} = -2\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}, \qquad \frac{dY}{dx} = 2\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}.$$

Quand x croît de 0 à $+\infty$, X décroît de 0 à $-\infty$, et Y croît de $2a$ à $+\infty$. Nous obtenons ainsi la branche de courbe BL, tangente en B à Oy.

Il est aisé de voir que cette branche infinie est parabolique dans la direction Ox, car on a

$$\frac{Y}{X} = \frac{a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)}{x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)} = \frac{a\left(1 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)}{xe^{-\frac{x}{a}} - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{3x}{a}}\right)};$$

quand x augmente indéfiniment par valeurs positives, le numérateur a pour limite a, et le dénominateur augmente indéfiniment; donc $\frac{Y}{X}$ a pour limite zéro.

Comparons maintenant les arcs $s = \mathrm{AM}$ et $s_1 = \mathrm{BP}$. On trouve aisément $s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$.

D'autre part, on a

$$ds_1^2 = dX^2 + dY^2 = 4\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}\left(1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}\right)dx^2 = \mathrm{sh}^2\,\frac{2x}{a}\,dx^2,$$

puis

$$ds_1 = \mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}\,dx, \qquad s_1 = \frac{a}{2}\left(\mathrm{ch}\,\frac{2x}{a} - 1\right) = a\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}.$$

En éliminant $\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, on trouve $\qquad s_1 = \frac{s^2}{a}$.

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions de MM. A. Courtois; Dodier; H. Frobeat; Jouglens; M. Mazet; L. Naucelle; A. Rousseau; A. Roux, lycée de Lille; L. Simon, à Fourmies; Gaston Singier; Marcel Ullmann.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1912 (*Fin*).

Physique.

2041. — *Soit un crown et deux flints* C, F *et* F′. *Leurs indices de réfraction pour la raie* D *sont respectivement* $n = 1{,}51007$, $n' = 1{,}57524$ *et* $n'' = 1{,}64985$. *La dispersion de chacun de ces trois verres, dans le spectre visible, est définie par le tableau suivant, qui fait connaître les valeurs de l'accroissement* δn *de l'indice quand on passe de la raie* D *respectivement aux raies* C, Tl, F, Hγ:

	δn	$\delta n'$	$\delta n''$
C	$-0{,}00265$	$-0{,}00405$	$-0{,}00545$
Tl	$+0{,}00280$	$+0{,}00449$	$+0{,}00616$
F	$+0{,}00603$	$+0{,}00991$	$+0{,}01382$
Hγ	$+0{,}01085$	$+0{,}01831$	$+0{,}02576$

On forme, avec le crown C, *une lentille mince biconvexe* L *dont les rayons de courbure antérieur* R_1 *et postérieur* R_2 *ont pour valeurs absolues respectivement* $0^m{,}50$ *et* 1^m.

I. *Calculer la convergence* $\frac{1}{\varphi}$ *et la distance focale* φ *de la lentille* L *pour la raie* D.

II. *Dans le but d'achromatiser la lentille* L *pour les raies* D *et* F, *on veut construire, au moyen du flint* F', *une lentille* L' *destinée à être collée sur la face de* 1^m *de rayon. Calculer :*

1° *Le deuxième rayon de courbure* R'_3 *de la lentille* L' ;

2° *La convergence* $\frac{1}{\varphi'}$ *et la distance focale* φ' *de la lentille composée* LL'.

III. *Résoudre le même problème en remplaçant le flint* F' *par le flint* F''.

IV. *Examiner les aberrations chromatiques de* L, *de* LL' *et de* LL'' *pour les raies* C, Tl *et* Hγ, *par rapport à la raie* D, *de façon à classer les trois lentilles par ordre de préférence à ce point de vue.*

V. *Une lentille composée* LL' *étant achromatisée pour deux raies* D *et* F, *trouver une expression qui caractérise son aberration chromatique pour une troisième raie* H *et qui soit seulement fonction des six nombres suivants : n et n', indices de la raie* D ; *f, f', h et h', accroissements de ces indices quand on passe de la raie* D, *respectivement à la raie* F *et à la raie* H.

On indiquera, dès le début, avec précision les conventions de signes.

Les calculs seront faits avec l'approximation de la règle à calcul.

Conventions de signes : les segments représentant les rayons de courbure et les distances focales seront comptés, en prenant la lentille pour origine, positivement en sens inverse de la lumière incidente, négativement dans le sens de propagation de la lumière. Par exemple, dans une lentille biconvexe, le rayon de courbure de la première face est négatif, celui de la seconde positif ; dans une lentille convergente, la première distance focale, ou distance focale objet est positive, la seconde distance focale, ou distance focale image, est négative.

I. Avec les conventions ci-dessus, la convergence d'une lentille est donnée par la formule générale

$$\frac{1}{\varphi} = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Ici, $\qquad n - 1 = 0{,}51007, \qquad \frac{1}{R_1} = -2 \qquad$ et $\qquad \frac{1}{R_2} = 1.$

On en déduit

$$\frac{1}{\varphi} = 1{,}53021 \text{ dioptries}, \qquad \varphi = 0^m{,}6535.$$

Mais la règle à calcul ne permettrait pas d'utiliser toutes les décimales fournies pour n et donnerait

$$\frac{1}{\varphi} = 1{,}53, \qquad \varphi = 0{,}654.$$

II. 1° La condition d'achromatisme, pour deux couleurs 1 et 2, d'un système de deux lentilles minces dont les rayons de courbure sont respectivement r et s pour l'une, r' et s' pour l'autre, est

$$(n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = -(n'_2 - n'_1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{s'}\right).$$

Si la couleur 1 correspond à la raie D, la couleur 2 à la raie F,

$$n_2 - n_1 = 0{,}00603, \qquad n'_2 - n'_1 = 0{,}00991, \qquad r = -\frac{1}{2}, \qquad s = 1, \qquad r' = 1, \qquad s' = R'_1.$$

On en déduit $R_3 = -1^m,2115$

ou, à l'approximation de la règle à calcul, $R'_3 = -1,21$.

La lentille L′ est donc biconcave.

2° Si φ_1 désigne la distance focale de la lentille L′, la convergence du système est donnée par la formule

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi_1}.$$

Connaissant les rayons de courbure et l'indice de la seconde lentille, on peut calculer $\frac{1}{\varphi_1}$ à l'aide de la première formule. On en déduit

$$\frac{1}{\varphi'} = 0,48015, \qquad \varphi' = 2,0826,$$

ou simplement

$$\frac{1}{\varphi'} = 0,48, \qquad \varphi' = 2,08.$$

III. Pour répéter les mêmes calculs avec le flint F′, il faut prendre $n_2 - n_1 = 0,00603$ et $n_2 - n'_1 = 0,01382$, ce qui donne d'abord $R''_3 = -3,2365$

ou, avec la règle à calcul, $R''_3 = -3,2$,

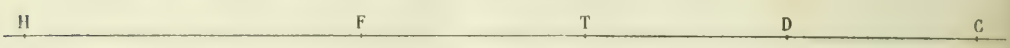
puis, pour la convergence et la distance focale du système pour les raies D et F,

$$\frac{1}{\varphi''} = 0,67957, \qquad \varphi' = 1,4715, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{1}{\varphi''} = 0,68, \qquad \varphi'' = 1,47.$$

IV. Pour étudier l'aberration chromatique de la lentille simple L, calculons sa distance focale pour les diverses couleurs. On trouve

$$\varphi_C = 0,6569, \qquad \varphi_D = 0,6535, \qquad \varphi_T = 0,6499, \qquad \varphi_F = 0,6459, \qquad \varphi_H = 0,6399,$$

ce qui donne les foyers disposés comme il suit, à une échelle 10 :



A la règle à calcul, après avoir calculé exactement les convergences, on trouve, avec beaucoup d'attention,

$$\varphi_C = 0,657, \qquad \varphi_D = 0,654, \qquad \varphi_T = 0,650, \qquad \varphi_F = 0,646, \qquad \varphi_H = 0,640.$$

On peut encore caractériser les aberrations par rapport à la raie D par les rapports suivants, qu'on peut déduire des nombres précédents, ou bien encore calculer en appliquant la formule

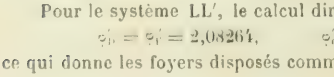
$$f_1 - f_2 = \frac{n_2 - n_1}{n - 1} f:$$

$$\frac{\varphi_C - \varphi_D}{\varphi_D} = 0,0052, \qquad \frac{\varphi_T - \varphi_D}{\varphi_D} = -0,0055, \qquad \frac{\varphi_F - \varphi_D}{\varphi_D} = -0,0116, \qquad \frac{\varphi_H - \varphi_D}{\varphi_D} = -0,0213.$$

Pour le système LL′, le calcul direct des distances focales donne

$$\varphi'_D = \varphi'_C = 2,08264, \qquad \varphi'_C = 2,08502, \qquad \varphi'_T = 2,08177, \qquad \varphi'_H = 2,08640,$$

ce qui donne les foyers disposés comme il suit, toujours à l'échelle 10 :



Le spectre se trouve replié à peu près sur la raie T, de sorte que l'extrémité violette H retombe sur l'extrémité rouge.

A la règle à calcul, on peut trouver les nombres

$$\varphi'_C = \varphi'_D = 2,083, \qquad \varphi'_C = 2,085, \qquad \varphi'_T = 2,082, \qquad \varphi'_H = 2,086,$$

mais sans pouvoir répondre d'une unité sur le dernier chiffre.

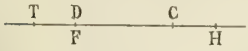
On peut encore, comme pour la lentille L, caractériser les aberrations par rapport à la raie D à l'aide des rapports des intervalles des foyers à la distance focale pour D. Ces rapports peuvent être déduits des nombres qui précèdent ou calculés à l'aide de la formule démontrée au paragraphe V :

$$\frac{\varphi_C - \varphi_D}{\varphi_D} = 0{,}00116, \qquad \frac{\varphi_T - \varphi_D}{\varphi_D} = -0{,}00042, \qquad \frac{\varphi_F - \varphi_D}{\varphi_D} = 0, \qquad \frac{\varphi_H - \varphi_D}{\varphi_D} = 0{,}00182.$$

Pour le système L″, on trouve de même

$$\varphi''_D = \varphi''_F = 1{,}4715, \qquad \varphi''_C = 1{,}47323, \qquad \varphi''_T = 1{,}47077, \qquad \varphi''_H = 1{,}47403,$$

ce qui donne les foyers disposés comme il suit, à l'échelle 10 :



Les foyers sont plus rapprochés que dans le système précédent, ce qui, au premier abord, le fait paraître supérieur, mais sa distance focale est plus courte et si l'on calcule les rapports des intervalles des foyers à la distance focale pour la raie D, on trouve

$$\frac{\varphi_C - \varphi_D}{\varphi_D} = 0{,}00120, \qquad \frac{\varphi_T - \varphi_D}{\varphi_D} = -0{,}00049, \qquad \frac{\varphi_F - \varphi_D}{\varphi_D} = 0, \qquad \frac{\varphi_H - \varphi_D}{\varphi_D} = 0{,}00172.$$

Ce sont sensiblement les mêmes valeurs et, à l'approximation de la règle à calcul, on ne verrait aucune différence. Les deux systèmes sont donc équivalents et le calcul du second n'offrait aucun intérêt à la suite du calcul du premier.

V. Désignons par φ, ψ et ν les distances focales des deux lentilles composantes et de leur système, et considérons, d'une manière générale, deux couleurs 1 et 2. On a respectivement

$$\frac{1}{\nu_1} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\psi_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\psi_2}.$$

Formons la différence

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\psi_1} - \frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\psi_2}, \qquad \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1\nu_2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1\varphi_2} + \frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi_1\psi_2}.$$

Les produits qui forment les dénominateurs peuvent être remplacés par les carrés des distances focales moyennes ν, φ et ψ. D'autre part, on sait que les rapports $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi}$, $\frac{\psi_2 - \psi_1}{\psi}$, sont égaux respectivement aux pouvoirs dispersifs K et K′ des deux verres entre les couleurs 1 et 2. On a donc

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu^2} = \frac{K}{\varphi} + \frac{K'}{\psi}$$

ou bien, en remplaçant $\frac{1}{\nu}$ par $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\psi}$, et désignant par c et c' les convergences,

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu} = \frac{\frac{K}{\varphi} + \frac{K'}{\psi}}{\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\psi}} = \frac{Kc + K'c'}{c + c'},$$

expression qui peut caractériser l'aberration du système entre les couleurs 1 et 2.

En particulier, l'aberration entre les raies D et H, sera

$$\frac{\nu_D - \nu_H}{\nu_D} = \frac{\frac{h}{n-1}c + \frac{h'}{n'-1}c'}{c + c'}.$$

Mais si le système est achromatisé pour les raies D et F, on a

$$\frac{f}{n-1}c + \frac{f'}{n'-1}c' = 0,$$

ce qui permet de remplacer, dans l'expression précédente, c et c' par les quantités proportionnelles $\frac{f'}{n'-1}$ et $-\frac{f}{n-1}$. Il vient finalement

$$\frac{\nu_D - \nu_H}{\nu_D} = \frac{hf' - h'f}{(n-1)f' - (n'-1)f}.$$

Chimie.

2042. — *On traite de l'acide azotique par un excès d'un mélange de sulfate ferreux et d'acide sulfurique, puis on soumet le gaz provenant de cette réaction à la température du rouge vif.*

Le gaz qui a ainsi subi l'action de la chaleur et qui provenait de la décomposition d'un poids d'acide azotique correspondant à $6^g,30$ *de* AzO^3H, *est mélangé au gaz résultant de l'attaque de* $5^g,85$ *de chlorure de sodium par un excès d'acide sulfurique concentré ; puis on fait passer ce mélange sur des boules d'argile imprégnées de chlorure de cuivre et maintenues à une température de* 450° *environ. Il se produit une réaction qui donne naissance à un gaz* A.

Ce gaz A, *après avoir été desséché, est dirigé sur un poids de* 6^g *de sodium légèrement chauffé ; on observe que le métal subit, dans ces conditions, une augmentation de poids de* $4^g,616$.

Déduire de ces données la composition qualitative et quantitative du gaz A, *après dessiccation.*

D'autre part, le produit de l'attaque du sodium par le gaz A *est traité par l'eau et le liquide qui en résulte est additionné d'une solution d'azotate d'argent ; il se forme un précipité. En indiquer la composition ; dire s'il se modifie sous l'action de la chaleur et en donner le poids après calcination à une température de* 500°.

N. B. — On admettra qu'à la température à laquelle le sodium a été chauffé au contact du gaz A, *il ne peut pas se combiner à l'hydrogène.*

Poids atomiques : $Cl = 35,5$; $O = 16$; $Na = 23$; $Az = 14$; $Ag = 108$.

Le sulfate ferreux est oxydé par l'acide azotique qui se trouve transformé en bioxyde d'azote d'après l'équation

$$2AzO^3H + 6SO^4Fe + 3SO^4H^2 = 2AzO + 3(SO^4)^3Fe^2 + 4H^2O.$$

Au rouge vif, le bioxyde d'azote est décomposé :

$$AzO = Az + O.$$

Le poids d'acide azotique donné représente juste $\frac{1}{10}$ de molécule et comme tout l'azote de cet acide se retrouve dans le bioxyde, il y a, après décomposition de celui-ci, $\frac{1}{10}$ d'atome d'azote et $\frac{1}{10}$ d'atome d'oxygène.

D'autre part, $5^g,85$ de chlorure de sodium représentent aussi $\frac{1}{10}$ de molécule, qui fournit $\frac{1}{10}$ de molécule d'acide chlorhydrique, de sorte que le mélange gazeux est représenté par

$$\frac{1}{10}(HCl + Az + O).$$

Quand on fait passer ce mélange sur des boules d'argile imprégnées de chlorure de cuivre qui joue le rôle de catalyseur, il y a oxydation de l'acide chlorhydrique avec formation de chlore et d'eau ; l'azote ne joue aucun rôle. Mais comme cette réaction est limitée, le gaz A, après avoir été desséché, est formé d'azote, d'acide chlorhydrique, de chlore et d'oxygène.

Ce gaz, passant sur du sodium légèrement chauffé, va donner du chlorure NaCl et un oxyde, par exemple Na^2O. L'augmentation de poids résultant de la formation du chlorure est de $3^g,55$, puisque tout le chlore de l'acide chlorhydrique primitif s'y retrouve. Par suite le poids de l'oxygène du gaz A est de

$$4,616 - 3,55 = 1,066,$$

c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ du poids 1,6 de l'oxygène contenu dans le bioxyde d'azote. Par suite la réaction qui a donné naissance au gaz A peut s'écrire

$$\frac{1}{30}(3HCl + 3Az + 3O = H^2O + 2Cl + 2O + 3Az + HCl)$$

et sa composition est la suivante, le volume moléculaire étant $22^l,4$,

Azote	$\frac{1}{10}\,11{,}2 = 1^{l},12,$
Chlore	$\frac{2}{30}\,11{,}2 = 0{,}747,$
Oxygène	$\frac{2}{30}\,11{,}2 = 0{,}747.$
Acide chlorhydrique	$\frac{1}{30}\,22{,}4 = 0{,}747.$

Le produit de l'attaque du sodium se compose de $\frac{1}{10}$ de molécule de chlorure, d'oxyde et d'un excès de sodium. L'eau dissout le chlorure et transforme en soude aussi bien le sodium libre que l'oxyde. Le sodium de cette soude pèse donc $6 - 2{,}3 = 3{,}7$ et représente une fraction d'atome égale à $\frac{3{,}7}{23}$.

Par l'action de l'azotate d'argent, il y aura deux réactions :

$$AzO^3Ag + NaCl = AzO^3Na + AgCl, \qquad AzO^3Ag + NaOH = AzO^3Na + AgOH,$$

la première portant sur $\frac{1}{10}$ de molécule, la seconde sur la fraction $\frac{3{,}7}{23}$.

Le précipité est donc formé de chlorure et d'hydrate d'argent. Le poids du premier est

$$\frac{1}{10}\,143{,}5 = 14{,}35.$$

Une calcination à 500° ne décompose pas le chlorure, mais réduit l'hydrate à l'état d'argent métallique dont le poids est $\frac{3{,}7}{23}\,108 = 17{,}37.$

Le poids du précipité après calcination est donc

$$14{,}35 + 17{,}37 = 31{,}72.$$

Gaston ROY, École normale de Varzy.

CONCOURS DE 1913 (*Suite.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires [1].

Soit T un triangle dont les sommets sont A, B, C ; soit Γ le cercle circonscrit à T. On sait qu'il y a deux cercles tangents à Γ en A et qui touchent BC : l'un, en un point A_1 situé entre B et C, l'autre en un point A_2 extérieur au segment BC.

1° Construire le triangle T connaissant les longueurs AA_1, AA_2 et le côté BC.

2° Soit A′ le milieu de A_1A_2. Calculer la longueur AA′ en fonction des longueurs a, b, c des côtés de T (on supposera $a > b > c$). Trouver la relation qui existe entre la longueur AA′ et les deux autres longueurs analogues BB′ et CC′.

3° Calculer en fonction de a, b, c, les distances des points A′, B′, C′ deux à deux.

4° Soit Γ_a le cercle décrit de A′ comme centre avec AA′ comme rayon ; soient Γ_b et Γ_c les deux autres cercles analogues. Démontrer que ces trois cercles se coupent en deux points I et J. Calculer les angles sous lesquels ces cercles se coupent deux à deux. Indiquer la situation précise des centres de similitude de ces cercles

[1] Des solutions étudiées de la question sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

deux à deux. Quelles sont les particularités du triangle A″B″C″ dont les sommets sont les points homologues de A, B, C, dans une inversion de pôle I?

5° Calculer la longueur de la corde IJ et la distance du centre O de Γ à la droite A′B′, en fonction de a, b, c.

6° On donne les points A′, B′, C′. Démontrer qu'il existe une infinité de triangles T correspondants et construire ceux de ces triangles qui répondent à une valeur donnée du rayon de Γ.

Mathématiques spéciales.

2204. — I. Par deux points fixes A et A′ ($AA' = 2a$), on fait passer un cercle variable de centre C; un cercle de rayon a passe par le point C et son centre C′ est sur la perpendiculaire à AA′ en son milieu, le vecteur $\overline{CC'}$ ayant toujours le même sens. Construire le lieu Γ des points communs aux deux cercles. (On pourra exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.)

II. Une droite variable D perpendiculaire à AA′ rencontre Γ en quatre points M_1, M'_1, M_2, M'_2; au point M_1 on peut associer un point M'_1 tel que le milieu du segment $M_1M'_1$ décrive un cercle Γ_1; montrer que les droites AM_1, $A'M'_1$ sont rectangulaires. Construire le lieu des milieux de tous les segments déterminés sur D par Γ.

III. Les hyperboles équilatères qui passent par A et A′ rencontrent Γ en quatre points formant deux couples de points associés M_1 et M'_1; si l'on suppose un de ces couples constitué par deux points fixes, le lieu des centres des hyperboles correspondantes est un cercle; quel est le lieu du centre de ce cercle et quelle est l'enveloppe de ce cercle, quand on fait varier les points associés supposés fixes primitivement?

IV. Les hyperboles équilatères qui passent par A et A′ et sont tangentes à Γ se distribuent en plusieurs faisceaux ponctuels et une famille constituée par des hyperboles bitangentes à Γ.

On considère deux hyperboles H_1 et H_2 qui font partie de cette famille et sont tangentes à Γ, l'une en M_1 et M'_1, l'autre en M_2 et M'_2, ces quatre points étant en ligne droite; montrer que la droite qui joint le milieu de $M_1M'_1$ au point de rencontre M des tangentes à Γ en M_1 et M'_1 est tangente au cercle Γ_1.

H_1 et H_2 ont une corde commune qui ne passe par aucun des points A, A′; soit P le point où cette corde rencontre AA′; trouver l'enveloppe de MP.

Calcul différentiel et intégral.

Les axes Ox, Oy, Oz étant rectangulaires, on donne un cylindre de révolution (C) ayant pour axe la droite Oz et pour rayon a.

Soient u et v deux paramètres angulaires déterminant les plans tangents au cylindre (C) menés par un point M de l'espace.

Le point M décrivant une surface, sa coordonnée z sera une fonction de u et v, soit $z = a.f(u, v)$, définissant cette surface.

On mène, par le point M, dans le plan tangent en M à la surface, les deux tangentes au cylindre (C), soient MT et MT′.

1° Former l'équation aux dérivées partielles, soit (E), à laquelle doit satisfaire la fonction $f(u, v)$, pour que les deux directions MT et MT′ soient conjuguées sur la surface correspondante, soit (S).

Quelle propriété ont les deux familles de courbes, $u = \text{Const}^e$, $v = \text{Const}^e$, sur la surface (S)?

2° Montrer que l'on peut trouver plusieurs expressions linéaires de la forme

$$\varphi(u, v) = A(u, v).\frac{\partial f}{\partial u} + B(u, v).\frac{\partial f}{\partial v} + C.f, \qquad C = \text{Const}^e$$

telles que l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u.\partial v} = 0$$

admette toutes les solutions de l'équation du second ordre (E).

Déterminer, en utilisant ce résultat, toutes les solutions de l'équation (E).

3° Les solutions de l'équation (E) dépendent de deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v.

Montrer que les surfaces (S) particulières obtenues en annulant successivement l'une ou l'autre de ces fonctions arbitraires sont développables. Les arêtes de rebroussement de ces développables sont-elles arbitraires sur la surface qui les porte?

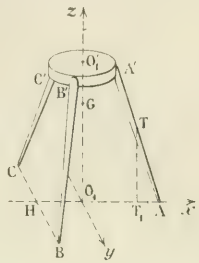
Représenter la solution générale $f(u, v)$, ou la surface (S) générale, à l'aide de ces arêtes de rebroussement et indiquer une génération de la surface.

Mécanique.

Un tabouret est porté par trois pieds identiques AA′, BB′, CC′, également inclinés sur la verticale et terminés par des surfaces très petites qu'on assimilera à trois points A, B, C. Le tabouret est homogène et

symétrique par rapport aux trois plans qui passent chacun par l'axe $O_1O'_1$, du tabouret et par l'un des trois points A, B, C. A l'instant initial, ce tabouret est en équilibre, ses trois pieds reposant en A, B, C sur le sol horizontal supposé assez uni pour qu'on puisse négliger le frottement.

Problème. — 1° En un point T du montant AA′ situé dans le plan vertical de symétrie $O_1O'_1A$ on exerce une force F. A quelles conditions devra satisfaire F pour que l'équilibre primitif subsiste.



2° Au lieu de la force F, on applique une percussion $\mathfrak{P}$ au même point T. Déterminer la distribution des vitesses dans le tabouret à l'instant qui suit immédiatement la percussion. On portera son attention sur la discussion des résultats suivant la direction, la grandeur de la percussion $\mathfrak{P}$ et la position de son point d'application T. On pourra se borner aux trois cas suivants :

I. Le point est dans le plan horizontal du centre de gravité G du tabouret ;

II. La percussion $\mathfrak{P}$ est parallèle à BC ;

III. La percussion $\mathfrak{P}$ est dans le plan de symétrie vertical $O_1O'_1A$.

3° On appliquera les résultats précédents au cas où la ligne d'action de $\mathfrak{P}$:

I. Passe par le point O_1, la percussion étant ascendante ;

II. Passe par le symétrique de O_1, par rapport à A, la percussion étant descendante, le point T étant à distance égale du sol et du plan horizontal du centre de gravité G et sa projection T_1 sur AO_1 divisant AO_1 dans le rapport

$$\frac{T_1A}{O_1T_1} = \frac{1}{3} ;$$

III. Est parallèle à AO_1 et de même sens, le point T étant au-dessous du plan horizontal du centre de gravité G.

4° Dans ce dernier cas (3°, III) on étudiera le *mouvement* du tabouret après la percussion, on calculera la réaction et on discutera les résultats obtenus suivant les valeurs de la percussion.

Notations. — Le triangle ABC est équilatéral.

On appellera H le milieu de BC, O_1 le centre du triangle, G le centre de gravité du tabouret situé sur l'axe $O_1O'_1$.

On posera :

$BC = 2a$, $O_1A = 2b$ $(a = b\sqrt{3})$, $h = O_1G$, $\rho = AG$ $(\rho = \sqrt{h^2 + 4b^2})$, $\Psi = \widehat{O_1AG}$ $(h = 2b \operatorname{tg} \Psi)$.

On appellera M la masse du tabouret, I, J, K ses moments d'inertie par rapport à trois axes passant par G et parallèles respectivement à O_1A, BC et $O_1O'_1$.

On prendra pour axes fixes trois axes rectangulaires coïncidant à l'instant initial avec O_1A, la parallèle à CB menée par O_1 et $O_1O'_1$, les sens positifs comme les indiquent les flèches sur la figure.

On définira la distribution des vitesses dans le tabouret par les projections ξ, η, ζ ; p, q, r, de la vitesse de G et de la vitesse angulaire instantanée de rotation sur des axes mobiles liés au corps et coïncidant avec O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 à l'instant initial.

On appellera $(\alpha, 0, \gamma)$ les coordonnées initiales du point T.

Épreuve pratique.

2205. — Un cylindre a pour base dans le plan horizontal de projection un contour convexe formé d'un demi-cercle de diamètre AB tangent au petit axe et des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est AB. La droite AB est parallèle au petit axe et le centre du demi-cercle est situé sur le grand axe à 6cm à droite du petit axe. La génératrice issue du point A, placé au-dessous du grand axe, passe par le point de cote 12cm, projeté à 16cm à droite du petit axe et à 10cm au-dessous du grand axe.

Un cône a pour base dans le plan horizontal de projection un contour convexe formé d'un demi-cercle de diamètre CD et situé au-dessus de CD et des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est CD. La droite CD est parallèle au grand axe et le centre du demi-cercle est situé à 2cm au-dessous du grand axe et à 16cm à droite du petit axe, le rayon étant 8cm. Le sommet du cône est le point de cote 24cm, projeté à 2cm au-dessous du grand axe et à 4cm à gauche du petit axe.

Représenter la projection horizontale du solide commun aux deux corps supposés limités au plan horizontal de projection.

On éclaire ce solide par des rayons parallèles à une direction fixe, l'ombre du sommet du cône sur le plan horizontal de projection étant le point situé à 16cm au-dessus du grand axe et à 8cm à droite du petit axe. Trouver l'ombre propre du solide commun et son ombre portée sur le plan horizontal de projection.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I. — Algèbre et Analyse.

9200. — On considère la suite $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Montrer que la quantité $u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2$ est égale à ± 1 et que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ a une limite pour n infini.

9201. — Calculer la somme

$$1.2.3\ldots p + 2.3\ldots p.(p+1) + \ldots + n(n+1)\ldots(n+p-1).$$

9202. — Vérifier la relation

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = m - \frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)}{2!} + \frac{1}{3}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{3!} - \ldots$$

9203. — Trouver le quotient de $(x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$ par $(x-1)(x-2)$.

9204. — Montrer que le polynome $x^{m+1} - 1$ $x^{m+2} - 1 \ldots x^{m+p} - 1$ est divisible par $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^p-1)$.

9205. — Démontrer qu'on peut mettre le polynome $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$ sous la forme $P(x-\alpha)^3 + Q(x-\beta)^3$, α et β étant les racines de l'équation $az + b$ $cz + d$ $bz + c^2 = 0$.

9206. — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse mettre le polynome $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ sous la forme $P(x-\alpha)^4 + Q(x-\beta)^4$ est

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est aussi la condition pour que les quatre points ayant pour abscisses les racines de $f(x) = 0$ forment une division harmonique.

9207. — Montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & z & t & x \\ z & t & x & y \\ t & x & y & z \end{vmatrix}$$

est égal à un produit de quatre facteurs linéaires de x, y, z, t.

9208. — Soit a un nombre positif ; on pose $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a + x_1}$, $\ldots$ $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$. Démontrer que pour n infini x_n a une limite et calculer cette limite.

9209. — Soient a_0 et A deux nombres positifs. On pose $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right)$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$, $\ldots$ $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right)$. Démontrer que pour n infini a_n a une limite, et calculer cette limite.

9210. — On considère les deux suites $a_0, a_1, \ldots a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ où a_1 et b_1 sont arbitraires, les termes étant définis par

$$b_n^2 = a_{n-1}b_{n-1}, \qquad a_n = \sqrt{\frac{b_n^2 + a_{n-1}^2}{2}}.$$

Montrer que les deux suites ont la même limite.

9211. — Etudier les séries qui ont pour termes généraux

$-1^n n^2\left(\mathrm{L}\frac{n+1}{n-1}\right)^2$, $\cos\frac{x}{n} - \cos\frac{y}{n}$, $\cos ax^n - \cos bx^n$, $\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$, $n^2 + 1\ r^n$ somme,

$\sqrt{a+n^2} - \sqrt{b+n+n}$, $\mathrm{L}\cos\frac{2}{n}$, $\frac{1}{a+x^n}$, ne^{-n}, $n^2\rho^{\sqrt{n}}$, $\mathrm{L}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$ somme,

$\frac{x^n}{n^{\alpha+\sqrt{n}}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\mathrm{L}\frac{n+1}{n}}$, $\frac{r^n}{n^2}$, $e^{\frac{x^n}{n}}$, $\frac{x^n}{\mathrm{L}n}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+1}$, $\mathrm{L}\cos\frac{x}{n}$,

$-1^n\frac{\mathrm{L}an}{bn+c}$, $x^n\cos n\theta$ somme, $e^{\frac{n^2+1}{n}}$, $n - 2\sqrt{b+n^2} + \sqrt{c+n^2}$, $a\sin\frac{1}{n} + b\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

$\frac{2n+1.2n+3}{2n+2.2n+4.2n!}$ somme, $\frac{1}{n+1^2-1}$ somme, $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$, $\operatorname{tg}^n\frac{x}{a+n}$, $x^n\sin\frac{a}{2^n}$,

$nx\,\mathrm{L}\left(a + \frac{1}{n}\right)$, $\frac{1}{ax^n + by^n}$, $\frac{n}{r^n + 1\,n}$, $a\sin\frac{1}{n} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+1}$, $\sqrt{n^2 + ax + 1} - \sqrt[3]{\frac{n^3+1}{n+1}}$,

$$\mathrm{L}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{a+n}\right).$$

9212. — Calculer la somme de la série $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{6!} + \dots + \frac{1}{(3n)!} + \dots$

9213. — Etudier la série $1 - \frac{x^3}{5} + \frac{x^6}{9} - \frac{x^{12}}{13} + \dots$ Dans le cas où elle est convergente, calculer la somme.

9214. — Déterminer a, b, c de façon que la série qui a pour terme général $u_n = a\mathrm{L}(1+n) + b\mathrm{L}(1+n^2) + c\mathrm{L}(1+n^4)$ soit convergente.

9215. — Etudier la série

$$\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{x^4}{(x^2+1)(x^4+1)} + \frac{x^8}{(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)} + \dots$$

Calculer la somme de cette série.

9216. — Etudier la série $u_n = x^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Vérifier que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ ont même limite.

9217. — Etudier la série

$$2 + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+4}{3!} + \dots + \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{(n+1)!} + \dots$$

Trouver la somme de cette série.

9218. — On considère les deux séries

$$\mathrm{tg}^2 2x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}^4 2x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^6 2x - \dots, \qquad 2\sin^2 x - \frac{1}{2}2^2\sin^4 x + \frac{1}{3}2^3\sin^6 x + \dots,$$

où l'on suppose $-\frac{\pi}{8} < x < +\frac{\pi}{8}$. Montrer que la somme de la première série est double de celle de la seconde.

9219. — Calculer les dérivées des fonctions $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+a}{1-ax}$ et $\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, puis expliquer les résultats obtenus.

9220. — Etudier les variations des fonctions

$$\mathrm{arc\,sin}\,(\arg\mathrm{sh}\,x), \quad \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x+m(1-x^2)}{x^2+2mx-1}, \quad x^{\mu}\lambda\mathrm{L}x+\mu, \quad ax+\mathrm{L}|x^2-3|, \quad \frac{\mathrm{L}(1+x)}{x^2}, \quad x^4+ax\mathrm{L}x,$$

$$1+x^{\frac{1}{x}}, \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \mathrm{arc\,sin}\,x\cos\alpha+\sqrt{1-x^2}\sin\alpha, \quad ax+be^{\frac{1}{x}}, \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}.$$

9221. — Déterminer une fonction $f(x)$ telle que l'on ait pour toutes les valeurs de x et y $f(x+y) = \mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}f(y) + \mathrm{C}$, A, B, C étant des constantes.

9222. — Dans la formule $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$, déterminer $f(x)$ de façon que θ soit indépendant de x.

9223. — En désignant par x l'infiniment petit principal trouver les parties principales des fonctions

$$2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{th}\,x - 3x, \qquad 1 + x^{\frac{1}{x}} - e, \qquad x^x - \sin x^x, \qquad \frac{(3+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x - 3x}{x^3}.$$

9224. — Déterminer A, B, α de façon que l'expression $\mathrm{A}\sin x - \sin(\alpha x) - \mathrm{B}x^3$ soit un infiniment petit du cinquième ordre.

9225. — On considère la fonction $y = \frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b} + \dots + \frac{\mathrm{L}}{x-l}$, où x est infiniment grand. Déterminer les constantes A, B, ..., a, b, ..., de façon que y soit un infiniment petit de l'ordre le plus élevé par rapport à $\frac{1}{x}$.

9226. — Développer en série entière les fonctions

$$\mathrm{ch}\,x.\sin x, \quad \sin x.e^{x\cos x}, \quad \mathrm{L}(1+x+x^2), \quad \mathrm{arc\,sin}\,(3x-4x^3), \quad (\mathrm{arc\,sin}\,x)^2, \quad [\mathrm{L}(x+\sqrt{1+x^2})]^2, \quad \frac{1}{1+x+x^2},$$

$$\int_{-x}^{x}\frac{dx}{x^4+x^2+1}, \qquad \frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

9227. — Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$. Développer en série la fonction

$$\frac{1}{n}[e^{\varepsilon_1 x} + e^{\varepsilon_2 x} + \dots + e^{\varepsilon_n x}].$$

9228. — Montrer que la fonction $y = (\mathrm{arc\,sin}\,x)^2$ vérifie l'équation $y''(1-x^2) - xy' - 2 = 0$. Développer cette fonction par la formule de Mac-Laurin.

9229. — Démontrer que la fonction $y = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ satisfait à l'équation différentielle $(1+x^2)y'' + xy' - \frac{y}{4} = 0$. Développer cette fonction par la formule de Mac-Laurin.

9230. — On considère la fonction y définie par l'équation $\cos y = \frac{1-x}{\sqrt{2}}$, et on désigne par $y_0^{(n)}$ la valeur de la dérivée d'ordre n pour $x = 0$. Etablir la relation $y_0^{(n+2)} + 2(2n+1)y_0^{(n+1)} - n^2y_0^{(n)} = 0$.

9231. — Démontrer que la fonction $y = e^{\sqrt{x^2+a^2}}$ vérifie l'équation différentielle $(x^2+a^2)y'' + xy' - a^2y' - x^2y = 0$, et en déduire la relation $a^2y_0^{(n+1)} = n(n-2)\,y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}$.

9232. — Si x est positif on a $e^x > 1 + x > e^{\frac{x}{1+x}}$.

9233. — Trouver la limite de $\left(\frac{m+x}{m-y}\right)^{x}$ pour m infini. En calculant cette limite de deux manières différentes, montrer que l'on a $e^x.e^y = e^{x+y}$.

9234. — Trouver pour $x = 0$ la limite des expressions

$$(\arcsin x)^{x}, \quad (\cos x)^{\cot x}, \quad \cos x^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{e^x - e^{\operatorname{tg} x}}{x - \operatorname{tg} x}, \quad x^{x}, \quad \sin x^{\sin x}, \quad \frac{1 + x^2 - 1 - x^2}{x^3},$$

$$\frac{\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x} - 2 + 2\cos x}{\sin x}, \quad \sec x^{\cot x}, \quad \frac{\mathrm{L}\, x + \sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad (\operatorname{arc\,cot} x)^{\frac{1}{x}}, \quad \sin x - \cos x^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin x}.$$

9235. — Trouver pour n infini la limite des expressions

$$\sqrt[n]{\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{1.2.3\ldots n}}, \quad \sqrt[n]{n^2 + an} - \sqrt[n]{n^2 - an}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}, \quad \frac{\mathrm{L}2 + \mathrm{L}3 + \cdots + \mathrm{L}n}{n},$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{\frac{2n!}{n!\,2^n}}, \quad \left[\frac{ap^{\frac{1}{n}} + bq^{\frac{1}{n}}}{a+b}\right]^{n}, \quad \frac{1^2}{2^2+n^2} + \frac{2^2}{4^2+n^2} + \cdots + \frac{n^2}{2n^2+n^2},$$

$$\left[\frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p}\right]^{x(n)}.$$

9236. — Démontrer que le rapport $\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ a pour limite $\frac{1}{p+1}$ quand n augmente indéfiniment. En particulier, quelle est la limite de $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

9237. — Limites de $\left(\frac{2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = 1$, de $\sqrt[x]{\mathrm{L}x} - \sqrt[x]{\mathrm{L}x}$ pour x infini, $\sqrt[x]{x + a_1 x + a_2 \cdots x + a_n} - x$ pour x infini, $\frac{\mathrm{L}\frac{\pi}{2x}}{\cos x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$, $x - 1\, e^{\frac{1}{x^2-1}}$ pour $x = 1$.

9238. — Montrer que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \mathrm{L}n$ a une limite quand n augmente indéfiniment.

9239. — Montrer que la différentielle totale de la fonction $z = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}}{x - y}$ vérifie la relation

$$\frac{2dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}.$$

9240. — Démontrer que la fonction $u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z} + \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x}$ vérifie l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

9241. — Etant donnée l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u}{(x^2 + y^2)^2 + 1}$, on y fait la transformation $x + iy = \frac{1}{x' + iy'}$. Que devient l'équation ?

9242. — Soit $f(x, y)$ un polynome homogène et λ une constante. Démontrer que quel que soit λ, l'expression $f(x - \lambda y, y + \lambda x)$ est divisible par $f(x, y)$.

9243. — L'équation $1 + xy = \mathrm{L}\, e^{xy} + e^{xy}$ définit y comme fonction implicite de x. Calculer $\frac{dy}{dx}$. Expliquer le résultat simple obtenu.

9244. — Déterminer le nombre imaginaire z vérifiant l'équation $\cos z = a + bi$. Montrer que si α est une solution, toutes les autres sont de la forme $2k\pi \pm \alpha$, k étant un nombre entier, positif ou négatif.

9245. — Résoudre l'équation $\operatorname{tg} z = z$, z étant imaginaire.

9246. — Soient z et z' deux nombres imaginaires et u l'une des racines carrées de leur produit ; montrer que l'on a

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right|.$$

9247. — Déterminer p et q de façon que les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ soient les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.

9248. — Calculer $\operatorname{ch}\frac{x}{3}$ en fonction de $\operatorname{sh}\frac{x}{3}$.

9249. — Etudier les racines des équations

$$x^4 - 2x + 1 = 0, \quad x + 1^n - x^n - 1 = 0, \quad x^4 + mx^2 - mx + 1 = 0, \quad 3x^4 - 4ax^3 + b = 0, \quad x^5 + ax^2 + b = 0,$$

$$x^3 - 3x - p(x^2 - 3x + 1) = 0, \quad x^{n+1} + ax + b = 0, \quad 2n + 1\, x^{2n} - 2n + 1\, x^{2n-1} + 2x = 0 ;$$

$$\cos^4 x + a\cos x + b = 0, \quad \cos^3 x + 3\cos^2 x + 3a\cos x + 1 = 0, \quad x - 1 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + a},$$

$$e^{x^2+1} + mx + \sqrt{x^2 + 1}, \quad \sin x - \mathrm{L}\cos^2 x = a, \quad x\cos x - \sin x = 0, \quad \frac{1}{\cos x} - \frac{8}{\sin x} = a,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1 + x^2} = a, \quad \frac{\cos^4\theta}{\cos^2 x} + \frac{\sin^4\theta}{\sin^2 x} = 1, \quad \frac{\sin^3 x - x}{\sin^3 x} = \lambda, \quad \sin x + 3\cos x - 4x = 0.$$

9250. — Calculer les racines commensurables de l'équation $x^6 + x^5 - 16x^4 - 15x^3 - 6x^2 - 16x + 96 = 0$.

9251. — Déterminer une équation du quatrième degré telle que l'équation aux carrés des racines soit bicarrée.

9252. — On porte sur une droite à partir d'une origine O des vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ dont les valeurs algébriques sont les racines de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Déterminer l'équation qui admet pour racines les quantités de la forme $y = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

9253. — Soient a, b, c les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Former l'équation qui admet pour racines

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2}, \quad \frac{b^2}{c^2 + a^2}, \quad \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

9254. — Déterminer m de façon que l'équation $x^4 - 2x^3 + m(2x - 1) = 0$ ait une racine double.

9255. — Soit $f(x) = 0$ une équation du quatrième degré ayant ses racines distinctes a, b, c, d. On y fait la substitution $x = a - \dfrac{6f(a)}{y + f''(a)}$. Reconnaître que la nouvelle équation en y est du troisième degré et qu'elle est la même quelle que soit la racine a dont on est parti pour faire la substitution.

9256. — Etant donnée l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, quelle relation doit-il exister entre les coefficients pour qu'à chaque racine a corresponde une racine b telle que l'on ait $b = 1 + a^2$?

9257. — On donne l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients pour que les trois racines soient en progression géométrique. Cette condition étant remplie, résoudre l'équation.

9258. — Résoudre l'équation $x^4 + x^3 + ax^2 - x - 2 = 0$, sachant que deux racines sont égales et de signes contraires.

9259. — Soient a, b, c, d les racines de l'équation $x^4 - x + 1 = 0$. Former l'équation qui admet pour racines des quantités de la forme $ab + cd$. *A priori*, quel est le degré de l'équation demandée ?

9260. — Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique et soit α une racine simple de cette équation qui annule $f''(x)$. Quelle relation existe-t-il entre α et les autres racines ?

9261. — On considère l'équation $x^4 - x^3 - 15x + 5 = 0$. On demande si elle admet des racines qui satisfont à une équation du deuxième degré à coefficients rationnels.

9262. — Soient $x_1, x_2, \ldots x_m$ les racines de l'équation $x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \cdots + p_m = 0$. Calculer la fonction symétrique $\Sigma\, x_1 + x_2\, x_1 + x_3 \ldots x_1 + x_m$.

9263. — Montrer que les racines de l'équation $x^3 + 27px^2 + qx + 9pq - 1458p^3 = 0$ sont en progression arithmétique, puis résoudre l'équation.

9264. — Vérifier que l'équation $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 12x + 16 = 0$ admet deux racines dont l'une est double de l'autre. Résoudre.

9265. — Trouver un polynome $f(x)$ du septième degré tel que $f(x) + 1$ soit divisible par $(x + 1)^4$ et $f(x) - 1$ divisible par $(x - 1)^4$.

9266. — Condition pour que les racines de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ soient en progression géométrique.

9267. — Soient α, β, γ, δ les racines de l'équation du quatrième degré $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Calculer $\Sigma \dfrac{\alpha}{f'(\alpha)}$.

9268. — Soit $f(x)$ un polynome du troisième degré. Etudier les racines de l'équation $f'^2(x) - 2f(x)f''(x) = 0$.

9269. — Résoudre une équation du quatrième degré sachant que les dérivées première et troisième du premier membre ont une racine commune.

9270. — Calculer Σa^2b^2c pour l'équation $x^6 + ax^4 + bx^2 + cx + d = 0$.

9271. — Soient α, β, γ trois nombres quelconques ; on pose $s_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Démontrer que l'on a

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2(\alpha - \beta)^2.$$

9272. — Résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$ sachant que si l'on y fait la transformation $y = x^2 - 2r$, l'équation transformée en y a une racine double.

9273. — Calculer $\Sigma \dfrac{a^3}{a^2 + 1}$ pour l'équation $x^3 + x + 1 = 0$.

9274. — Eliminer x entre les équations $x^3 + px + q = 0$, $x^2 + ax + b = 0$.

9275. — Soit $f(x) = 0$ une équation de degré n ayant toutes ses racines réelles et distinctes. Démontrer que l'équation $nff'' - (n - 1)f'^2 = 0$ n'a pas de racines réelles.

9276. — Condition pour qu'entre les racines a, b, c de l'équation $x^3 + px + q = 0$ on ait la relation $\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

9277. — Démontrer que la racine positive autre que 1 de l'équation $ax^{n+1} - (a + 1)x^n + 1 = 0$ $(a > 0)$, est comprise entre 1 et $1 + \dfrac{1}{a}$ si $n > a$, ou entre 1 et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{1 + a}}$ si $n < a$.

9278. — Soient $f(x)$ un polynome n'ayant que des racines simples et u, v deux polynomes premiers entre eux. Si α est racine multiple d'ordre p de $f\left(\dfrac{u}{v}\right)$, α est racine multiple d'ordre $p - 1$ de $f\left(\dfrac{u'}{v'}\right)$.

9279. — Décomposer en éléments simples $\frac{1}{x^n - a^n}$.

9280. — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2 + x^4}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + 1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^2 + a}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + x}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^3},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}, \quad \int \frac{x^5 dx}{x^2 + 1^2}, \quad \int \frac{x\,dx}{1 + x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{1 + x\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\,dx, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 1\sqrt{x^2 + 4}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{1 + x\sqrt{1 - x^2}}\,dx, \quad \int \frac{t^2\sqrt{3 - 2t^2}}{1 - t^2}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2 + a\sqrt{1 + x^2}};$$

$$\int \sin x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{1 + a\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos x^2}, \quad \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^2 x + \sin^2 x^2}, \quad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x - 1},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx, \quad \int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx, \quad \int \sin^2 x\cos^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{a + b\operatorname{tg} x};$$

$$\int x^2 + px + q\,\mathrm{L}x\,dx, \quad \int (\mathrm{L}x)^n dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\cot^2 x + \operatorname{tg}^2 x}\,dx, \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x}\,dx.$$

9281. — Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a - x\sqrt{1 - x^2}}$ en faisant successivement les deux changements de variables $x = \cos\varphi$, puis $(a - \cos\varphi)(a + \cos\omega) = a^2 - 1$.

9282. — Déterminer a, b, c de façon que l'intégrale $\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x - 1)^2(x - 2)^2}\,dx$ soit algébrique.

9283. — On pose $\mathrm{J}_n = \int_0^{\infty} x^n(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$. Etablir la relation de récurrence $n\mathrm{J}_n + (n - 1)a^2\mathrm{J}_{n-2} = x^{n-1}(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$.

9284. — Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{e\cos\varphi - 1}$ en faisant le changement de variable $(e\cos\varphi - 1)(e\cos\omega + 1) = e^2 - 1$.

9285. — Soit $f(x)$ un polynome de degré n n'ayant que des racines réelles et distinctes. Il existe deux polynomes u de degré $n - 1$ et v de degré n tels que l'on ait $uf(x) - vf'(x) = 1$. Montrer que la partie rationnelle de l'intégrale $\int \frac{dx}{f^2}$ est $\frac{v}{f}$.

9286. — Trouver le moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle par rapport à une arête.

9287. — Soit un disque circulaire non homogène. La densité superficielle en chaque point est inversement proportionnelle à la racine carrée de la puissance changée de signe du point par rapport au cercle. Calculer la masse du disque et son moment d'inertie par rapport à un diamètre.

9288. — Calculer le volume engendré par une cycloïde tournant autour de sa base.

9289. — On considère les rayons vecteurs focaux d'une ellipse comme fonctions de l'angle polaire. Calculer la valeur moyenne.

9290. — Trouver la valeur moyenne de l'ordonnée d'un demi-cercle par rapport au diamètre en prenant comme variable indépendante : 1° l'abscisse ; 2° l'arc.

9291. — Même question pour une arche de cycloïde.

9292. — Intégrer les équations différentielles

$$y = \frac{y}{x}, \quad x\frac{dy}{dx} + 4y = e^x, \quad \sin x + \cos x\frac{dy}{dx} - y\cos x + 1 + \sin x\cos x = 0, \quad \frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = \sin 3x,$$

$$yy'^2 + 2x - 1)y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{x + 2y + 3}, \quad xy' - 2(y' y - x) - y = 0, \quad (1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 2x^2 - 1 - x^4,$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy} = \frac{2a}{y}, \quad y'(y + xy'^2) - axy^2 = 0, \quad x^2 - 1)y' + axy = 1, \quad y\,y'' - x^2 + y^2 = 0,$$

$$y'\sqrt{1 + x^2} - y + x^2 = 0, \quad xx'' - a\frac{dy}{dx} + b^2 - (x + a)y = 0, \quad xy^2 - 2yy' - x = 0, \quad y + \frac{ay}{1 - x^2} - \frac{1 - x}{1 + x^2} = 0,$$

$y'\sqrt{1+x^2}+xy=a\sqrt{1+x^2}$, $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$, $\quad x\frac{dy}{dx}-y=y^2\ln x$, $\quad 2\sin x\frac{dy}{dx}+x=\sin x\,y+x$,

$$\sin x\,dy-y\,dx-\cot\frac{x}{2}\,dx=0,\qquad \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1+y+y^2}};$$

$$1+x^2\frac{d^2y}{dt^2}+x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}\cos x-2\frac{dy}{dx}\sin x=\cos x,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin x+\cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\cos 2x,\qquad y''-3y'+2y=2e^{3x},\qquad y''-3y'+2y=e^x+\cos x,\qquad y''-3y'+2y=e^{2x}.$$

$$y''-3y'+2y=\sin ax,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin^3 x,\qquad y''+2y'+y=\sin^2 x+x\operatorname{ch}x,\qquad y''+2y'+y=x^m e^x.$$

$$y''+y=e^x\cos x,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}+n^2y=\sin mx,\qquad y''-2y'+2y=2e^x\sin x,\qquad y''-y'^2+yy''=0.$$

9293. — Intégrer l'équation différentielle $(2y+3x-2xy')y''=1$, en prenant comme nouvelles variables $u=y'$, $v=xy'-y$.

9294. — Montrer que l'équation différentielle $x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=0$ admet une intégrale de la forme x^n, puis donner l'intégrale générale.

9295. — Intégrer le système

$$\frac{dx}{dz}=-x+y-2a^2z,\qquad \frac{dy}{dz}=2x-2z^2+2(a+1)z+2a^2-a+2.$$

Les intégrales générales définissent un ensemble de courbes gauches. Déterminer celle de ces courbes qui passe par le point $x=0$, $y=-a$, $z=0$.

9296. — Intégrer le système $\frac{dx}{dt}=a(x+y)$, $\frac{dy}{dt}=a(x-y)$.

9297. — Montrer que la fonction $y=\frac{x}{e^x-1}$ vérifie une équation différentielle du premier ordre qui est rationnelle par rapport à x, y, y'.

9298. — Déterminer une fonction y de x telle que l'on ait $\int x^2dy+\int xydy=x^3$.

9299. — On considère l'équation différentielle

$$A(xdy-ydx)=Bdx+Cdy,$$

A, B, C étant des fonctions homogènes de x et de y, les degrés de B et C étant égaux. Intégrer cette équation.

9300. — Intégrer l'équation différentielle $y''\cos x+y'\sin x-2y\cos^3 x=2\cos^3 x$, en prenant comme nouvelle variable indépendante $z=\sin x$.

9301. — Soit l'équation différentielle $y=xy'^2+y'^3$. Déterminer une courbe intégrale touchant Ox au point qui a pour abscisse $-\frac{1}{2}$.

9302. — Etant donnée l'équation différentielle $y''+y'f(x)+y\varphi(x)=0$, on pose $y=uv$. Déterminer u de façon que l'équation différentielle en v n'ait pas de terme en v'. Appliquer à l'équation $x^2y''+2mxy'+[m(m-1)-h^2x^2]y=0$; donner l'intégrale générale de cette équation.

9303. — Montrer que la fonction y définie par l'équation $y^n=\frac{x+y}{x-y}$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{n(y^2-x^2)+2xy}$. Calculer l'intégrale générale de cette équation.

9304. — On considère l'équation différentielle $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$. Peut-on trouver un facteur intégrant de la forme $f\left(\frac{y}{x}\right)$?

9305. — On donne l'équation $2yy''=y'^2-\frac{y^2}{x^2}$. Déterminer une fonction $f(u)$ telle qu'en effectuant le changement de fonction $y=f(u)$, on obtienne une équation différentielle linéaire pour déterminer u. En déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

9306. — Déterminer une fonction V qui soit de la forme $f(x)\varphi(y)\psi(z)$ et qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0.$$

II. — Trigonométrie.

9307. — On donne $\sin a=b$, calculer $\sin\frac{a}{3}=x$, $\cos\frac{a}{3}=y$, $\operatorname{tg}\frac{a}{3}=z$. Discussions analytique et géométrique.

9308. — On donne $\sin a=b$, calculer $\sin\frac{a}{5}=x$. Discuter l'équation obtenue au moyen du théorème de Rolle.

9309. — On donne un axe vertical Oz et deux demi-droites OA, OB faisant avec Oz les angles α, β respectivement. On donne en outre l'angle $AOB=\varphi$. Calculer la projection de cet angle sur un plan horizontal. Rendre la formule calculable par logarithmes.

9310. — On considère la somme

$$S = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{5}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$$

Vérifier que les valeurs de x qui annulent S annulent aussi $\operatorname{tg} 5x$.

9311. — Rendre calculable par logarithmes la somme

$$\sin a + \sin(a + x) + \sin(a + 2x) + \ldots + \sin[a + (n - 1)x].$$

9312. — On considère le produit $\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\ldots\cos\frac{x}{n}$. Si n augmente indéfiniment, ce produit a-t-il une limite ?

9313. — Calculer la racine cubique de $1 + i$.

9314. — Démontrer que si l'on a $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 0$, x, y, z sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.

9315. — Résoudre un triangle connaissant les trois médianes.

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

9316. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$ay^2 = x(a^2 - x^2)$, $b^2y^2 = x^2(a - x)$ (aire), $y = \frac{8m}{4x - 1} - \frac{3}{x^2}$, $x^2y^2 + (x - a)(x - 2a)(x - 3a)x - 4a^4 = 0$,

$y^2 = \frac{x^2 + 6x + 1}{4\sqrt{x^2 - 1}}$, $y = \mathrm{L}\frac{x - 1}{x + 1}$, $y^2 = x^2\frac{a - x}{a + x}$ (aire), $y = \frac{\mathrm{L}x^2}{x(1 - x)}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} + 1}$ (aire),

$y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 1}}$, $y = (\cos x)^{\sin x}$, $y^2 = x^2 + 2x\mathrm{L}x^2 - 4x - x^2$, $y = 2\sqrt{1 + x - a\sin 2x - 1}$;

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2yz + b^2zx$, $xyz^2 = a^3x + by^3$, $x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$ (aire), $x^3(2x - y) = y(x - y^2)$,

$2y + 3x - xy^2 = 0$, $x^2 + y^2 - y^2 - x - 1 = 0$, $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{y} - 1\right)^2 = 1$, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (aire),

$x^2x + y^2 + 3y^2x + y^2 + 2x^2 = 0$, $x^2x^2 + y^2 - 4x^2y + 3y^2 = 0$, $x^2 - y^4 = a^2x^2y = 0$,

$y^2(x^2 + 3ax + 4ay + a^2) + x^2 - a^2x^2 = 0$;

$\sin x - \cos y + 1 = 0$, $2\arcsin x = 3\arcsin y$, $2\arccos x = 3\arccos y$, $\mathrm{L}x\mathrm{L}y = a$

$\cos^2 x - \cos x = \cos^2 y - \cos y$;

$\begin{cases} x = \frac{2t}{1 + t}, \\ y = \frac{3t}{1 - t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2at}{1 + t}, \\ y = \frac{a(1 - 2t)}{1 - t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{8t - 1}{4t^2}, \\ y = \frac{2(t^2 - 4)}{t}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{t} + \frac{1}{t - 1}, \\ y = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t + 1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{a}{t(t - 1)}, \\ y = \frac{2at}{t^2 - 1}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{t - 1}{t^2 + 1}, \\ y = \frac{t + 1}{t^2 + 1}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos t(2 - \cos 2t), \\ y = \sin t(2 + \cos 2t); \end{cases}$ $\begin{cases} x = a\cos 3t, \\ y = a\sin 2t; \end{cases}$

$\begin{cases} x = a\cos 4t, \\ y = a\sin 3t. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\cos 3t}{\cos^2 t}, \\ y = \frac{\sin 3t}{\cos^2 t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-ab^2\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \\ y = \frac{a^2b\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = ab\sin^2\alpha - 2a\cos^2\alpha, \\ y = a\sin 2\alpha. \end{cases}$

9317. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées polaires :

$\rho = a\sin\omega + \cos\omega\cos 2\omega$, $\rho = a\sin\omega\sin 2\omega$, $\rho = \frac{p}{1 - 2\cos 2\omega}$, $\rho = a\cos\omega\cos 2\omega$ (aire d'une boucle),

$\rho = a\,2\cos\omega - \cos 2\omega$, $\rho\sin 3\omega + 1 = 0$, $\rho = \frac{1}{\sin\frac{\omega}{2}}$, $\rho = a + b\cos\omega$ (aire), $\rho = \frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{4}}$,

$\rho = \frac{1}{1 + \rho^2\frac{\omega}{4}}$, $\rho = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg} 2\omega$, $\rho = \frac{\cos\omega}{1 + 2\sin\omega}$, $\rho = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, $\rho = 2\sin\omega - \frac{1}{\sin 2\omega}$,

$4\sin\omega + \frac{1}{\cos\omega + 1}$, $\rho^2 - 2a\rho\cos\omega - 2a^2\sin^2\omega = 0$, $\operatorname{tg}\omega = \ldots$, $\rho = e^{\omega\frac{\omega}{2}}$, $\frac{1}{\rho} = \omega\cos\omega - \sin\omega$.

9318. — On donne les équations de trois droites, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, les axes de coordonnées étant rectangulaires ; trouver les coordonnées du centre du cercle inscrit au triangle formé par les trois droites.

9319. — Étant données des divisions en involution sur une droite, déterminer deux points homologues connaissant leur milieu.

9320. — Calculer le point de concours des hauteurs du triangle formé par les droites $x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$, $x + y + 1 = 0$.

9321. — On considère les cercles passant par deux points A, B et on donne un point C. Existe-t-il un point M conjugué de C par rapport à tous les cercles ?

9322. — Enveloppe des polaires de tous les points de la courbe $y^2 - ax - b^2 = 0$ par rapport à un cercle ayant pour centre l'origine. Etude géométrique.

9323. — Trajectoires orthogonales des courbes $y = Lx^2 - 3x + a$.

9324. — On définit une courbe plane par une relation entre le rayon vecteur ρ et la distance p du pôle à la tangente, $f(\rho, p) = 0$. Déterminer la courbe. En particulier, on considère la relation $p^2(5a^2 - \rho^2) = 4a^4$. Calculer les longueurs des normales issues du pôle.

9325. — Trajectoires orthogonales des courbes $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = a$.

9326. — Déterminer l'aire comprise entre les deux courbes $y^2 = x^2\dfrac{a+x}{a-x}$, $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

9327. — Trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant qui passent par un point fixe.

9328. — Construire la courbe dont les coordonnées (x, y) d'un point sont données en fonction de t par la relation

$$x + iy = e^{(1+i)t}.$$

9329. — On donne une courbe tangente à l'origine à Ox, et un point M de cette courbe voisin du point O. Développer les coordonnées du point M suivant les puissances de l'arc $OM = s$.

9330. — Etant données les deux courbes $\rho^3 \cos 3\omega = a^3$, $\rho^3 = a^3 \cos 3\omega$, un rayon polaire voisin de l'origine les rencontre aux points M_1 et M_2. Calculer la partie principale de M_1M_2.

9331. — Trouver l'enveloppe de l'axe radical d'un cercle fixe $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ et d'un cercle variable tangent à Ox et Oy.

9332. — Construire la courbe $\rho = ae^{\omega \cot \alpha}$. Vérifier qu'elle coupe les rayons vecteurs sous un angle constant. Peut-on déterminer α de façon que cette courbe soit sa propre développée ?

9333. — Construire la courbe $\rho = a \cos^3 \dfrac{\omega}{3}$; elle présente une boucle. Volume engendré par l'aire de cette boucle tournant autour de l'axe polaire.

9334. — On considère la fonction y de la variable x définie par l'équation $y = 1 + xe^y$. Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ en fonction rationnelle de x et y. On obtient ainsi l'équation différentielle d'une famille de courbes. Etudier leurs trajectoires orthogonales.

9335. — Condition pour que la droite $y = mx + n$ soit tangente à la courbe $y = e^x$. Combien peut-on mener de tangentes à cette courbe par un point quelconque du plan ?

9336. — Les équations paramétriques $x = \dfrac{a't^2 + b't + c'}{at^2 + bt + c}$, $y = \dfrac{a''t^2 + b''t + c''}{at^2 + bt + c}$ représentent en général une conique. Peuvent-elles représenter un ensemble de deux droites ?

9337. — Trouver le lieu du point double de la cubique $(x \cos \varphi + y \sin \varphi - 1)^3 - x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$.

9338. — Trouver les trajectoires orthogonales des droites $x + 2ty - at^2 = 0$.

9339. — Construire la courbe $x = \dfrac{t-1}{t^4+1}$, $y = \dfrac{t+1}{t^4+1}$. Points doubles. Soient M et M' deux points de la courbe tels que l'angle MOM' soit droit. Trouver l'enveloppe de MM'.

9340. — Trajectoires orthogonales des courbes $\rho^n = \lambda \sin n\omega$.

9341. — Lieu des centres des cercles tangents à Oy et à la courbe $y = Lx$.

9342. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du pôle sur les tangentes à la courbe $r^3 = a^3 \cos 3\theta$.

9343. — Construire la courbe $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$, et évaluer le volume engendré en tournant autour de Ox.

9344. — Trouver l'enveloppe des droites rencontrant la courbe $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ et l'axe des x en quatre points formant une division harmonique.

9345. — Montrer que l'enveloppe des droites $x \cos \varphi + y \sin \varphi - a\left(\cos \dfrac{m\varphi}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{n}} = 0$ a pour équation polaire

$$\rho^m = a^m \cos m\omega.$$

9346. — On considère le segment parabolique détaché par la droite $3y - x = 0$ sur la parabole $8y = 2x - x^2$. Calculer le volume engendré par ce segment tournant autour de Ox.

9347. — Etant donnée la courbe $\rho = f(\omega)$ et un point $M(\rho_1, \omega_1)$ de cette courbe, former l'équation du cercle tangent à la courbe au point M et passant par le pôle. En déduire les points de la courbe tels que le cercle osculateur en l'un de ces points passe par le pôle.

9348. — Calculer l'aire comprise entre les deux courbes $\rho^2 \cos 2\omega = a^2$, $\rho^2 \cos 2\omega - 4a^2 \cos^4 \omega = 0$.

9349. — Sur une courbe en forme d'ovale on fait rouler un cercle de diamètre l. Démontrer que l'aire comprise entre l'ovale et l'enveloppe du cercle est $lp + \pi l^2$, p étant la longueur de l'ovale.

9350. — La tangente en un point de la courbe $xy^2 - a^3 = 0$ rencontre les axes en P et Q. Lieu du milieu de PQ.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2206. — On donne une droite D et deux points A, B.

On demande de tracer deux cercles C, C′ égaux et tangents, le cercle C passant par A, le cercle C′ passant par B, ces cercles C, C′ étant aussi tangents à la droite D. Jean Mourret, École normale supérieure.

2207. — 1° Étant donné un cercle (O), on demande d'étudier les propriétés des droites Δ telles que leur trace sur un plan P qui leur est perpendiculaire soit foyer de la projection de (O) sur ce plan

2° Une telle droite Δ étant donnée, quel est le lieu de la perpendiculaire commune à Δ et aux différentes tangentes au cercle (O) ? Jean Mourret, École normale supérieure.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2089. — *Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation du sixième degré*

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0,$$

pour qu'on ait entre les racines les égalités

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6,$$
$$x_1x_2x_3 = x_4x_5x_6 ?$$

L'équation proposée doit pouvoir être mise sous la forme

$$\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + px + \sqrt{f}\right)\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + qx + \sqrt{f}\right) = 0,$$

$\sqrt{f}$ désignant *l'une quelconque* des racines carrées de f.

En identifiant on obtient

$$p + q + \frac{a^2}{4} = b, \qquad \frac{(p+q)a}{2} + 2\sqrt{f} = c,$$
$$pq + a\sqrt{f} = d, \qquad (p+q)\sqrt{f} = e;$$

et ces équations doivent être vérifiées par des valeurs de p et q. En égalant les valeurs de $p+q$ tirées de trois de ces équations, on a

$$(1) \qquad b - \frac{a^2}{4} = \frac{2(c - 2\sqrt{f})}{a} = \frac{e}{\sqrt{f}};$$

ce sont les conditions cherchées.

Il est facile de les rendre rationnelles. Nous avons d'abord

$$(2) \qquad \sqrt{f} = \frac{e}{b - \frac{a^2}{4}},$$

puis, en portant cette valeur de $\sqrt{f}$ dans le deuxième rapport,

$$b - \frac{a^2}{4} = \frac{2\left(c - \frac{2a}{b - \frac{a^2}{4}}\right)}{a},$$

ou

$$(3) \qquad a\left(b-\frac{a^2}{4}\right)^2-2c\left(b-\frac{a^2}{4}\right)+4c=0.$$

Le système (1) est équivalent aux systèmes (2), (3). Comme $\sqrt{f}$ est une des racines carrées de f, on peut remplacer l'équation (2) par la suivante

$$(4) \qquad f\left(b-\frac{a^2}{4}\right)^2-c^2=0.$$

Les conditions cherchées sont (3) et (4).

Si elles sont remplies, la résolution de l'équation proposée est ramenée à celle des équations du troisième degré

$$x^3+\frac{a}{2}x^2+px+\sqrt{f}=0, \qquad x^3+\frac{a}{2}x^2+qx+\sqrt{f}=0,$$

p et q étant racines de l'équation

$$u^2-\left(b-\frac{a^2}{4}\right)u+d-a\sqrt{f}=0,$$

et $\sqrt{f}$ ayant la valeur $\dfrac{c}{b-\dfrac{a^2}{4}}$, ou $\dfrac{-c}{b-\dfrac{a^2}{4}}$.

E.-N. BARISIEN.

Bonnes solutions par MM. Chenet, à Roche-la-Molière ; M. Clémence, à Brignais (Rhône) ; André Courtois, à Avesnes-sur-Helpe (Nord) ; L. Naucelle, à La Châtre ; J. Dagnaux, à Dijon ; A. Rousseau, à Fournes-en Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2097. — *On considère une conique* (C) *et un point quelconque* P : *démontrer que les tangentes communes à la conique* (C) *et à un cercle quelconque de centre* P *sont tangentes à une conique qui a pour foyers les points de rencontre de* (C) *avec la polaire de* P.

Solution analytique. — Prenons comme axes deux droites rectangulaires quelconques passant par le point P, et désignons par

$$f(u, v, w)=0, \qquad R^2(u^2+v^2)-w^2=0$$

les équations tangentielles de la conique (C) et d'un cercle (γ) ayant pour centre le point P.

L'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère formé par les tangentes communes à (C) et (γ) est

$$f(u, v, w)+\lambda R^2(u^2+v^2)-w^2=0,$$

ou

$$(1) \qquad f(u, v, w)-\lambda w^2+\lambda R^2(u^2+v^2)=0.$$

Cette équation représente une conique homofocale à la conique

$$(2) \qquad f(u, v, w)-\lambda w^2=0;$$

et quand λ varie, (2) est l'équation générale des coniques bitangentes à (C) aux points de contact A, B des tangentes issues du point P.

On peut déterminer λ de façon que le premier membre de (2) soit décomposable en un produit de facteurs linéaires en u, v, w ; l'équation (2) définit alors l'ensemble des points A et B, et l'équation (1) représente une conique qui a pour foyers A et B. Ceci démontre la proposition.

Solution géométrique. — Considérons le faisceau tangentiel défini par les coniques (C) et (γ). Les tangentes issues de A aux coniques de ce faisceau sont en involution ; PA est un rayon double de cette invo-

lution. Comme les tangentes issues de A au cercle (γ) sont également inclinées sur AP, les rayons doubles sont rectangulaires, et les droites isotropes sont deux rayons homologues. Donc il existe une conique du faisceau (F) ayant pour foyer le point A. Nous allons montrer qu'elle a aussi pour foyer le point B.

Les pôles de AB par rapport aux coniques du faisceau sont en ligne droite ; cette droite, déterminée au moyen des coniques (C) et (γ) est la perpendiculaire PK à AB. D'autre part, le pôle de AB par rapport à (Γ) est sur la droite AH perpendiculaire à AB, puisque deux droites conjuguées passant par un foyer sont rectangulaires. Donc, le pôle de AB par rapport à (Γ) est à l'infini dans la direction perpendiculaire à AB ; par suite, AB est axe de la conique (Γ).

De plus, le lieu des centres des coniques du faisceau est la droite joignant le point P au centre de (C) ; cette droite rencontre AB en son milieu ω. Le centre de (Γ) étant le point ω, le point B est le second foyer.

Jean MOURRET, Ecole normale supérieure.

Bonnes solutions par MM. R. Leroy, lycée Hoche, à Versailles ; Masselin, collège Rollin ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

2098. — *Soient* A *et* B *deux points fixes d'un cercle* O ; M *un point variable du plan de ce cercle :* T *le point de contact d'une des tangentes à* O *issues de* M.

1° *Le lieu des points* M *tels que* $MT = \lambda MA + \mu MB$ *est une quartique ;*

2° *Condition pour que cette quartique devienne une cubique ; la construire lorsque* $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

3° *Cas où* $\lambda = 0$, *ou bien* $\mu = 0$.

1. Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y le diamètre perpendiculaire, et désignons par a l'abscisse du point A et par h l'ordonnée du centre du cercle, ces deux quantités étant supposées positives. L'équation du cercle est alors $x^2 + y^2 - 2hy - a^2 = 0$.

Soient x, y les coordonnées d'un point M du lieu ; nous avons

$$MT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2hy - a^2}, \qquad MA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \qquad MB = \sqrt{(x+a)^2 + y^2},$$

et l'équation du lieu est, sous forme irrationnelle,

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2hy - a^2} = \lambda\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \mu\sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

En élevant au carré, nous avons

$$x^2 + y^2 - 2hy - a^2 = \lambda^2[(x-a)^2 + y^2] + \mu^2[(x+a)^2 + y^2] + 2\lambda\mu\sqrt{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}$$

ou

$$(1) \qquad x^2 + y^2(1 - \lambda^2 - \mu^2) + 2ax(\lambda^2 - \mu^2) - 2hy - a^2(1 + \lambda^2 + \mu^2) = 2\lambda\mu\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2} ;$$

une seconde élévation au carré nous donne

$$(2) \qquad [x^2 + y^2(1 - \lambda^2 - \mu^2) + 2ax(\lambda^2 - \mu^2) - 2hy - a^2(1 + \lambda^2 + \mu^2)]^2 = 4\lambda^2\mu^2[(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2].$$

C'est l'équation rationnelle du lieu ; elle représente une quartique.

Seulement il faut remarquer que cette courbe est en même temps le lieu des points pour lesquels on a

$$(3) \qquad MT = \lambda MA + \mu MB \qquad \text{et} \qquad (4) \qquad MT = |\lambda MA - \mu MB|.$$

Pour séparer sur la courbe les points qui vérifient (3) de ceux qui vérifient (4), il suffit de revenir à l'équation (1), et l'on voit immédiatement que les points qui vérifient (3) sont dans la région positive du cercle

$$(5) \qquad x^2 + y^2(1 - \lambda^2 - \mu^2) + 2ax(\lambda^2 - \mu^2) - 2hy - a^2(1 + \lambda^2 + \mu^2) = 0,$$

tandis que les points du lieu qui vérifient la relation (4) sont dans la région négative de ce cercle.

2. Les termes du quatrième degré de l'équation (2) sont

$$[x^2 + y^2(1 - \lambda^2 - \mu^2)]^2 - 4\lambda^2\mu^2(x^2 + y^2)^2 ;$$

pour que le lieu se réduise à une cubique, il faut qu'on ait

$$[1 - \lambda^2 - \mu^2]^2 - 4\lambda^2\mu^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (1 - \lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu)(1 - \lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu) = 0,$$

ou encore

$$(\lambda - \mu)^2 - 1 \quad (\lambda + \mu)^2 - 1 = 0,$$

ce qui donne ou $\lambda - \mu = \pm 1$, ou $\lambda + \mu = \pm 1$.

Ceci est vérifié pour $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, et l'équation du lieu devient

$$2hy(x^2+y^2)-a^2x^2+2(a^2-2h^2)y^2-6a^2hy-2a^4=0.$$

Elle représente une cubique circulaire symétrique par rapport à l'axe des y.

Pour la construire, on peut résoudre l'équation par rapport à x^2; on a

$$x^2=-\frac{2hy^3+(a^2-2h^2)y^2-3a^2hy-a^4}{2hy+a^2}.$$

On peut prévoir les racines du numérateur. Si l'on désigne en effet par C, D, E les points de rencontre de l'axe Oy avec la tangente en A et avec le cercle, on voit sans difficulté que ces points sont des points du lieu, le point C vérifiant (3), les points D et E vérifiant (4).

On peut donc écrire

$$x^2=-\frac{2(hy+a^2)(y^2-2hy-a^2)}{2hy+a^2}.$$

Soient y_1 et y_2 les racines de l'équation $y^2-2hy-a^2=0$, $y_1<y_2$; on a

$$-\frac{a^2}{h}<-\frac{a^2}{2h}<y_1<y_2,$$

et nous voyons que la fonction x est définie et continue pour les valeurs de y appartenant aux intervalles $\left(-\frac{a^2}{h},\ -\frac{a^2}{2h}\right)$ et $(y_1,\ y_2)$.

Si on prend la dérivée de x^2 par rapport à y, on a

$$\frac{d(x^2)}{dy}=-\frac{2f(y)}{(2hy+a^2)^2}.$$

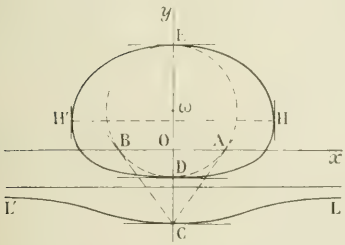
en posant $$f(y)\equiv 4h^2y^3+h(5a^2-4h^2)y^2+2a^2(a^2-2h^2)y-ha^4.$$

Il est aisé de voir que $f(y)$ admet une seule racine réelle positive, car $f'(y)$ a comme racines $-\frac{a^2}{2h}$ et $\frac{2h^2-a^2}{3h}$, et ces deux nombres substitués dans $f(y)$ donnent des résultats tous deux négatifs. Comme $f(0)<0$, $f(h)>0$, cette racine est comprise entre 0 et h.

On en déduit sans difficulté la forme de la courbe.

Les points de cette courbe qui correspondent à la relation $MT=\frac{1}{2}MA+\frac{1}{2}MB$ sont les points extérieurs au cercle

$$x^2+y^2-4hy-3a^2=0.$$



Ce cercle n'a aucun point commun avec la courbe ; il a pour diamètre Oy et les extrémités de ce diamètre sont l'une comprise entre C et D et l'autre au-dessus du point E.

Par suite, ce sont les points de la branche LCL' qui vérifient la relation $MT=\frac{1}{2}(MA+MB)$, tandis que les points de l'ovale DHEH' satisfont à la relation

$$MT=\frac{1}{2}|MA-MB|.$$

3. Si l'un des nombres λ ou μ est nul, le lieu se réduit au cercle (5). Ce résultat était à prévoir géométriquement, car si $\mu=0$, on a $\frac{MT}{MA}=\lambda$, le rapport des puissances du point M par rapport au cercle donné et par rapport au cercle-point A est constant. On sait que le lieu est un cercle passant par l'intersection de ces deux cercles.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Très bonne solution : M. C. S., à Château-Thierry.

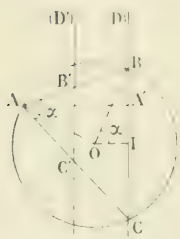
Bonnes solutions par MM. Dodier et Ullmann, à Héricourt ; G. Esteben, à Bordeaux ; H. Frobert, à Paris ; G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE

2099 — *On considère les cercles qui passent par un point fixe A et qui interceptent sur une droite (D) un segment BC qui est vu de A sous un angle donné α. Trouver :*

1° *L'enveloppe de ces cercles ; 2° le lieu de leur centre ; 3° le lieu du centre du cercle d'Euler du triangle ABC.*

2. Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I la projection de ce point sur le côté BC.



On a $\widehat{IOB} = \widehat{BAC} = \alpha$, et par suite $OI = OB\cos\alpha$, $\dfrac{OA}{OI} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Ceci montre que le lieu du point O est une hyperbole (H) ayant pour foyer le point A, pour directrice correspondante la droite (D) et pour excentricité $\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

1. Comme le cercle passe par le point fixe A, son enveloppe est le lieu des symétriques du point A par rapport aux tangentes à l'hyperbole (H) ; c'est donc le cercle directeur relatif à l'autre foyer.

3. Désignons par B', C' les milieux des côtés AB, AC, par (D') la droite B'C' et par A' la projection du point A sur la droite (D). Le cercle d'Euler, ou le cercle des neuf points, passe par les points A', B', C', I. L'angle B'A'C' est égal à l'angle B'IC', c'est-à-dire à α. Nous sommes ramenés à trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C', le point A' étant fixe, l'angle B'A'C' étant constant et égal à α, les points B' et C' décrivant la droite (D').

On en conclut, comme au n° 2, que le lieu cherché est l'hyperbole (H') qui a pour foyer le point A', pour directrice correspondante la droite (D') et pour excentricité $\dfrac{1}{\cos\alpha}$. L'enveloppe de ce cercle est le cercle directeur de l'hyperbole (H') relatif à l'autre foyer.

Gaston ROY, école normale de Varzy.

Bonnes solutions par MM. Gaston Bétier, 20e d'artillerie, à Poitiers ; J. Chaize, à Paris ; André Courtois, à Avesnes sur-Helpe (Nord) ; Emile Dion, école normale de Lyon ; Dobier, 47e d'artillerie, à Héricourt ; R. Dontot, école normale supérieure ; G. Foucby ; H. Frobert, à Paris ; Jouglens ; G. Lach, à Douai ; Marescalchi ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; A. Roux, lycée de Lille ; M. Roux, instituteur à Chalon-sur-Saône ; Georges Sabatier, collège Sainte-Barbe, Paris ; Seligmann-Lui ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

QUESTION PROPOSÉE

2208. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{3a}{x^2},$$

(a constant et positif) : déterminer la solution telle que $y = 0$ pour $x = a$.

2° Vérifier que

$$(2)\qquad y = \frac{a}{x^2} - x$$

est une solution de l'équation (1) et aussi de l'équation différentielle $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right) = 0$.

3° Construire la courbe (C) représentée par l'équation (2) après avoir calculé les coordonnées du point M_1 où la tangente est parallèle à Ox et déterminé le sens de la concavité, les asymptotes de (C).

4° Calculer l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des x et les ordonnées des points a et X ($X > a$).

5° Calculer le rayon de courbure de (C) au point M_1 déjà considéré.

(Certificat de Mathématiques générales, Rennes, novembre 1912.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Novembre 1913. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE SUR LA PONCTUATION

par M. J. Caron.

Intérieur. Extérieur. — Etant donnée une surface définie par son équation $F = 0$, elle limite en général deux solides $F < 0$ et $F > 0$ que l'on appelle l'un le solide intérieur, l'autre le solide extérieur.

Ces deux solides, limités tous deux à la même surface, une fois réunis, constituent l'espace tout entier ; l'un des deux est le moule de l'autre ; nous les désignerons par F_i, F_e

Dans le cas général, pour définir l'un de ces deux corps, on devra se donner un point de l'espace, et dire dans l'énoncé si ce point est à l'intérieur ou à l'extérieur du solide.

Tout le monde est convenu d'appeler intérieur d'une conique la région du plan d'où l'on ne peut pas mener des tangentes réelles à cette conique. Les foyers définissent l'intérieur d'une conique. Cette convention s'étend aux surfaces du second degré telles que les cônes, les cylindres, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, le paraboloïde elliptique, mais elle ne s'applique plus ni à l'hyperboloïde à une nappe, ni au paraboloïde hyperbolique.

Pour l'hyperboloïde à une nappe, on admet généralement que le centre est à l'intérieur, mais pour le paraboloïde hyperbolique il est indispensable de définir l'intérieur par un point. Si l'on prend par exemple un paraboloïde équilatère, les deux solides F_i, F_e sont absolument identiques et superposables.

Dans le but de simplifier le langage on est convenu également qu'en disant, par exemple, « un cône du second degré est solide », sans ajouter autre chose, c'est qu'il est solide à l'intérieur.

De même, pour un tore, on convient d'appeler intérieur la région comprise entre l'équateur et le cercle de gorge, de sorte que dans tous les cas le centre du tore est à l'extérieur.

Combinaisons de corps. — Si maintenant nous avons deux surfaces $F = 0$, $\varphi = 0$, elles définissent de même quatre solides : F_i, F_e, φ_i, φ_e. Prenons deux quelconques d'entre eux, F_α, φ_β, nous pourrons alors représenter soit l'ensemble de ces deux corps solides et de même substance, soit la partie solide de l'un extérieur à l'autre, soit le solide commun.

Combinaisons de surfaces. — On peut également représenter le système des deux surfaces, ou bien la surface de l'une d'elles soit contenue dans l'autre, soit extérieure à l'autre.

Tels sont les différents objets que l'on a coutume de représenter en géométrie descriptive. Chacun de ces objets a sa ponctuation propre qui le caractérise, c'est-à-dire qui permet de reconnaître à la lecture de l'épure la nature de l'objet que l'on a eu l'intention de représenter.

Des lignes à figurer. — Pour représenter aux yeux l'image d'un objet sur une surface, on peut employer soit le dessin en couleur (lavis théorique), soit le dessin au trait. Le premier a l'intention de donner à l'esprit l'indication non seulement de la forme, mais aussi de la couleur de l'objet, c'est la représentation complète. Le second procédé est le résultat d'une convention, les traits que l'on doit dessiner étant simplement les limites entre les couleurs différentes. Or, ces limites sont au point de vue

géométrique des intersections de surfaces ou les contours apparents de ces mêmes surfaces ; telles sont donc les lignes qui doivent être figurées, chacune d'elles avec le trait qui lui convient (vu, caché, enlevé).

Marche à suivre. — Quel que soit l'objet à représenter, on doit avant tout : 1° parler de l'intersection. Ensuite il y a lieu, 2°, d'établir la distinction entre les choses qui existent et celles qui n'existent pas. Enfin, 3°, il reste à faire la ponctuation de ce qui existe. Voici la justification de cet ordre.

Avant de s'inquiéter de savoir si une chose est vue ou cachée, il faut avant tout savoir si cette chose existe ou n'existe pas ; autrement dit, il faut énoncer la seconde règle avant la troisième.

D'ailleurs la limite entre les choses qui existent et celles qui n'existent pas est précisément l'intersection, c'est pourquoi nous nous occupons en premier lieu de l'intersection.

Système des deux corps solides et de même substance.

1re *Règle.* — Un point de l'intersection est vu dans ce système lorsqu'il est vu aussi en examinant chaque corps séparément. En effet, le point M est vu en examinant le premier corps seul, cela veut dire que le rayon visuel OM rencontre ce premier objet en M, puis en autant de points que l'on voudra, placés tous au delà de M par rapport à O. Il en est de même pour le deuxième corps, donc quand on représentera le système des deux corps le même point M sera toujours le premier point de rencontre sur le rayon visuel OM.

2e *Règle.* — Dans cet objet, on enlève la surface de chaque corps contenue dans l'autre, parce qu'une surface ne peut exister matériellement que si elle sépare deux milieux de nature différente.

3e *Règle.* — Toute ligne (un contour apparent par exemple) dessinée sur l'une des surfaces, dans sa partie conservée, aboutissant à un point vu de l'intersection est vue aussi avant d'arriver au point. Si, au contraire, elle aboutit à un point caché, elle est cachée un certain temps avant d'arriver au point.

Fragment de solide. — Supposons par exemple qu'on ait à représenter la partie solide de F_i extérieure à [illegible].

Nous remarquons que cet objet est un fragment de F_i. Commençons donc par prendre cet objet F_i tout entier, puis supprimons de cet objet tout ce qui se trouve dans φ_i.

1re *Règle.* — On établit la ponctuation de la courbe sur F_i supposé solide, seul et conservé tout entier.

2e *Règle.* — On conserve avec sa ponctuation primitive, la surface de F_i extérieure à φ_i comme le dit l'énoncé.

3e *Règle.* — La surface de φ_i est conservée à l'intérieur de F_i.

Remarque. — Lorsqu'un solide φ_i a son contour apparent vu, le solide complémentaire φ_e a son contour apparent caché. La réciproque n'est pas toujours vraie. Donc, si le contour apparent primitif de φ_i était vu, sa partie conservée à l'intérieur de F_i serait cachée.

4e *Règle.* — Une portion de l'intersection peut redevenir vue comme contour apparent.

Des raisonnements analogues permettront d'établir la ponctuation des différents objets indiqués précédemment.

Arrivons maintenant à la combinaison qui fera surtout l'objet de cette note : portion d'un solide au-dessous d'une surface (Ecole polytechnique, 1912) [1].

[1] C'est, à ma connaissance, la seconde fois seulement qu'une pareille question a été demandée dans un examen. La première le fut au concours d'admission, 3 août 1879. En voici d'ailleurs l'énoncé. *Intersection d'un hyperboloïde à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique, ces deux surfaces ayant une génératrice commune.*

La ligne de terre est parallèle au petit côté du cadre, à [illegible] 170 du bord supérieur.

Hyperboloïde. — L'axe est la verticale O sur le grand axe de la feuille, à 0,115 de la ligne de terre.

Le cercle de gorge est à 0,080 au-dessus du plan horizontal, son rayon est de 0,040. La trace horizontale de l'hyperbo[illegible] rayon 0,120.

[illegible] le 2e pour plan directeur le plan horizontal et pour directrices 1° la génératrice ABA'B' de l'hyperboloïde [illegible] AA' est vu à gauche à la ligne de terre même par O et à gauche de ce point, et dont le point de [illegible] est derrière le plan du grand cercle de gorge ; 2° la verticale menée par un point ω du plan [illegible] distant de A de 0,04, et de O de 0,068.

On représentera ce qui reste de l'hyperboloïde quand on a enlevé ce qui est au-dessus du paraboloïde.

Lignes à tracer. — Les limites de cet objet, partie solide de S au-dessous de S_1, sont formées : 1° par la surface S ; 2° par la surface S_1 ; 3° par le cylindre vertical C_1 circonscrit à S_1 suivant le contour apparent horizontal dans l'espace de cette surface. Les lignes à tracer seront donc : 1° l'intersection de S et de S_1 ; 2° l'intersection de S et du cylindre C_1 ; 3° les contours apparents de S ; 4° les contours apparents de S_1, et enfin 5° les contours apparents de C_1.

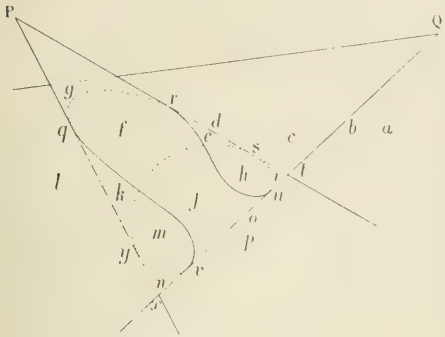


Fig. 1.

Supposons que l'on ait représenté (*fig.* 1) le système de deux cônes solides P, Q et de même substance, puis proposons-nous d'en déduire la partie solide de P au-dessous de Q.

Commençons par étudier l'objet primitif, c'est-à-dire par établir l'ordre des points de rencontre des deux surfaces avec une verticale se déplaçant dans toutes les régions limitées par les traits dessinés.

Nous appellerons p_1, p_2 les deux points de rencontre d'une verticale quelconque avec la surface P ; q_1, q_2, avec la surface Q, les indices 1 correspondant aux points les plus élevés, les indices 2 aux points les plus bas. Nous rangerons de plus les lettres dans l'ordre où l'on rencontrera les différents points en descendant sur chaque verticale.

La verticale *a*, en dehors des deux contours apparents, ne coupe aucune des deux surfaces. En *b*, sur le contour apparent de Q, la verticale est tangente à la surface Q ; il y aura donc seulement un point *q* sur cette verticale. Passons maintenant en *c* à l'intérieur du contour apparent de Q ; le point précédent *q* se dédouble, et nous obtenons par conséquent l'ordre q_1q_2. Arrivons ensuite en *d* sur le contour apparent de P ; nous aurons donc à ajouter une lettre *p*. Mais en *d* le contour apparent traversé est marqué en trait mixte, cela veut dire qu'il est enlevé à l'intérieur de Q, et par suite la nouvelle lettre *p* sera comprise entre les deux lettres q_1,q_2, ce qui donne l'ordre q_1pq_2. De *d* passons en *e* où le point *p* cette fois se dédouble pour donner l'ordre $q_1p_1p_2q_2$.

Pour passer maintenant de *e* en *f*, il faut traverser une intersection vue ; il va donc se produire une inversion entre les deux premières lettres, ce qui nous donnera l'ordre $p_1q_1p_2q_2$. Au contraire, pour passer de *e* en *h*, nous traversons une ligne cachée ; il va donc se produire une inversion entre deux lettres consécutives s'appelant l'une d'elles *p*, l'autre *q*, abstraction faite des indices, et qui ne seront pas les premières. Nous obtenons donc finalement en *h* l'ordre $q_1p_1q_2p_2$, et ainsi de suite pour toutes les autres régions. Cette étude complète est résumée dans le tableau suivant :

a	néant	*e*	$q_1p_1p_2q_2$	*i*	$q_1q_2p_1p_2$	*m*	$q_1p_1q_2p_2$
b	q	*f*	$p_1q_1p_2q_2$	*j*	$p_1q_1q_2p_2$	*n*	$q_1q_2p_1p_2$
c	q_1q_2	*g*	$p_1p_2q_1q_2$	*k*	$q_1p_1p_2q_2$	*o*	p_1qp_2
d	q_1pq_2	*h*	$q_1p_1q_2p_2$	*l*	q_1q_2	*p*	p_1p_2

Remarque. — Ne serait-il pas plus logique de dire simplement ce que l'on doit représenter, au lieu d'énoncer ce qui n'existe plus ? Il en est de même pour l'expression suivante « Trou conique dans un tore » employée autrefois dans un énoncé d'épure de sous-admissibilité à l'école polytechnique, car ce n'est pas le trou que l'on représente, mais ce qui est autour. Je dirais donc, de préférence, dans le premier cas : « Représenter la surface de l'hyperboloïde au-dessous du paraboloïde », et dans le second : « Représenter la partie solide d'un tore extérieure à un cône ».

Je proteste aussi contre l'expression « solide entaillé par une surface » qui ne précise rien : exemple, une sphère ayant son centre au sommet d'un paraboloïde hyperbolique est partagée par cette surface en deux solides superposables. Dans ce cas, quelle est l'entaille ? D'ailleurs, vulgairement, l'expression « entaille » entraîne avec elle une idée de poids ou de volume et s'applique de préférence à un petit fragment. Il serait donc plus correct de dire : « partie solide de S extérieure à S_1 ».

Nous devons maintenant, pour représenter la partie solide de P au-dessous de Q, étudier successivement chacune de ces régions.

Examinons par exemple la région f, $p_1q_1p_2q_2$. Dans cette région la verticale est à l'intérieur du solide P de p_1 à p_2. La portion de cette verticale qui est au-dessous de la surface Q va donc de q_1 à p_2. De sorte que, dans la région f, on verra la surface convexe q_1 de la surface Q, le solide au-dessous étant terminé par la surface concave p_2 du cône P.

Dans la région j, nous avions primitivement l'ordre $p_1q_1q_2p_2$; la portion de la verticale à l'intérieur de P et au-dessous de Q se réduira à q_1p_2 ; donc, dans cette région, on verra l'extérieur de la surface Q, le solide étant limité au-dessous par la surface P.

Prenons comme dernier exemple la région n pour laquelle on avait $q_1q_2p_1p_2$. La portion de la verticale à l'intérieur de P et au-dessous de Q se réduira à p_1p_2. Donc, dans cette région, on voit la surface P, et au-dessous, le solide est également limité par la même surface P.

Cette étude complète se trouve résumée dans le tableau suivant :

a	néant	e	p_1p_2	i	p_1p_2	m	p_1p_2
b	néant	f	q_1p_2	j	q_1p_2	n	p_1p_2
c	néant	g	néant	k	p_1p_2	o	qp_2
d	p	h	p_1p	l	néant	p	néant

Les modifications apportées à la première figure sont donc les suivantes (*fig.* 2) :

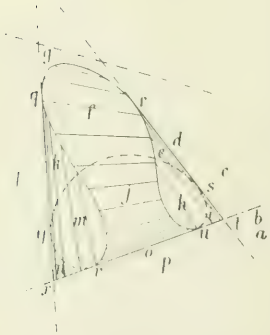


Fig. 2.

1° La branche de courbe *usyv* qui sépare les zones f et j est maintenant enlevée, au lieu d'être cachée, puisque de part et d'autre, le solide est limité par la même surface p_2.

2° La branche de courbe entre q et r, séparant les zones f et g, redevient vue comme contour apparent.

3° Les portions de contours apparents qx, xt, tr sont seules vues ; tout le reste est enlevé.

A l'intérieur de f et j, on voit la surface convexe de Q, tandis que la surface P est vue par sa région convexe dans les zones k, m, n, e, h, i.

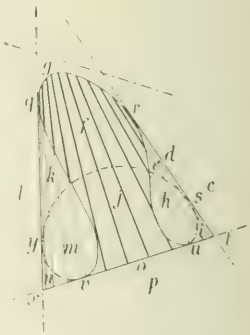


Fig. 3.

Ajoutons enfin que le solide est limité en partie par le plan vertical tx et que la partie utile de ce plan est à son tour limitée : 1° par la génératrice de contour apparent ux ; 2° par la section $xrotu$ du cône P par le même plan vertical tx.

Surface de P *au-dessous de* Q. — Le tableau précédent donne également la ponctuation de ce nouvel objet, après avoir supprimé toutes les lettres q.

Le tableau en question devient donc le suivant :

a	néant	e	p_1p_2	i	p_1p_2	m	p_1p_2
b	néant	f	p_2	j	p_2	n	p_1p_2
	néant	g	néant	k	p_1p_2	o	p_2
d	p	h	p_1p	l	néant	p	néant

Dans les régions e, h, i, k, m, n (*fig.* 3) on verra la surface convexe de P_2 tandis que ce sera la surface concave que l'on aura dans les régions f, j, o.

La marche que nous venons d'indiquer s'applique également lorsque la surface S_1 a un contour apparent singulier, c'est-à-dire correspondant à des points à l'infini. Nous allons commencer par étudier quelques surfaces présentant de pareils contours apparents, c'est-à-dire ayant une direction infinie verticale. (*A suivre.*)

ALGÈBRE

2112. — *On considère une équation du troisième degré*

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

dont on désigne par α, β, γ *les trois racines.*

1° *On demande de former le polynome* $P(x) = \Sigma(\alpha - \beta)^2(x - \gamma)^2$, *et de montrer que ce polynome est à un facteur près le hessien du polynome proposé.*

2° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles et distinctes est que les deux racines de* $P(x) = 0$ *soient imaginaires.*

3° *Former l'équation qui admet pour racines* $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$.

1. Le premier coefficient de $P(x)$ est

$$A = \Sigma(\alpha - \beta)^2 = 2\Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta\,;$$

or

$$\Sigma\alpha^2 = (\Sigma\alpha)^2 - 2\Sigma\alpha\beta,$$

et

$$A = 2(\Sigma\alpha)^2 - 6\Sigma\alpha\beta,$$

$$A = \frac{18b^2}{a^2} - \frac{18c}{a} = \frac{18}{a^2}(b^2 - ac).$$

Le deuxième coefficient, B, est

$$B = -2\Sigma\gamma(\alpha - \beta)^2 = -2\Sigma\alpha^2\beta + 12\alpha\beta\gamma\,;$$

or

$$\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha^2\beta + 3\alpha\beta\gamma\,;$$

donc

$$B = -2\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta + 18\alpha\beta\gamma,$$

$$B = \frac{18bc}{a^2} - \frac{18d}{a} = \frac{18}{a^2}(bc - ad).$$

Enfin, le troisième coefficient, C, est

$$C = \Sigma\gamma^2(\alpha - \beta)^2 = 2\Sigma\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha\,;$$

or

$$\Sigma\alpha\beta\Sigma\alpha\beta = \Sigma\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha,$$

et

$$C = 2(\Sigma\alpha\beta)^2 - 6\Sigma\alpha.\alpha\beta\gamma\,;$$

par conséquent

$$C = \frac{18c^2}{a^2} - \frac{18bd}{a^2} = \frac{18}{a^2}(c^2 - bd).$$

Le polynome $P(x)$ est donc

$$P(x) = \frac{18}{a^2}\,(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)x + c^2 - bd\,.$$

D'autre part, le hessien est

$$f''_{x^2}f''_{y^2} - (f''_{xy})^2,$$

ou

$$H = 36[(ax + b)(cx + d) - (bx + c)^2],$$

$$H = 36\,(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)x + bd - c^2\,.$$

Nous voyons donc que

$$P(x) = \frac{-H}{2a^2},$$

ce qui démontre la première partie.

2. Pour que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles et distinctes, il faut que son discriminant soit négatif, c'est-à-dire que le résultant des deux dérivées partielles soit négatif.

Les deux dérivées partielles, divisées par 3, donnent

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad bx^2 + 2cx + d = 0,$$

et leur résultant est

$$\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2);$$

c'est la quantité qui figure sous le radical dans les racines de $P(x)$; $\Delta < 0$ exprime bien que les racines de $P(x)$ sont imaginaires.

3. Nous avons

$$P(\alpha) = (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2,$$
$$P(\alpha) = 2(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2.$$

Pour former l'équation du troisième degré qui admet pour racines $P(\alpha)$, $P(\beta)$ et $P(\gamma)$, on peut se servir des fonctions symétriques, et calculer par des procédés analogues aux précédents les fonctions symétriques

$$P(\alpha) + P(\beta) + P(\gamma), \qquad P(\alpha)P(\beta) + P(\alpha)P(\gamma) + P(\beta)P(\gamma), \qquad P(\alpha)P(\beta)P(\gamma).$$

Posons $(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 = \pi$; nous aurons d'abord $\pi = -\dfrac{27\Delta}{a^4}$, comme on le voit facilement dans le calcul du discriminant d'une équation entière.

Alors $\Sigma P(\alpha)P(\beta)$ et $P(\alpha)P(\beta)P(\gamma)$ se calculent de suite :

$$\Sigma P(\alpha)P(\beta) = 4\pi\Sigma(\alpha - \beta)^2, \qquad P(\alpha)P(\beta)P(\gamma) = 8\pi^2;$$

or $\Sigma(\alpha - \beta)^2$ a déjà été calculé et est égal à $\dfrac{18(b^2 - ac)}{a^2}$.

Pour avoir $\Sigma P(\alpha)$, il n'y a qu'à développer cette fonction symétrique, telle qu'elle se présente. On peut aussi la réduire de diverses façons et ramener son calcul à celui des sommes des puissances semblables des racines :

$$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma = 2\alpha^2 + \frac{3b}{a}\alpha - \frac{d}{a\alpha}.$$

et

$$\Sigma P(\alpha) = 2\Sigma\left(2\alpha^2 + \frac{3b\alpha}{a} - \frac{d}{a\alpha}\right)^2.$$

Il y a bien d'autres procédés pour obtenir l'équation qui admet pour racines les nombres $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$. En voici un fort simple : on a

$$P(\alpha) = \frac{2\pi}{(\beta - \gamma)^2},$$

et si l'on sait former l'équation qui admet pour racines les carrés des différences des racines de l'équation proposée, on en déduira celle-ci en posant $y = \dfrac{2\pi}{z}$.

Mais le procédé le plus simple est celui-ci : nous voyons de suite que

$$f'(\alpha) = a(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma);$$

posons $\qquad (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 3u,$

nous aurons $\qquad a\alpha^2 + 2b\alpha + c - au = 0;$

d'autre part, nous savons que $\qquad 3f(x, 1) = xf'(x, 1) + f(x, 1);$

par suite $\qquad 9au + bx^2 + 2cx + d = 0,$

et l'équation en u s'obtient en éliminant x entre les deux équations

$$ax^2 + 2bx + c - au = 0, \qquad bx^2 + 2cx + d = 0.$$

Cette équation est donc

$$ad - bc - abu)^2 - (ac - u - 2ac - 2b^2)(2bd - (au - c)(au + 2c)) = 0.$$

Une fois cette équation développée, on formera l'équation aux carrés des racines, l'équation en $u = u_1$, et, comme $P(\alpha) = 2.9u^2 = 18u^2$, il suffira de former l'équation en $z = 18y$.

Remarque. — Le procédé que nous venons d'indiquer est l'un des plus rapides pour former l'équation aux carrés des différences des racines ; car, dès que l'on a l'équation en $y = u^2$, il n'y a plus qu'à poser $y = \frac{z}{2}$, pour avoir l'équation cherchée.

Autre remarque. — Le discriminant d'une équation entière se forme ainsi : soit

$$f(x, 1) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

l'équation générale de degré m, et

$$f'_x = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots = 0,$$

$$f'_x = A_1x^{m-1} + 2A_2x^{m-2} + \ldots = 0,$$

les deux équations dérivées ; le discriminant Δ est le résultant de ces deux équations.

Appelons $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de la première dérivée ; nous aurons

$$\Delta = (mA_0)^{m-1}f'_x(\alpha)f'_x(\beta)\ldots f'_x(\lambda).$$

D'autre part,

$$mf \equiv xf'_x(x, 1) + f'_y(x, 1),$$

et

$$f'_y(\alpha, 1) = mf(\alpha);$$

donc

$$\Delta = m^{2m-2}A_0^{m-1}f(\alpha)f(\beta)\ldots f(\lambda).$$

Or le résultant entre $f(x)$ et f'_x est

$$R = (mA_0)^m f(\alpha)f(\beta)\ldots f(\lambda);$$

par suite

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{m^{m-2}}{A_0}.$$

Mais R peut s'écrire autrement,

$$R = A_0^{m-1}f'_x(a)f'_x(b)\ldots f'_x(l),$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant les racines de l'équation proposée ; et, comme,

$$f'_x(a) = A_0(a-b)(a-c)\ldots(a-l),$$

$$f'_x(b) = A_0(b-a)(b-c)\ldots(b-l),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f'_x(l) = A_0(l-a)(l-b)\ldots(l-k),$$

nous avons

$$R = (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}A_0^{2m-3}\Pi(a-b)^2.$$

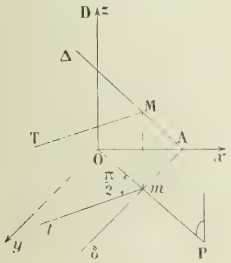
Donc

$$\Delta = (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}m^{m-2}A_0^{2m-2}\Pi(a-b)^2.$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; L. Simon, à Fourmies ; M. Roi ; G. Roy, École normale de Varzy ; C. Schmidt, à Chateau-Thierry.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2113. — *Etant données deux droites* D, Δ, *un plan* P *passant par* D *coupe* Δ *en un point* M. *Trouver, quand le plan* P *varie, le lieu engendré par la perpendiculaire menée par* M *à ce plan.*



Solution analytique. — Je prends comme axe des z la droite D, comme axe des x la perpendiculaire commune OA à D et Δ, et un troisième axe perpendiculaire aux deux autres. Je pose

$$OA = a.$$

La droite Δ a dès lors pour équations

$$(\Delta)\quad \begin{cases} x = a, \\ y = bz. \end{cases}$$

Quant au plan P, il sera défini par sa trace OP, et son équation est

$$(P)\qquad y = \lambda x.$$

La perpendiculaire MT, menée par le point

$$\text{M} \qquad \left| \begin{array}{l} x = a, \\ y = \lambda a, \\ z = \dfrac{\lambda a}{h}, \end{array} \right.$$

d'intersection de Δ avec P, a pour équations

$$\text{MT} \qquad \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{\lambda a}{h}, \\ \dfrac{x - a}{\lambda} = \dfrac{y - a\lambda}{-1}, \end{array} \right.$$

En éliminant λ, on trouve la quadrique

$$bz(y - bz) + a(x - a) = 0.$$

C'est une quadrique réglée dont le cône directeur dégénère en les deux plans

$$z = 0, \qquad y = bz;$$

c'est un paraboloïde hyperbolique.

On voit aisément que le plan $x = a$ est tangent au point A, il coupe la surface suivant les droites Δ et δ.

On peut se proposer de trouver les deux systèmes de génératrices rectilignes. On retrouve d'abord

$$\text{G}_1 \qquad \left| \begin{array}{l} bz = \lambda a, \\ y - bz = \dfrac{-1}{\lambda}(x - a), \end{array} \right.$$

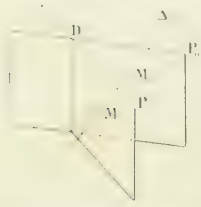
qui est la droite MT ; puis, les droites

$$\text{G} \qquad \left| \begin{array}{l} bz = \mu(x - a), \\ y - bz = -\dfrac{a}{\mu}, \end{array} \right.$$

et, parmi elles, se trouve la droite Δ qui correspond à μ infini :

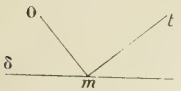
$$\Delta \qquad \left| \begin{array}{l} x = a, \\ y = bz. \end{array} \right.$$

Solution géométrique. — Je ferai d'abord remarquer que lorsque le plan P, partant d'une position P_0 quelconque, tourne d'un angle égal à π autour de D, le point M de rencontre avec Δ décrit toute la droite Δ une fois et une seule. Par conséquent la surface engendrée par MT a été décrite tout entière, et il n'y a jamais deux droites MT dans un même plan passant par Δ.



Je me propose maintenant de chercher l'ordre de cette surface. Si je considère un plan quelconque Q qui passe par Δ, il n'y a, d'après la remarque précédente, qu'une droite MT qui soit dans ce plan ; mais la droite Δ fait évidemment partie du lieu : un plan quelconque passant par Δ coupe donc la surface suivant une courbe du 2e ordre : la conique impropre formée par la droite Δ et la droite MT du plan Q. La surface elle-même est donc du deuxième ordre ; c'est une quadrique. C'est, de plus, une quadrique réglée à plans directeurs puisque la droite MT est constamment parallèle au plan des xy, c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

Autre méthode géométrique. — La droite MT s'appuie constamment sur la droite à l'infini du plan des xy ; elle s'appuie donc sur deux droites fixes, Δ et Δ', en désignant cette dernière par Δ'. D'autre part, le point M et le point M' à l'infini de cette droite MT sont dans deux plans perpendiculaires passant par Oz : ils décrivent donc deux divisions homographiques. La droite MTM' joint deux points homologues de deux divisions homographiques, elle engendre une quadrique. Pour avoir sa nature, il suffit de remarquer que le plan des xy est visiblement un plan directeur ; la quadrique est un paraboloïde hyperbolique.



Remarque. — Il est d'ailleurs facile de voir que le contour apparent de la surface, sur le plan des xy, est une parabole. L'enveloppe d'une droite mt perpendiculaire en un point m d'une droite fixe δ, à un rayon mobile Om est en effet la parabole admettant δ pour tangente au sommet et O pour foyer. Or l'enveloppe des droites mt est l'enveloppe des projections des génératrices, c'est donc le contour apparent.

Jean TONGAS, lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. G. Esteben, à Bordeaux ; G. Lach, à Douai ; M. Artignan ; G. Bétier.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

9351. — Déterminer les courbes qui rencontrent sous un angle constant α les courbes $\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{\cos 2\omega}}$. Cas particulier : $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

9352. — Un triangle isocèle ABC est tel que le côté AB est fixe, et le côté AC = AB tourne autour de A. Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle.

9353. — On considère les courbes définies par la relation $p\cos^3\alpha = \lambda$, p étant la distance de l'origine à la tangente et α l'angle de cette tangente avec Ox. Trouver les trajectoires orthogonales de ces courbes.

9354. — Trouver la développée de la courbe $y^2(a - x) = x^3$.

9355. — On donne deux points A et A' ; par le point A on mène une droite quelconque D et la symétrique Δ par rapport à AA'. On demande le lieu du point de rencontre de Δ et de la perpendiculaire D' menée à D par A'.

9356. — On donne deux points fixes A, B et par ces points on mène deux droites parallèles variables Au et Bv. Lieu des centres des cercles tangents aux droites AB, Au, Bv.

9357. — Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant α les courbes $\rho = \lambda\cos^3\frac{\omega}{3}$.

9358. — Construire la courbe $x^3 = a^2(x + y)$. La tangente en un point M rencontre la courbe au point M'. Lieu du milieu de MM'. Même question pour la courbe $x^3 - ay^2 = 0$.

9359. — Lieu des points tels que le produit de leurs distances aux sommets d'un polygone régulier soit constant.

9360. — Trouver la développée de la courbe $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

9361. — Trouver les trajectoires orthogonales des cercles tangents à deux droites fixes. [1]

9362. — On considère une courbe tangente a l'origine à l'axe des x ; on mène la tangente en un point M voisin du point O, et on détermine le point T où cette tangente rencontre Ox. Calculer l'ordre infinitésimal de l'expression MT + OT — arc OM, en prenant arc OM = s comme infiniment petit principal.

9363. — Un cercle roule sans glisser sur une droite fixe ; trouver l'enveloppe de la tangente en un point du cercle.

9364. — Trouver les points d'inflexion de la courbe définie par les équations $x = \frac{t(t+1)}{t^2 - t + 1}$, $y = tx$.

9365. — Entre les coefficients u, v, w de la droite $ux + vy + w = 0$ on donne la relation $3a^2uvw - 2a^3u^3 - w^3 = 0$. Cette droite enveloppe une courbe. Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à cette courbe.

9366. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy. Un point A décrit Ox, et un point B, Oy de telle façon que la médiane AM du triangle OAB ait une longueur constante. Trouver l'enveloppe de AB.

9367. — Trouver la développée de la courbe $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t + \sin 2t)$.

9368. — Lieu des milieux des cordes d'une cissoïde droite qui sont vues du rebroussement sous un angle droit.

9369. — Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4 = \lambda^4$, λ étant le paramètre variable.

9370. — Déterminer les points d'inflexion de la courbe $y \operatorname{tg} x = x$. Montrer qu'ils sont en ligne droite et que les tangentes d'inflexion sont tangentes à une parabole. [2]

9371. — On considère la courbe définie par les équations $xy = u$, $x + y = v$, $u = f(v)$. Calculer le rayon de courbure en un point.

9372. — Trouver les points d'inflexion de la courbe $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$.

9373. — Construire la courbe $\rho = 2a\cos^2\frac{\omega}{2}$. Une droite quelconque passant par le pôle et faisant l'angle α avec Ox rencontre la courbe aux points M et M', calculer l'angle des tangentes en ces deux points.

[1] Question résolue dans la *Revue*, 18e année, p. 541.
[2] Question résolue dans la *Revue*, 18e année, p. 552.

9374. — Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes $3x^2 + y^2 - ax = 0$, a étant le paramètre variable.

9375. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les normales à la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

9376. — Trouver les trajectoires orthogonales des courbes $x(x^2 + y^2) - \lambda y^2 = 0$.

9377. — Sur la tangente en un point M d'une courbe plane (C) on porte dans un sens déterminé une longueur constante MP. Démontrer que la normale au lieu du point P passe par le centre de courbure de la courbe (C) au point M.

9378. — Construire la courbe $\rho^2 = a^2 \dfrac{\omega}{\pi - \omega}$. En supposant que a varie, déterminer les trajectoires orthogonales.

9379. — Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont tangents à une cycloïde.

9380. — Trouver l'enveloppe de la droite $x \cos t + y \sin t = 8 + \cos 3t$. Longueur de la courbe obtenue. La normale en un point M rencontre la courbe en un autre point M' à angle droit, et la longueur MM' est constante.

9381. — On donne un cercle ayant pour centre le point O et un point A. Par le point A on mène une sécante ABC, on abaisse OH perpendiculaire sur BC, et sur la droite OH à partir du point H, on porte la longueur HM = HB. Lieu du point M. Remarques géométriques.

9382 — On donne un arc de courbe tangent à l'origine à Ox, et une corde M_1M_2 parallèle à Ox et infiniment voisine de Ox. P étant le milieu de M_1M_2, trouver la limite de la pente de OP quand la corde se rapproche indéfiniment de Ox.

9383. — On considère la transformation $x^2 = 4uv$, $y = u - v$. Que représentent les lignes $u =$ constante, $v =$ constante ? Ce sont des paraboles. Combien passe-t-il de paraboles de chaque famille par un point du plan ? Déterminer l'angle des tangentes à deux paraboles de familles différentes passant par un point donné du plan. Soit une fonction $V(x, y)$ dans laquelle on effectue la transformation ci-dessus. Calculer $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ en fonction de u et v.

9384. — Former les équations paramétriques d'une épicycloïde à deux rebroussements.

9385. — Construire la courbe définie par les équations $x = a(2t - \sin t)$, $y = a(2 - \cos t)$. Peut-on déduire cette courbe de la cycloïde par une construction géométrique ?

9386. — Calculer l'aire engendrée par la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tournant autour de Ox.

9387 — Même question pour la chaînette $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ tournant autour de Oy.

9388. — Construire la courbe $y = x\sqrt{x^2 - 1} + x^2$. Soit AB un arc de cette courbe, a et b les projections de A, B sur Ox. Calculer le volume engendré par le trapèze mixtiligne ABab tournant autour de Ox.

9389. — Trouver le centre de courbure en un point de la courbe $\rho = a(1 + \cos \omega)$. Développée de cette courbe.

9390. — Définir la cardioïde. Longueur de la courbe.

9391. — Construire la courbe $x = \dfrac{t^2 + 1}{t - 1}$, $y = \dfrac{t}{t - 1}$. Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des y et les droites $y = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$.

9392 — Construire la courbe $x = -\dfrac{p \cos 3\varphi}{2 \cos^3 \varphi}$, $y = \dfrac{p \sin 3\varphi}{2 \cos^3 \varphi}$. Calculer la longueur de l'arc.

9393. — On donne une courbe plane, un point fixe O dans son plan et un point M variable de la courbe, et on abaisse OP perpendiculaire sur la tangente au point M. Montrer que lorsque M se déplace sur la courbe, l'enveloppe du cercle de diamètre OM coïncide avec le lieu du point P.

9394. — On considère la famille de courbes $y = \dfrac{\pi}{2} + (a + bx)e^x + (c + x) \cos x + d \sin^2 x$. Déterminer la courbe de cette famille qui touche l'axe des x aux points $x = 0$, $x = \pi$, et calculer l'aire limitée par Ox et la branche de cette courbe entre les points $x = 0$, $x = \pi$.

9395. — Etant donnée la courbe $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, pour quelles valeurs de t le cercle de courbure passe-t-il à l'origine ? Application à la courbe $x^4 - y^4 = a^4$.

9396. — Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes $(x^2 - y^2)^2 - 2a(x^2 + y^2) + a^2 = 0$.

9397. — On donne dans le plan de deux axes rectangulaires Ox, Oy deux points A(1, 0) et B(2, −1). Former les équations des cercles passant par A et B et tangents à Oy. Montrer que ces cercles ont une seconde tangente commune parallèle à Ox. Calculer l'aire commune à ces deux cercles.

9398. — Etudier la conchoïde de droite $\rho = \dfrac{a}{\cos \omega} + b$. Points d'inflexion.

9399. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et deux points A et A' sur Ox, symétriques par rapport au point O. A tout point M du plan on fait correspondre le point M' tel que la droite MM' passe par le point O et que les droites AM et A'M' se coupent sur Oy. Si M décrit une droite, que décrit M' ?

9400. — Trouver le lieu des angles droits circonscrits à la courbe définie par les équations paramétriques $x = 2R(\varphi - \sin \varphi)$, $y = 2R \cos \varphi$.

9401. — On donne un cercle, la tangente en un point O de ce cercle. D'un point M de cette tangente on mène l'autre tangente MA au cercle. Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle OMA.

9402. — On donne un cercle et un point A de ce cercle. Autour du point A on fait tourner un angle de grandeur

constante BAC dont les côtés rencontrent le cercle en B et C. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

9403. — Trouver la longueur totale de la courbe définie par les équations

$$x = 2R\cos^2\varphi(1 + \cos\varphi), \qquad y = R\sin 2\varphi(1 + \cos\varphi) + R\sin\varphi.$$

9404. — Etudier la développée de la chaînette.

9405. — Trouver l'enveloppe des cordes d'une cardioïde telles que les tangentes aux extrémités de ces cordes soient parallèles.

9406. — Développée de la courbe $y = a\sin\frac{x}{a}$.

9407. — On donne un cercle et la tangente en un point A. Sur cette tangente on prend deux points B, C tels que le produit $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ soit constant. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées au cercle par les points B et C.

9408. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox en T et N. Déterminer la courbe de façon que l'on ait $\overline{ON} = 2\overline{OT}$.

9409. — Déterminer deux courbes telles que les tangentes en deux points situés sur un même rayon polaire se coupent orthogonalement sur l'axe polaire.

9410. — On considère la courbe (C) enveloppée par la droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$, où p est fonction de φ. La tangente et la normale en un point M de cette courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la fonction p de façon que $\overline{ON}.\overline{OT} = a^2$.

9411. — D'un point M d'une courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Oy, puis PQ perpendiculaire sur la tangente au point M. Déterminer la courbe de façon que PQ ait une longueur constante.

9412. — On donne deux droites parallèles D, D' et un point O équidistant de ces droites. La tangente en un point M d'une courbe rencontre D et D' aux points T et T'. Déterminer la courbe de façon que les segments MT et MT' soient vus d'un point O sous le même angle.

9413. — Trouver une courbe telle que le segment de la tangente compris entre le point de contact et un cercle donné ait une longueur constante. Examiner le cas où la longueur donnée est égale au rayon du cercle.

9414 — Trouver les courbes telles que l'on ait $s = \frac{a\alpha^2}{2}$, s désignant l'arc et α l'angle de la tangente avec Ox.

9415. — Soit ρ le rayon de courbure en un point d'une courbe, ρ' le rayon de courbure au point correspondant de la développée ; trouver les courbes pour lesquelles on a $\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{\rho'^2}{b^2} = 1$.

9416. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent en T et N la perpendiculaire menée par le pôle O au rayon vecteur OM. Déterminer la courbe de façon que l'aire du triangle MNT soit constante.

9417. — Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à l'ordonnée.

9418. — Déterminer une courbe telle que l'on ait $\rho = \frac{a}{\cos^2\alpha}$, ρ étant le rayon de courbure et α l'angle de la tangente avec Ox. Même question pour $\rho = ae^{m\alpha}$.

9419. — Déterminer une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente soit égale à $2x^2y^2$.

9420. — La tangente en un point M d'une courbe rencontre Ox au point T. On joint ce point à un point fixe A de Oy. Déterminer la courbe de façon que TA = TM.

9421. — La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrent Ox aux points T et N. Déterminer la courbe de façon que $\frac{\overline{ON}}{\overline{OT}} = k$.

9422. — Déterminer une courbe telle que le rapport des distances d'un point fixe à la tangente et à la normale en un point quelconque soit constant.

9423. — On considère une courbe rencontrant Oy au point A. D'un point M de la courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox, et on désigne par x l'abscisse de M et par x_1 celle du centre de gravité de l'aire OAMP. Déterminer la courbe de façon que $x_1 = \frac{ax}{a+x}$.

9424. — Trouver une courbe telle que l'on ait entre l'ordonnée y et l'arc s la relation $y = ae^{\frac{s}{a}}$.

9425. — Trouver une courbe telle que la normale limitée à Ox se projette sur le rayon vecteur suivant un segment constant.

9426. — On considère une courbe rencontrant Oy au point A. D'un point M(x, y) de cette courbe on abaisse MP perpendiculaire sur Ox. Déterminer la courbe de telle manière que l'aire limitée par la courbe et par les droites AO, OP, PM soit égale à $\frac{y^3}{x}$.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2209. — Etant donnée une strophoïde oblique et un point A sur cette courbe, déterminer géométriquement :

1° Les points d'intersection de la strophoïde avec une sécante quelconque passant par A, et construire en particulier la tangente en A ;

2° Les tangentes issues de A à la strophoïde et construire la corde des contacts.

R. Bouvaist.

2210. — On considère une hyperbole équilatère et un cercle ayant son centre sur l'hyperbole.

1° Démontrer qu'il existe une infinité de triangles inscrits à l'hyperbole et conjugués au cercle.

2° Les cercles circonscrits à ces triangles passent par un point fixe.

3° Trouver le lieu des centres de ces cercles.

R. Bouvaist.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2100. — *On considère la courbe définie par les trois équations*

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad y = a \operatorname{sh} t, \qquad z = at,$$

dans lesquelles t désigne le temps, et on oriente cette courbe dans le sens du mouvement.

1° *Trouver l'arc de cette courbe, les cosinus directeurs de la tangente, et montrer que cette courbe est l'hélice d'un cylindre dont on construira la base. Trouver toutes les hélices de ce cylindre.*

2° *Trouver l'hodographe du mouvement et le lieu du point obtenu en portant à la suite du vecteur vitesse un vecteur équipollent au vecteur accélération.*

3° *Former l'équation du plan osculateur et déterminer l'enveloppe de sa trace sur le plan des zx. Construire cette courbe.*

4° *Une courbe variable, qui dépend d'une constante arbitraire c est donnée paramétriquement par les deux équations $x = f(t, c)$, $y = \varphi(t, c)$; indiquer le moyen d'obtenir les courbes orthogonales à celles de ce faisceau. Appliquer au faisceau formé dans le plan des zx par la projection de la courbe donnée, quand la constante a varie.*

1. Les paramètres de la tangente sont

$$dx = a \operatorname{sh} t\, dt, \qquad dy = a \operatorname{ch} t\, dt, \qquad dz = a\, dt ;$$

nous avons donc

$$ds^2 = a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1)\, dt^2.$$

et, comme $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$,

$$ds^2 = 2a^2 \operatorname{ch}^2 t\, dt^2.$$

Par conséquent, puisque $\frac{ds}{dt}$ doit être positif,

$$ds = a\sqrt{2} \operatorname{ch} t\, dt.$$

Il résulte de là que

$$s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t + C,$$

en prenant pour origine des arcs le point qui correspond à $t = 0$, c'est-à-dire la position du mobile à l'origine des temps, la constante C est nulle et nous avons

$$s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\mathrm{th}\,t}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t};$$

nous voyons que β est constant et égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ceci nous montre que la tangente à la courbe fait un angle constant, égal à 45°, avec la direction Oy. Cette courbe est donc une hélice du cylindre parallèle à Oy et qui a pour base la courbe

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad z = at$$

Cette base est une chaînette qui a pour équation $x = a\,\mathrm{ch}\,\frac{z}{a}$. Le paramètre est a, la base est Oz et l'axe de la chaînette est Ox.

Toutes les courbes situées sur ce cylindre ont pour équations paramétriques

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \qquad y = g(t), \qquad z = at.$$

Pour que l'une d'elles soit une hélice, il faut que l'angle qu'elle fait avec Oy soit constant, c'est-à-dire que

$$\frac{y'}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,t + y'^2 + a^2}} = \mathrm{C^{te}} = \cos\theta;$$

nous en déduisons

$$y'^2 \sin^2\theta = a^2 \cos^2\theta\,\mathrm{ch}^2\,t,$$

ou

$$y' = \pm\, a\,\frac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{tg}\,\theta};$$

par suite,

$$y = \pm\, a\,\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{tg}\,\theta} + \mathrm{C}.$$

La constante C indique que toutes les courbes qui correspondent à une valeur donnée de θ se déduisent de l'une d'elles par des translations parallèles à Oy. Le signe $\pm$ indique que la courbe peut marcher dans le sens des y positifs ou dans le sens des y négatifs. On peut d'ailleurs supprimer le signe $\pm$ et se contenter de faire varier $\mathrm{tg}\,\theta$ de $-\infty$ à $+\infty$.

2. Les coordonnées d'un point de l'hodographe sont $x_1 = a\,\mathrm{sh}\,t$, $y_1 = a\,\mathrm{ch}\,t$, $z_1 = a$. C'est donc une courbe plane située dans le plan $z_1 = a$ et sur le cylindre

$$y_1^2 - x_1^2 = a^2;$$

c'est une hyperbole équilatère.

Le lieu obtenu en ajoutant au vecteur vitesse le vecteur accélération a pour équations

$$x_2 = a(\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t), \qquad y_2 = a(\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t), \qquad z_2 = a;$$

c'est une droite du plan $z_2 = a$ qui se projette sur le plan des xy suivant la première bissectrice de l'angle des axes; c'est une asymptote de l'hyperbole précédente.

3. Le plan osculateur a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - a\,\mathrm{ch}\,t, & y - a\,\mathrm{sh}\,t, & z - at \\ \mathrm{sh}\,t & \mathrm{ch}\,t & 1 \\ \mathrm{ch}\,t & \mathrm{sh}\,t & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

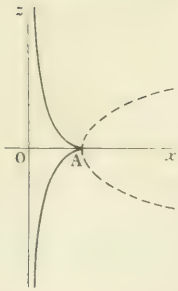
ou $x\,\mathrm{sh}\,t - y\,\mathrm{ch}\,t + z - at = 0$. Sa trace sur le plan des zx est

$$x\,\mathrm{sh}\,t + z - at = 0,$$

et l'enveloppe de cette droite, qui s'obtient en dérivant par rapport à t, a, pour équations paramétriques,

$$x = \frac{a}{\mathrm{ch}\,t}, \qquad z = a(t - \mathrm{th}\,t).$$

On reconnaît là les équations paramétriques d'une tractrice, ayant pour axe Ox, pour asymptote Oz et pour point de rebroussement le point $x = a$, $z = 0$.



Ce résultat était évident : on sait, en effet, que le plan osculateur d'une courbe gauche enveloppe une surface développable qui est le lieu des tangentes à cette courbe ; la droite caractéristique du plan osculateur est donc la tangente à la courbe donnée, hélice du cylindre qui a pour base la chaînette, et le point de contact de la trace de ce plan osculateur avec son enveloppe est le point de rencontre de la tangente avec le plan des zx ; comme la sous-tangente à l'hélice est égale à l'abscisse curviligne du point de l'hélice, le point de rencontre de la tangente à l'hélice avec le plan des zx décrit une développante de chaînette qui part du sommet ; on sait que cette courbe est la tractrice que nous avons trouvée antérieurement.

4. Soient $x = f(t, c)$, $y = g(t, c)$ les équations paramétriques d'une courbe variable qui dépend d'une constante arbitraire c. Nous aurons toutes les courbes que peuvent décrire les points de cette courbe variable en nous donnant une fonction c de t, arbitraire ; si la fonction c est convenablement choisie nous aurons une courbe jouissant par rapport à celle qui est donnée de telle propriété imposée à l'avance : nous pourrons ainsi avoir l'enveloppe ou une trajectoire orthogonale. Si nous voulons une trajectoire orthogonale, nous écrirons que les tangentes aux deux courbes sont rectangulaires ; or les paramètres de la tangente à la première courbe sont f'_t, g'_t ; ceux de la tangente à la seconde sont

$$f'_t + c'f'_c, \qquad g'_t + c'g'_c ;$$

en écrivant que ces deux droites sont rectangulaires, nous avons

$$f'^2_t + g'^2_t + c'(f'_t f'_c + g'_t g'_c) = 0,$$

équation différentielle qui donne c en fonction de t.

Appliquons à la courbe

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad z = at,$$

où a est une constante arbitraire ; nous aurons successivement, pour les paramètres des deux tangentes,

$$a \operatorname{sh} t, \qquad a, \qquad a \operatorname{sh} t + a' \operatorname{ch} t, \qquad a + a't,$$

et, pour la condition d'orthogonalité,

$$a(\operatorname{sh}^2 t + 1) + a'(t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t) = 0,$$

d'où

$$\frac{da}{a} + \frac{(1 + \operatorname{sh}^2 t)dt}{t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} = 0.$$

L'intégration est immédiate, car la dérivée de $t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$ est $1 + \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2(1 + \operatorname{sh}^2 t)$; nous trouvons donc

$$\mathrm{L}\frac{a}{C} + \frac{1}{2}\mathrm{L}[t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t] = 0, \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{C}{\sqrt{t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}}.$$

Cette solution convient quand t est positif ; si t est négatif, il faut prendre $a = \dfrac{C}{\sqrt{-t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}}$.

Les trajectoires orthogonales sont donc

$$x = \frac{C \operatorname{ch} t}{\sqrt{t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}}, \qquad z = \frac{Ct}{\sqrt{t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}},$$

qui correspondent à la branche de chaînette fournie par les valeurs positives de t, et

$$x = \frac{C \operatorname{ch} t}{\sqrt{-t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}}, \qquad z = \frac{Ct}{\sqrt{-t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}},$$

qui correspondent aux points de l'autre branche. Si, dans ces dernières équations, on change t en $-t$,

on voit que les courbes de cette seconde espèce sont symétriques de celles de la première par rapport à Ox. Ce résultat pouvait être prévu *a priori*.

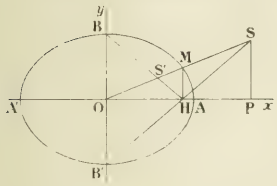
Nous voyons aussi que toutes ces courbes sont homothétiques deux à deux par rapport au point O, résultat non moins évident, puisque les chaînettes variables sont homothétiques deux à deux par rapport au point O.

A. ROUSSEAU, à Fournes, et G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions : MM. Deperrois, à Evreux ; A. Courtois ; E. Rouse ; L. Simon, à Fourmies ; Chénet.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2103. — *Soient* (C) *le cercle ayant son centre en un point* M *variable d'une ellipse* (E) *et tangent au grand axe de* (E), *et* (D) *le cercle décrit sur le petit axe de* (E) *comme diamètre. Le lieu des centres de similitude des cercles* (C) *et* (D) *se compose de deux paraboles.*



Solution analytique. — Prenons pour axes les axes de l'ellipse, et désignons par φ l'anomalie excentrique du point M, qui parcourt l'ellipse et qui est le centre du cercle mobile. Soient H le pied de l'ordonnée, B et B' les sommets du petit axe. Les centres de similitude des deux cercles sont sur la droite OM et sur les droites BH, B'H. La droite OM a pour équation

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi};$$

la droite BH,

$$\frac{x}{a\cos\varphi} + \frac{y}{b} = 1.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer φ entre ces deux équations, pour avoir l'un des lieux. Le calcul se fait aisément et donne de suite

$$\cos\varphi = \frac{bx}{a(b-y)}, \qquad \sin\varphi = \frac{ay}{bx}\cos\varphi = \frac{y}{b-y},$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = (y-b)^2,$$

et enfin

$$b^2x^2 + a^2(2by - b^2) = 0,$$

ou

$$bx^2 + a^2(2y - b) = 0.$$

Le lieu est donc une parabole ayant pour axe Oy, pour sommet le point $x = 0$, $y = \frac{b}{2}$, et passant aux points A et A'.

L'autre lieu est la parabole

$$bx^2 - a^2(2y + b) = 0,$$

symétrique de la précédente par rapport à Ox.

R. MANEN, à Albi ; H. FROBERT, à Paris.

M. Manen a traité en outre d'autres cas : le cas où le cercle fixe est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, et le cas où le cercle mobile est tangent au petit axe.

Bonnes solutions : MM. Josenhans, lycée Louis-le-Grand ; Berlande, à Saint-Cloud ; G. Vancloche, école Lavoisier ; G. Lach, à Douai ; Charrondière, 18e d'artillerie à Grenoble ; R. Dufour, école normale à Nancy ; L. Simon, à Fourmies ; M. Roux, à Chalon-sur-Saône ; G. Husson, à St-Etienne ; M. Roi ; G. Esteben, à Bordeaux ; G. Betier, à Poitiers ; G. Roy, école normale de Varzy ; A. Le Marchand, à Paris ; L. Troin.

Solution géométrique. — Il est évident que les lieux s'obtiendront en prenant les mêmes lieux pour le cercle homographique de l'ellipse et en projetant orthogonalement cette nouvelle figure sur le plan de l'ellipse. Inutile de changer la figure ; nous supposerons simplement $OA = OB$. Nous avons alors

$$\frac{SP}{MH} = \frac{OS}{OM}, \qquad \frac{MH}{OB''} = \frac{MS}{OS},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{SP}{OB''} = \frac{MS}{OM};$$

or $OB'' = OM$; donc $SP = MS$, et $OS = SP + OA$. Si donc nous menons la tangente au cercle en B'', nous voyons que le lieu de S est une parabole ayant pour foyer le point O et pour directrice cette tangente. Le lieu de S' s'obtient de la même façon.

Quand le point M passe au-dessous de Ox, le point S devient le centre de similitude inverse, et chacune des paraboles contient des centres de similitude des deux espèces.

J. Mourret, École normale supérieure, et H. Frobert, à Paris.

Bonnes solutions de MM. L. Troin ; A. Rousseau ; J. Chaize, à Paris.

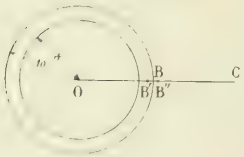
ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1912.

Physique et chimie.

1° *Une quantité d'électricité positive égale à* 100 *unités électrostatiques C. G. S. est uniformément répartie sur une sphère conductrice isolée creuse dont le rayon intérieur est de* 8^{cm} *et le rayon extérieur de* 10^{cm}.

On demande de représenter par une courbe les valeurs de l'intensité du champ créé par cette sphère aux différents points d'un rayon indéfini OC, *dans les deux intervalles suivants :*



a) Entre le point O *et le point* B' *situé à une distance* $10 - \varepsilon^{cm}$ *du point* O, ε *étant une grandeur positive très petite ;*

b) A partir du point B'' *en s'éloignant indéfiniment sur* OC, B'' *étant situé à une distance* $10 + \varepsilon$ *du point* O.

2° *On remplace le système d'unités électrostatiques C. G. S. par un système d'unités électrostatiques adoptant comme unités mécaniques fondamentales la masse du kilogramme, le mètre et la minute.*

Par quels nombres seront représentées dans ce nouveau système la charge de la sphère creuse et l'intensité du champ en un point situé à 1 *mètre du centre ?*

1. Du point O au point B' le champ est nul.

Du point B'' à l'infini, le champ est le même que si la charge de la sphère était au centre et, par conséquent, égal à $\frac{100}{x^2}$. x désignant la distance du point considéré au point O. En B'', en particulier, $x = 10$ et le champ est égal à 1.

Au point B, sur la sphère même, le champ est égal à $\frac{1}{2}$.

Ces résultats peuvent être représentés par un graphique dont l'allure est évidente.

2. Le rapport $\frac{q}{100}$ des nombres représentant la charge de la sphère dans le nouveau et dans le

premier système est égal au rapport inverse $\frac{Q'}{Q}$ des unités de masse électrique. Or les dimensions de la charge électrique, dans un système électrostatique, se déduisent de la loi de Coulomb $f = \frac{qq'}{r^2}$ qui donne d'abord $MLT^{-2} = \frac{Q^2}{L^2}$, d'où $Q = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$. Donc

$$\frac{Q'}{Q} = \left(\frac{M'}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L'}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T'}{T}\right)^{-1}.$$

Or on a $\frac{M}{M'} = 1000, \qquad \frac{L}{L'} = 100, \qquad \frac{T}{T'} = 60.$

Remplaçons, il vient

$$\frac{q}{100} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{60}\right)^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad q = 0{,}19 \text{ environ.}$$

Le mètre étant l'unité de longueur du nouveau système, le champ à la distance de 1 mètre est représenté par le même nombre 0,19.

2118. — *Deux sphères conductrices* A *et* B *de* 5mm *de diamètre, chargées de quantités égales d'électricité positive et pesant* 1g *chacune sont suspendues dans le vide à des fils isolants* OA, OB *de poids négligeable, longs de* 2 *mètres.*

Elles prennent deux positions d'équilibre A *et* B *telles que la distance* AB = 10cm.

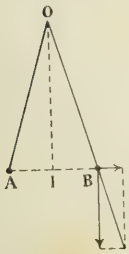
Calculer en unités C. G. S., avec une approximation d'une unité par défaut, la charge de chacune de ces deux sphères.

L'accélération de la pesanteur est de 981 *C. G. S.*

Pour charger les deux petites sphères A *et* B, *on les a reliées par des fils métalliques longs et fins à une même sphère conductrice* C *dont le rayon est de* 10cm.

Calculer la charge initiale Q *de cette sphère. On admettra que les sphères* A, B, C *sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que les phénomènes d'influence électrostatique soient négligeables.*

Considérons l'équilibre de l'une des sphères, B par exemple, et soit α l'angle IOB que fait le fil OB avec la verticale. La résultante du poids mg de la sphère considérée et de la répulsion f qu'elle subit de la part de l'autre doit avoir la direction du fil, donc



$$f = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

En unités électrostatiques, f est égal à $\frac{q^2}{d^2}$, q désignant la charge cherchée et d la distance des deux sphères. D'autre part l'angle α est assez petit pour qu'on puisse confondre sa tangente avec son sinus $\frac{d}{2l}$, l désignant la longueur OB. On aura donc

$$\frac{q^2}{d^2} = mg \frac{d}{2l}.$$

Introduisons les valeurs numériques :

$$q^2 = \frac{1 \times 981 \times 1000}{2 \times 200} = \frac{9810}{4}, \qquad q = 49{,}5.$$

La charge Q se compose de la charge Q′ qui est restée sur la sphère C et des charges $2q$ qui sont passées sur les sphères A et B :

$$Q = Q + 2q.$$

Or les charges Q' et q portent respectivement au même potentiel la sphère C et une des sphères A ou B ; les capacités de ces sphères étant respectivement égales à leurs rayons R et r, on a

$$\frac{Q'}{R} = \frac{q}{r}, \qquad Q' = \frac{R}{r}q.$$

$$Q = \left(\frac{R}{r} + 2\right)q = 42q = 2080.$$

Assez bonnes solutions de MM. R. Durour, à Nancy et G. Lach, à Douai.
Solution partielle de M. Hule, à Laon.

2119. — *On effectue l'analyse d'un mélange de gaz de la façon suivante :*

On mesure d'abord 100^{cm3} *de ces gaz sur l'eau salée qui dissout très peu* CO^2 *et sous la pression atmosphérique. On amène cette quantité de gaz au contact d'une solution absorbante avec laquelle on l'agite. On mesure à nouveau le volume du gaz dans les mêmes conditions que précédemment.*

On répète ensuite ces deux dernières opérations sur le gaz restant en employant diverses solutions absorbantes.

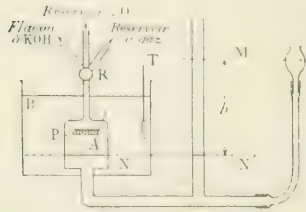
Par quelle suite d'opérations (et dans quel ordre) absorbera-t-on le CO^2, *l'* H^2S, *le* CO, *l'* O *et l'ensemble des deux hydrocarbures éthylène et acétylène?*

Les différentes opérations d'absorption ayant donné entre deux mesures consécutives les différences de volume suivantes : $O : 1^{cm3},2$; $H^2S : 0^{cm3},5$; $CO^2 : 3^{cm3}$; $CO : 20^{cm3}$; $C^2H^2 + C^2H^4 : 3^{cm3}$, *indiquer le volume de chacun des gaz contenus dans* 100 *volumes de gaz initial sec mesuré à* 0° *sous la pression de* 760^{mm} *de mercure.*

2° *Pour doser le* CH^4 *et l'*H, *seuls éléments combustibles subsistant dans le gaz, on introduit un certain volume de gaz ayant subi les traitements précédemment décrits dans l'appareil suivant :*

Cet appareil est constitué par un tube A *que l'on peut isoler ou bien mettre en communication par un robinet* R, *soit avec un réservoir contenant le gaz, soit avec un réservoir d'oxygène pur, soit avec un flacon de potasse.*

Le tube A *est relié à un manomètre à mercure* M *et à un vase* V *contenant du mercure et dont on peut faire varier le niveau. Le tube* A *est placé dans une cuve à eau* B *où plonge un thermomètre* T. *Il contient une spirale de platine* P *qu'on rend incandescente par le passage d'un courant et qui assure ainsi la combustion complète des éléments combustibles contenus dans* A.



On introduit le gaz à analyser dans A. *On amène le mercure dans* A *à un niveau invariable* N ; *on lit la différence de niveau* $MN' = h$ *entre le mercure du tube* M *au-dessus de* N' *et le mercure de* A. *On lit également la pression atmosphérique* p *et la température* t *de l'eau de la cuve* B.

On introduit ensuite une certaine quantité d'oxygène pur en excès pour brûler complètement les éléments combustibles du gaz. On ramène le mercure de A *en* N ; *on lit* $MN' = h'$, p' *et* t' *(mêmes significations que précédemment).*

On fait passer le courant dans la spirale de platine P. *On ramène le mercure de* A *en* N ; *on lit* $MN' = h''$, p'' *et* t''.

On fait passer tout le gaz de A *dans un flacon de potasse et après agitation au contact de la potasse on l'introduit à nouveau dans* A. *On ramène le mercure de* A *en* N ; *on lit* $MN' = h'''$, p''' *et* t'''.

On admet que le gaz était saturé de vapeur d'eau au moment des diverses mesures.

On demande :

a) Les formules donnant les volumes v et v' de CH^4 et de H contenus dans 100^{cm^3} du gaz introduit dans l'appareil eudiométrique, ce gaz étant sec et mesuré sous la pression de 760^{mm} de mercure ;

b) De calculer v pour :

$$p = 720^{mm}, \quad p' = 720^{mm},5, \quad p'' = 720^{mm}, \quad p''' = 720^{mm},5,$$
$$h = 70^{mm}, \quad h' = 300^{mm}, \quad h'' = 200^{mm}, \quad h''' = 150^{mm},$$
$$t = t' = t'' = t''' = 11^{\circ}.$$

La tension maximum de la vapeur d'eau à 11° est de 10^{mm} de mercure ;

c) De calculer l'erreur relative maximum commise sur la détermination de v en admettant qu'on peut commettre une erreur maximum de lecture 1/4 de mm. sur la détermination de p et de h en écartant toute autre cause d'erreur.

3° Le gaz étudié peut contenir, en outre des éléments dosés, de petites quantités de sulfure de carbone, d'acide cyanhydrique et d'ammoniaque.

Comment en décèlera-t-on la présence ainsi que celle de l'acétylène qui peut se trouver dans le mélange acétylène-éthylène absorbé dans la première série d'opérations du dosage ?

Il suffira d'indiquer d'une manière précise une seule façon d'opérer caractéristique de chaque élément.

Quels phénomènes chimiques se produiront lorsque l'on fera barboter dans l'eau de chaux le gaz analysé supposé contenir du sulfure de carbone en sus des éléments principaux dosés dans les deux premières séries d'opérations quantitatives ?

1. Il conviendra d'absorber d'abord l'acide sulfhydrique par une dissolution de sulfate de cuivre ; on pourrait employer également le bioxyde de manganèse ou le bioxyde de plomb.

On absorbera ensuite le gaz carbonique par la potasse puis, en ajoutant de l'acide pyrogallique, l'oxygène. Après lavage, on fixera l'oxyde de carbone par une dissolution chlorhydrique de chlorure cuivreux.

Enfin, l'acétylène et l'éthylène peuvent être absorbés soit par le brome, soit, plus commodément, par une dissolution de permanganate de potassium.

Ces absorptions ayant été mesurées, d'après l'énoncé, à pression constante, les nombres obtenus avec 100 centimètres cubes du mélange donnent immédiatement la proportion pour 100 de chaque élément.

2. *a*) Appelons V le volume constant, limité par le niveau N, auquel on ramène le gaz de l'appareil. Ramenons à 0°, à 760^{mm} et à l'état sec le volume après chaque opération ; nous aurons, en désignant par f, f', f'', f''' les tensions maxima successives de la vapeur d'eau :

Volume du gaz introduit dans l'appareil . . . . . $V\frac{1}{1+\alpha t}\frac{p+h-f}{760} = U.$

Volume du gaz mêlé d'oxygène . . . . . $V\frac{1}{1+\alpha t'}\frac{p'+h'-f'}{760} = U'.$

Volume du résidu après la combustion. . . . . $V\frac{1}{1+\alpha t''}\frac{p''+h''-f''}{760} = U''.$

Volume du résidu après l'absorption du gaz carbonique . $V\frac{1}{1+\alpha t'''}\frac{p'''+h'''-f'''}{760} = U'''.$

Volumes du méthane et de l'hydrogène dans le gaz . . . $v\frac{U}{100}$ et $v'\frac{U}{100}$.

La combustion du méthane est représentée par l'équation

$$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O$$

et produit une diminution de volume double du volume du méthane, soit $2v\frac{U}{100}$.

La combustion de l'hydrogène est représentée par

$$H^2 + O = H^2O$$

et, l'eau se condensant, produit une diminution de volume égale à $\frac{3}{2}v'\frac{U}{100}$.

La diminution totale est

$$(1)\qquad U'' - U''' = \left(2v + \frac{3}{2}v'\right)\frac{U}{100}.$$

L'absorption du gaz carbonique produit une contraction égale au volume de ce gaz, donc

$$(2)\qquad U' - U'' = v\frac{U}{100}.$$

b) En remplaçant, dans cette dernière équation en particulier, U, U'' et U''' par leurs expressions et tenant compte de l'égalité des températures t, t'' et t''', on trouve

$$(3)\qquad (p'' + h' - f'') - (p''' + h'' - f''') = v\,\frac{p + h - f}{100},$$

soit, en introduisant les valeurs numériques,

$$720 + 200 - 10 - (720,5 + 150 - 10) = \frac{v}{100}(720 + 70 - 10),$$

d'où

$$v = 6,346.$$

Le calcul de l'équation (1) donne de même

$$v = 0,128.$$

c) En différentiant l'équation (3), p, h et v étant les seules variables, on a

$$v(dp + dh) + (p + h - f)dv = 0,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp + dh}{p + h - f}.$$

Remplaçons dp et dh par les erreurs possibles, $p + h - f$ par sa valeur ; il vient

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{1560},$$

erreur excessivement faible : mais, dans la pratique, il y aurait à tenir compte des erreurs possibles sur toutes les autres lectures.

3. On peut reconnaître le sulfure de carbone par la potasse qui, par agitation, donne naissance à un sulfocarbonate jaune brun. Ce sulfocarbonate, après neutralisation de la potasse par l'acide acétique, donne, avec l'acétate de plomb, un précipité brun foncé.

La potasse absorbe aussi l'acide cyanhydrique et forme un cyanure qui se convertit en bleu de Prusse au contact d'un mélange de sels ferreux et ferrique.

Des traces d'ammoniaque donnent un précipité caractéristique avec le réactif de Nessler.

Enfin l'acétylène se reconnaît à l'aide du chlorure cuivreux ammoniacal.

Au contact de l'eau de chaux, le sulfure de carbone se transforme en un mélange de carbonate et de sulfocarbonate

---

ÉCOLE CENTRALE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

Algèbre et Trigonométrie (M. Gérard).

9333 Discuter le système $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$.

9334 Résoudre le système $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$.

Montrer que si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ et $\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = 0$, le système se réduit à deux équations.

9335. — Etudier le système $x+y+z=\alpha,\quad ax+by+cz=\beta,\quad bcx+cay+abz=\gamma.$

9336. — Discuter le système $x+ay+a^2z=a^3,\quad x+by+b^2z=b^3,\quad x+cy+c^2z=c^3.$ Peut-on déduire le résultat des relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique ?

9337. — Etudier le système $bz-cy=\alpha,\quad cx-az=\beta,\quad ay-bx=\gamma.$

9338. — Discuter le système homogène $ax+by+cz=0,\quad a'x+b'y+c'z=0.$

9339. — Etudier un système de quatre équations linéaires et homogènes à quatre inconnues x, y, z, t.

9340. — Eliminer x et λ entre les trois équations

$$ax^2+bx+c=\lambda,\qquad a'x^2+b'x+c'=\lambda s,\qquad a''x^2+b''x+c''=\lambda t.$$

9341. — Etudier les séries

$$u_n=\frac{a^n-1}{n},\qquad u_n=\frac{1+a^n}{n},\qquad u_n=\frac{1+a^n}{n^2},\qquad u_n=\sqrt{n^2+1}-n,\qquad u_n=\frac{n^2+3}{n^3+1},\qquad u_n=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1},$$

$$u_n=-1)^n\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2n+1},\qquad u_n=\frac{\mathrm{L}n}{n},\qquad u_n=\frac{\mathrm{L}n}{n+1},\qquad u_n=\frac{\mathrm{L}n}{3n+4},\qquad u_n=\frac{\mathrm{L}n}{n^2}.$$

9342. — Limite de $n^{\frac{1}{n}}$ pour n infini. Etudier la série dont le terme général est $u_n=n^{\frac{1}{n}}-1$.

9343. — Limite de $n^{\frac{1}{n^2}}$ pour n infini. Etudier la série $u_n=n^{\frac{1}{n^2}}-1$.

9344. — Etudier les séries

$$u_n=n^2x^n,\qquad u_n=\frac{x^n}{n^2+1},\qquad u_n=(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1},\qquad u_n=\frac{x^n}{n(n-1)},\qquad u_n=\frac{nx^n}{3n^2+4},\qquad u_n=\frac{nx^n}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$u_n=\frac{x^n\mathrm{L}n}{n+1},\qquad u_n=\frac{x^n\mathrm{L}n}{3n^2+4},\qquad u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

9345. — Montrer que e est plus petit que 3.

9346. — Le nombre e est irrationnel.

9347. — Montrer que $e^k>k+1$.

9348. — Ecrire $e^{\frac{1}{2}}$ et calculer une limite supérieure de l'erreur commise quand on s'arrête au troisième terme.

9349. — La fonction $y=3^x$ augmente en même temps que x.

9350. — Démontrer que $\mathrm{L}\,\frac{m+1}{m}$ est compris entre $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m+1}$.

9351. — Trouver par la règle à calcul le logarithme vulgaire de e.

9352. — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y=x^m,\qquad y=\log u,\qquad y=e^{\sin u},\qquad y=\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2},\qquad y=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1+x}{1-x},\qquad y=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x}{1-x^2},\qquad y=e^{kx},$$

$$y=x^{2x},\qquad y=x^{kx},\qquad y=x^{1/x},\qquad y=x^{\frac{1}{x}},\qquad y=x^{x},\qquad y=x^{\sqrt{x}},\qquad y=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\qquad y=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

9353. — Formule des accroissements finis. Appliquer aux expressions $\mathrm{arc\,tg}\,b-\mathrm{arc\,tg}\,a$, $\mathrm{arc\,tg}\,5-\mathrm{arc\,tg}\,4$.

9354. — Dérivée d'une fonction implicite. Appliquer à $y^x-2=0$.

9355. — Différentielle totale de $z=\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$.

9356. — Etudier les variations des fonctions suivantes : $y=\frac{e^x}{x},\quad y=\frac{e}{x^2},\quad y=\frac{e^x-1}{x}$.

9357. — Variations de $y=\frac{a^x-1}{x}$; posant $a=1+\alpha$, comparer les valeurs respectives de $(1+\alpha)^x$ et de $(1+\alpha x)$.

9358. — Variations de

$$y=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}},\qquad y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1},\qquad y=(x+1)\log(1+x),\qquad y=x-(1+x)\mathrm{L}(1+x),$$

$$y=\mathrm{L}(1+x)-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},\qquad y=\mathrm{L}(1+x)-\frac{x}{x+1},\qquad y=\mathrm{L}(1+x)-x+\frac{x^2}{2},$$

$$y=\mathrm{L}(1+x)-x+\frac{x^2}{x+2},\qquad y=\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x},\qquad y=\mathrm{L}\,\frac{2x+2}{x+2}-\frac{x}{x+2},$$

$$y=\mathrm{arc\,tg}\,x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7},\qquad y=(1+x)^m-1-\frac{mx}{x+1},\qquad y=(1+x)^m-1-mx-\frac{m(m-1)x^2}{2},$$

$$y=(1+x)^m(1-mx)-1,\qquad y=(1+\alpha x)^x-1-\alpha x\quad \alpha>0,\qquad y=(1+\alpha x)^x(1-\alpha x),$$

$$y=\frac{1+\alpha x}{1+\alpha x}\quad \alpha>0$$

9359. — On considère la série $u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$. Intervalle de convergence. Calculer sa somme à l'intérieur de l'intervalle de convergence. Même question avec $u_n = \frac{x^n}{n}$, $u_n = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

9360. — Développement en série de $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = e^x \cos x$.

9361. — Développement en série de $y = \operatorname{L}(1+x)$, calcul de L 2. — Montrer que l'on a $\operatorname{L}(1+x) < x$.

9362. — Développement en série de $\operatorname{L}\frac{1-x}{1+x}$; intervalle de convergence. Application au calcul de L 2.

9363. — Développement de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$; application au calcul de $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}$. — Limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au troisième terme.

9364. — Développement de $\sqrt{1-x}$; calculer $\sqrt{1+\frac{1}{3}}$.

9365. — Développer en série chacune des fonctions suivantes :

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{1}{2+3x}, \quad y = \frac{x}{x+3}, \quad y = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x}, \quad y = \frac{3x+2}{1+3x+2x^2},$$

$$y = \frac{1}{x^2+3x+2}, \quad y = \frac{1}{1-3x+2x^2}, \quad y = \frac{2-x}{1-x-2x^2}, \quad y = (1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{(2x+3)}{x+3}.$$

9366. — Comparer le développement de $\sqrt{1-x}$ et celui de $\dfrac{1-\frac{3}{4}x}{1+\frac{x}{4}}$.

9367. — Développement en série de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

9368. — Développement en série de $y = (1+\alpha x)\sqrt{1+x}$. Déterminer α de façon que le terme en x^2 disparaisse.

9369. — Développement en série de $\operatorname{L}(x+\sqrt{1+x^2})$.

9370. — Limite de $y = \operatorname{L}\cos x$, quand x tend vers 0 : ordre infinitésimal de y.

9371. — Partie principale de l'infiniment petit $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$, x étant l'infiniment petit principal.

9372. — Limite, pour $x = 0$, de $y = \dfrac{\cos x - \cos 2x}{e^x - 1}$, $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\cos x - \cos 2x}$, $y = \dfrac{2^x - 1}{\operatorname{L}(1+x)}$.

9373. — Limite de $\sqrt[n]{2}$ pour n infini.

9374. — Limite de $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1}$ pour n infini ; de $\left(\cos\dfrac{x}{n}\right)^{n}$ pour n infini ; de $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

9375. — Limite pour $x = 0$ de $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$,

$$\left(\frac{a\cos^2 x + b\sin^2 x}{a+b}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{a\cos x + b\cos 2x}{a+b}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \left(\frac{a\cos x + b\,4^x}{a+b}\right)^{\cot 2x}.$$

9376. — Racines carrées de $-i$.

9377. — Racines cubiques de i. Racines cubiques de l'unité.

9378. — Racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; somme des puissances trente-quatrièmes des racines.

9379. — Résoudre l'équation $x^n + 1 = 0$.

9380. — Racines quatrièmes de i, représentation géométrique. Racines quatrièmes de $1+i$, $1-i$.

9381. — Racines quatrièmes de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; représentation géométrique ; somme des racines.

9382. — Calculer $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

9383. — Résoudre les équations : $e^x = 1$, $e^x + e^{-x} = 0$; $e^x - e^{-x} = 4i$; $e^x - e^{-x} = 4i$.

9384. — Résoudre l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

9385. — Condition pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admette une racine double.

9386. — Relations entre les coefficients et les racines de l'équation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; les racines étant x', x'', x''', former l'équation qui donne x'^2, x''^2, x'''^2.

9387. — Somme des carrés et des cubes des racines de l'équation $x^3 + 4 = 0$.

9388. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$. Former l'équation aux carrés des racines.

9389. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 6x - 7 = 0$. équation aux carrés des racines ; équation aux différences des racines deux à deux.

9390. — Nombre des racines réelles de l'équation $2x^3 - x^2 - 7 = 0$, soient a, b, c les racines, trouver une relation entre a, b, c indépendante de x.

9391. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 4x - 3 = 0$: valeur approchée de la racine réelle.

9392. — Nombre des racines réelles de l'équation $t^3 - 2x - 2 = 0$.

9393. — Théorème de Descartes : application à l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

9394. — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$; calculer la plus petite racine positive par la méthode des parties proportionnelles.

9395. — Décomposer en éléments simples les fractions $\frac{t^3 - 1}{t^3 - 2t^2}$, $\frac{x^2}{1 + x^4}$, $\frac{1 + t}{t^3 - 2t^2}$, $\frac{1 + t}{t^3 + 4t^2 + 4t}$.

9396. — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^3 - 8}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + 8}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}, \quad \int \frac{dx}{x^4 + x - 2}, \quad \int \frac{dx}{2x^4 + x - 3},$$

$$\int \frac{dx}{3 + 4x^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{4 + x^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{t^2 + x - 1}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{1 + 2x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2)^3},$$

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 1)^3}, \quad \int \frac{P\,dx + Q\,dx}{2x^2 + 2x + 3)^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{4 + x^2)^2}, \quad \int \frac{x^3 dx}{(1 + x^2)^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^3}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(t^2 + 2)^2},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{3 + x^2)^2}, \quad \int \frac{x^2 dx}{x^2 + x + 1)^2}, \quad \int \sqrt{4 + x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{1 - x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{1 - 2x^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x - 4x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int \sqrt{x^2 + 1}\,dx, \quad \int \sqrt{1 + 2x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \frac{\sin x \cos x\,dx}{\sqrt{1 + \sin^4 x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad \int \cos^2 x\,dx,$$

$$\int \sin^4 x\,dx, \quad \int \sin^6 z\,dz, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\,dt, \quad \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos 2x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x},$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{1 - \sin^2 x}, \quad \int \frac{\sin t \cos t\,dt}{1 + \sin^4 t}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{1 + \cos^4 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 \frac{x}{2} + b^2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2},$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{2 + \cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x + 3}, \quad \int \frac{dx}{1 + 2\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{2\cos^2 x - 1},$$

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x + 2\sin x}, \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{(3 - \cos x)^2}, \quad \int \frac{\sin x \cos x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x},$$

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1 + \cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{1 + e^x}, \quad \int e^x x^2\,dx, \quad \int L(1 + x)\,dx, \quad \int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx,$$

$$\int \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x \operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{dx}{1 + x^2}.$$

9397. — Aire de l'ellipse.

9398. — Evaluer l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote.

9399. — Aire de la boucle de la strophoïde $y = x\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$.

9400. — Construire la courbe $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Aire de la surface comprise entre la courbe et les axes de coordonnées. Centre de gravité de l'arc.

9401. — Aire limitée par la cycloïde $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, et l'axe Ox. Centre de gravité de l'aire. Volume engendré par l'aire en tournant autour de Ox.

9402. — Calculer l'aire limitée par la courbe $x^4 + y^4 - xy = 0$.

9403. — Aire limitée par la courbe $x = \cos t$, $y = \sin 2t$. Centre de gravité d'une boucle.

9404. — Aire de la cardioïde $\rho = 1 + \cos\omega$. Centre de gravité.

9405. — Aire de la lemniscate. Centre de gravité.

9406. — Longueur d'un arc de la parabole $y^2 = 2px$.

9407. — Longueur d'un arc de la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

9408. — Longueur de l'arc de la courbe $x = t^2 + t + 1$, $y = t^2$.

9409. — Calculer l'arc de la courbe $x = t^2$, $y = (t - 1)^2$.

9410. — Aire de la boucle formée par la courbe $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$. Peut-on rectifier cette courbe ? Aire de la surface engendrée par la courbe en tournant autour de Ox.

9411. — Longueur de la cycloïde.

9412. — Etudier la courbe $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Longueur de l'arc

9413. — Volume d'une pyramide.

9414. — Volume de la sphère.

9415. — Volume d'un ellipsoïde de révolution ; son aire.

9416. — Trouver le volume commun à deux cylindres de révolution de même rayon, dont les axes se rencontrent à angle droit.

9417. — Aire d'une surface de révolution. Application à l'aire de la sphère.

9418. — Moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à son axe ; d'une sphère par rapport à un diamètre.

9419. — Moment d'inertie d'un cône de révolution par rapport à son axe.

9420. — Moment d'inertie d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe.

9421. — Centre de gravité du volume d'une demi-sphère.

9422. — Centre de gravité de l'aire d'une demi-sphère.

9423. — Intégrer les équations suivantes :

$$(1+xy)y'+y=x, \qquad (1+x^2)y'-y=2-0, \qquad y'-\frac{y}{1-x^2}=1, \qquad y'-\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=1,$$

$$(1-x^2)y'+xy=x^2, \qquad y'\sin x-y\cos x=\cos^3 x, \qquad y'\cos x-2y\sin x=\cos^4 x, \qquad y'\sin x+3y\cos x=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=ar, \qquad \frac{r^3}{k^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

9424. — On considère l'équation $y^2=2px+qx^2$; calculer y'. Trouver les fonctions y de la variable x, qui vérifient l'équation $y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

9425. — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ connaissant $\sin a$. Somme des carrés des racines de l'équation $4x^3-3x+b=0$. Former une relation entre les deux racines x_1 et x_2 ; peut-on la trouver directement ?

9426. — Calculer $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ connaissant $\operatorname{tg} a$. Calculer $\operatorname{tg} 15°$.

9427. — Résoudre l'équation $a\cos x\cos x+b\sin x.\sin x=1$.

9428. — Rendre calculables par logarithmes les racines de l'équation $x^2+px+q=0$.

9429. — Résoudre un triangle connaissant deux côtés b, c et l'angle compris A. Peut-on calculer directement tg B ? Relation entre les cosinus des trois angles d'un triangle.

9430. — Résoudre un triangle connaissant les angles et le périmètre. Comment rendre calculable par logarithmes l'expression $\sin A+\sin B+\sin C$?

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2211. — On considère une parabole et un point M de cette parabole. Un angle droit dont le sommet est en M pivote autour de ce point et ses deux côtés rencontrent la parabole en deux points variables, B et C.

1° Démontrer que la droite BC passe par un point fixe P et trouver le lieu de ce point, quand le point M parcourt la parabole donnée, ainsi que l'enveloppe de MP.

2° Le lieu du milieu de BC est une parabole. Trouver l'enveloppe de cette parabole quand le point M parcourt la parabole donnée, ainsi que les lieux de son sommet et de son foyer.

3° Le lieu du pôle de la droite BC est une droite. Enveloppe de cette droite, quand le point M varie de la façon indiquée.

R. Manen, à Albi.

2212. — D'un point M variable sur un cercle de centre O, on abaisse une perpendiculaire MP sur un diamètre fixe AB du cercle. Soit N le milieu de OM. Montrer que les lieux des centres de gravité, G et G', des deux triangles OMP et ONP sont deux ellipses.

Démontrer que la médiane issue de M est normale à l'ellipse lieu de G. Lieu du point de concours des normales à ces ellipses en G et G'.

R. Manen, à Albi.

Erratum. — Page 288, 2e ligne du n° 2189, lire

$$\sin x=\frac{\sin a\cos b\sqrt{1-k^2\sin^2 b}+\sin b\cos a\sqrt{1-k^2\sin^2 a}}{1-k^2\sin^2 a\sin^2 b}$$

Dernière ligne du n° 2189, au lieu de $b=34°11'20''$, lire $b=52°10'20''$.

SAINT-DIZIER — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Décembre 1913 N° 3.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

CORRESPONDANCE

Note sur la question 2029.

Permettez-moi de revenir sur cette question que j'ai proposée dans la « Revue », sous le n° 2029, et dont la solution a été publiée dans le numéro de février 1912. J'indique (voir page 117, loc. cit.) le moyen de construire le point de contact de la droite PQ avec son enveloppe.

Depuis que je vous ai fait parvenir cette question, j'ai eu connaissance d'autres articles sur le même sujet publiés dans le « Journal de Mathématiques » de de Longchamps; je crois utile, pour éviter des réclamations de priorité, de rappeler les résultats obtenus.

M. de Longchamps donne la construction suivante qu'il établit par voie analytique (J. M. S., année 1886, p. 200) :

« Soit MT la tangente à la courbe V en M, tangente qui coupe Ox en S. Abaissons de O sur PQ la perpendiculaire qui coupe MP en R, et joignons SR. La perpendiculaire abaissée de O sur TR coupe PQ au point de contact I de PQ avec son enveloppe. »

M. d'Ocagne (J. M. S., année 1886, p. 256) donne la construction que j'ai donnée dans la solution sus visée. Il indique en outre cette propriété intéressante qu'il établit par des considérations géométriques (J. M. E., 1885, p. 27) :

« Le point I divise PQ comme le point M divise le segment de la tangente correspondante à la courbe V compris entre OX et OY. »

E. RÉME, conducteur des Ponts et Chaussées, à Batna.

NOTE SUR LA PONCTUATION

par M. **J. Caron**.

Cône à génératrice verticale. — Considérons l'équation $x^2 + y^2 - mxz - h) = 0$, dans laquelle nous supposerons les quantités m, h positives, la direction des x positifs étant à droite. Cette équation représente un cône ayant pour sommet le point (s, s'), $x = 0$, $y = 0$, $z = h$, et pour directrice dans le plan horizontal $z = 0$ la circonférence $x^2 + y^2 + mhx = 0$ tangente au point s à l'axe des y et placée à gauche de Oy.

En général, le contour apparent horizontal en projection d'un cône s'obtient en menant par la projection horizontale du sommet des tangentes à la projection horizontale de la directrice. Dans le cas actuel, les deux tangentes que l'on obtient généralement se réduisent à une seule qui est l'axe des y, sy, puisque la projection horizontale du sommet se trouve sur la directrice. C'est donc là un contour apparent singulier qui demande à être examiné de plus près.

Une verticale quelconque ne rencontre la surface qu'en un seul point à distance finie, l'autre étant toujours à l'infini sur l'axe Oz. Si donc on représente le système formé par la surface opaque du cône

illimitée et par le plan horizontal opaque illimité, le dessin se composera simplement de la circonférence de base tout entière en trait plein et de la tangente sy tout entière également en trait plein.

Nous formons ainsi trois régions : 1° à l'intérieur de la base ; 2° à l'extérieur de la base et à gauche de sy ; 3° à droite de sy.

Considérons maintenant une génératrice quelconque joignant le sommet (s, s') à un point quelconque (a, a') de la base, puis prenons une verticale se déplaçant tout le long de cette génératrice.

1° La verticale m à l'intérieur de la base coupe le cône sur $(sa, s'a')$ en un point (m, m') dont la cote est positive puisqu'elle est comprise entre celle de (a, a') qui est nulle et celle du sommet (s, s'), h qui est positive. Cette même verticale coupe le plan de base en (μ, μ') dont la cote est nulle. Si donc le cône est réduit à sa surface, le point m est vu. Si maintenant le cône était solide, le point μ étant à l'intérieur de la base, la verticale m se trouverait dans le solide cône depuis (m, m') jusqu'à l'infini dans le bas en passant par le point (μ, μ') et par suite le point m est encore vu sur le solide cône.

2° La verticale n étant choisie à l'extérieur de la base et à gauche, elle coupe la surface du cône en un seul point (n, n') de cote négative et le plan horizontal en (ν, ν') de cote nulle et à l'extérieur de la base.

Donc la verticale n se trouve à l'intérieur du solide cône depuis (n, n') jusqu'à l'infini vers le bas. Que le cône soit solide ou surface, le point n est toujours vu si le plan horizontal est transparent ; mais il est ici caché, parce que nous avons supposé le plan horizontal opaque.

3° La verticale p est à droite du contour apparent, elle coupe la surface au point (p, p'), dont la cote est positive puisqu'elle est plus grande que celle du sommet. Elle coupe ensuite le plan horizontal au point (π, π') de cote nulle et à l'extérieur de la base. Donc cette fois la verticale p se trouve dans le solide cône depuis (p, p') jusqu'à l'infini au-dessus. Le cône étant réduit à sa surface, le point (p, p') sera vu ; mais si le cône est solide, il sera caché, le solide cône s'élevant dans cette région jusqu'à l'infini au-dessus du plan horizontal.

La verticale pouvait être choisie sur sy. En appliquant à cette verticale la construction générale, nous constatons que le plan auxiliaire mené par le sommet et cette verticale est tangent au cône suivant la verticale s. Les deux points d'intersection sont tous deux rejetés à l'infini. On doit donc dire que le contour apparent horizontal se compose du point s pour l'ensemble des points à distance finie et de la tangente sy qui correspond aux points à l'infini.

En résumé, le cône étant réduit à sa surface opaque illimitée, et le plan horizontal opaque, à l'intérieur de la base, on voit la surface convexe de la nappe inférieure. En dehors de la base et à gauche de sy, on voit le plan horizontal ; enfin, à droite de sy, on voit l'intérieur de la nappe supérieure.

Si le cône était solide, à gauche de sy, on verrait la même chose que précédemment, tandis qu'à droite l'observateur ne verrait rien du tout parce qu'il serait dans le solide.

Si l'on ne figurait que la nappe inférieure, solide ou surface, avec le plan horizontal opaque, le contour apparent sy serait toujours caché. Au contraire, en ne conservant que la nappe supérieure, solide ou surface, le contour apparent sy serait toujours vu.

La discussion précédente montre enfin que la partie solide de l'espace placée au-dessous du cône se compose, premièrement, à gauche de sy de toute la nappe inférieure, deuxièmement à droite d'un nouveau solide limité par le plan vertical sy et placé au-dessous de la nappe supérieure.

Appelons par exemple C' la nappe inférieure, C'' la nappe supérieure ; la surface C' limite deux objets C'_1 et C'_2 qui réunis constituent l'espace tout entier à gauche de sy. De même C'' limite les deux objets C''_1 C''_2 qui réunis constituent l'espace tout entier à droite de sy. Finalement le solide au-dessous du cône est la réunion de C'_1 avec C''_1.

Remarque. — Les deux objets C'_1, C''_1 n'ont aucune région commune, puisqu'ils sont séparés par le plan vertical sy ; ils n'ont qu'une génératrice de contact, et encore, seulement dans la moitié inférieure au-dessous de (s, s').

Hyperboloïde à génératrices verticales. — Considérons l'équation $x^2 + y^2 - mx(z - h) - a^2 = 0$ dans laquelle nous supposerons toujours m et h positifs, la direction des x positifs étant encore vers la droite. Cette équation représente un hyperboloïde à une nappe dont le cône étudié précédemment est précisément le cône asymptote. Le plan de profil $x = 0$ tangent au cône asymptote est aussi tangent à l'hyperboloïde à l'infini. Les deux génératrices contenues dans ce plan tangent sont les deux verticales $x = 0$, $y = \pm a$.

Le contour apparent horizontal se compose des deux points $x = 0$, $y = \pm a$, pour les points à distance finie, et de la droite tout entière $x = 0$, pour les points à l'infini, comme pour le cône asymptote.

Une verticale quelconque ne coupe la surface qu'en un seul point à distance finie, ce qui fait que cette surface prise isolément est vue tout entière en projection horizontale. Si cependant la verticale considérée était contenue dans le plan des yOz, ses deux points de rencontre avec la surface seraient tous deux à l'infini, c'est pourquoi nous disons que Oy est bien un contour apparent.

Lorsque l'hyperboloïde est solide, à gauche de Oy on voit l'extérieur de la surface, et à droite on ne voit rien parce que dans cette région le solide s'élève jusqu'à l'infini. De ce côté, on verrait l'intérieur de la surface si l'hyperboloïde était réduit à sa surface ou bien solide à l'extérieur.

On se rend compte immédiatement de ces résultats en figurant l'hyperbole principale

$$x^2 - mx(z - h) - a^2 = 0$$

dans le plan $y = 0$, puis en choisissant des verticales dans ce même plan, en n'oubliant pas que par définition le centre de l'hyperboloïde définit son intérieur.

Le solide au-dessous de l'hyperboloïde se compose ici encore de deux portions, la première à gauche de Oy à l'intérieur de l'hyperboloïde, la seconde à droite de Oy et extérieure à l'hyperboloïde, autrement dit, c'est la réunion des deux objets H'_i, H''_e.

Ces deux solides sont limités par une face plane dans le plan des yOz, dont le contour est formé par les deux génératrices verticales $x = 0$, $y = \pm a$, seulement la partie utile de cette face est la région comprise entre les génératrices pour le solide de gauche H'_i, tandis que c'est la région en dehors des génératrices pour le solide de droite H''_e.

Les deux solides ont donc en commun les deux génératrices verticales entières et qui forment deux arêtes communes.

Hyperboloïde à deux nappes. — Considérons l'équation $x^2 - y^2 - mx(z - h) + a^2 = 0$ qui représente l'hyperboloïde conjugué du précédent et dont le contour apparent horizontal se réduit à Oy ne correspondant qu'aux points à l'infini. La surface est vue tout entière en projection horizontale. A gauche de Oy on voit l'extérieur de la nappe inférieure, et à droite l'intérieur de la nappe supérieure. Lorsque l'hyperboloïde est solide, à gauche de Oy, on voit toujours l'extérieur de la nappe inférieure, mais à droite on ne voit plus rien, l'observateur étant dans le solide.

Enfin, la partie solide de l'espace placée au-dessous de l'hyperboloïde se compose encore de deux parties. La première à gauche de Oy qui est le solide contenu à l'intérieur de la nappe inférieure, la seconde à droite de Oy et extérieure à la nappe supérieure. Ce dernier solide est le seul limité par le plan vertical Oy, de sorte que les deux solides n'ont plus rien de commun, les génératrices contenues dans le plan Oy étant imaginaires. Le solide complet est toujours la réunion de H'_i et de H''_e.

Paraboloïde à génératrice verticale. — Soit le paraboloïde défini par l'équation $zx - ay = 0$. Il est engendré par une horizontale s'appuyant premièrement sur l'axe des z, deuxièmement sur la perpendiculaire au deuxième plan bissecteur menée par le point $x = a$, $y = 0$, $z = 0$. Le second plan directeur est donc le plan yOz. Son contour apparent horizontal se réduira au point O correspondant aux points à distance finie et à Oy pour les points à l'infini. La surface, n'étant coupée par une verticale qu'en un seul point à distance finie, sera vue tout entière en projection horizontale.

Figurons dans le plan des xy la circonférence $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2a^2$ et supposons que le point A $(z = 0,\ x = a,\ y = a)$ de cette circonférence soit à l'intérieur du paraboloïde solide.

Cette circonférence coupe la surface du paraboloïde sur l'axe Oy aux points m, n $(x = 0,\ z = 0,\ y = \pm a\sqrt{2})$. En ces deux points, un mobile se déplaçant sur la circonférence passera alternativement de l'intérieur à l'extérieur du paraboloïde. La portion de cette circonférence qui est à droite de Oy se trouve dans le paraboloïde, celle qui est à gauche de Oy se trouve en dehors.

Considérons alors la verticale A ; elle coupe le paraboloïde au point $B(x = y = z = a)$ de cote positive ; elle se trouve donc dans le solide paraboloïde depuis le point B jusqu'à l'infini au-dessous en passant par A, et par suite le point B est vu, donc toute la région du paraboloïde qui est à droite de Oy est vue également.

Si au contraire nous prenons la verticale $A'(x = -a,\ y = -a)$, elle coupe le paraboloïde au point $B'(x = -a,\ y = -a,\ z = a)$ et la circonférence au point $(z = 0,\ x = -a,\ y = -a)$, qui est en dehors du paraboloïde. Donc la verticale A' se trouve dans le solide paraboloïde depuis le point B' jusqu'à l'infini au-dessus, et par suite le point B' est caché, l'observateur étant dans le solide.

Remarque. — Il n'y a pas lieu de s'étonner qu'un observateur placé à l'infini puisse se trouver tantôt à l'intérieur d'un solide, tantôt à l'extérieur du même solide. Le fait est général pour un observateur dont on suppose l'œil sur la surface d'un solide à distance finie. Certains rayons visuels émanés de l'œil sont en dehors du solide, d'autres pénètrent dans le solide. Pour les premières directions l'œil peut voir quelque chose ; pour les autres, il ne voit rien.

En résumé, le paraboloïde étant solide en A, on voit toute la surface à droite de Oy, tandis qu'à gauche le solide s'élève jusqu'à l'infini au-dessus du plan horizontal. Ce serait l'inverse si le paraboloïde était vide en A.

On peut encore énoncer ce résultat en disant : si à droite de Oy on voit l'endroit du paraboloïde, à gauche, on en voit l'envers. Cela tient d'ailleurs à la variation de la normale à la surface tout le long de la génératrice horizontale OA. Ces normales sont deux à deux symétriques par rapport à la normale en O qui est horizontale, donc si l'on ne considère que les demi-normales à gauche de OA, les demi-normales dans la région OA sont au-dessus du plan horizontal $z = a$, tandis que dans la région OA', elles sont au-dessous.

Parlons maintenant de la partie solide de l'espace placée au-dessous du paraboloïde ; elle se composera comme dans les exemples précédents de deux solides distincts placés de part et d'autre de Oy. Ils sont limités tous deux au plan vertical Oy. Appelons P'_z le solide de droite, P''_z sera celui de gauche. Pour le premier P'_z la partie utile de la face Oy est toute la région en avant de l'axe des z, au contraire pour le second P''_z la partie utile de cette face est la région en arrière de Oz ; de telle sorte que Oz constitue une arête commune aux deux solides.

Paraboloïde à axe vertical. — Le contour apparent horizontal est maintenant rejeté à l'infini. La surface est vue toujours tout entière. Lorsque le paraboloïde est solide, sa surface est ou bien tout entière vue ou tout entière cachée. Dans ce cas unique, le solide au-dessous de la surface du paraboloïde est identique avec le paraboloïde solide lui-même, soit P_i, soit P_e.

Ces longs préliminaires étant établis, nous allons parler maintenant de la composition de l'Ecole polytechnique, 1912. Commençons par remarquer la phrase suivante de l'énoncé : « 1° Représenter par ses deux projections le solide compris dans la sphère circonscrite au tétraèdre, au-dessus du plan horizontal de l'arête CD et au-dessous des deux paraboloïdes. » Il me semble que cet énoncé n'est pas suffisamment explicite. Un point de l'espace peut en effet se trouver au-dessous du paraboloïde P et au-dessus du paraboloïde Q, ou bien au-dessus du paraboloïde P et au-dessous du paraboloïde Q, ou encore au-dessous des deux simultanément. On pourrait donc représenter le solide sphère au-dessous

de *l'un quelconque* des paraboloïdes ou bien au-dessous des deux *simultanément*. Nous nous en tiendrons à ce dernier objet qui semble se rapprocher le plus possible de l'énoncé.

Nous dirons tout de suite que l'épure qui a été faite dans cette revue, bien que très correcte au point de vue des constructions, ne répond pas comme ponctuation à l'énoncé ; en effet on a représenté la portion du solide commun à la sphère et aux deux paraboloïdes au-dessus du plan horizontal CD, en supposant le centre de la sphère à l'intérieur des deux paraboloïdes. Un simple regard jeté sur l'épure montre qu'on n'a pas tenu compte des plans des contours apparents des paraboloïdes, qui sont les plans de front *a*, *b*.

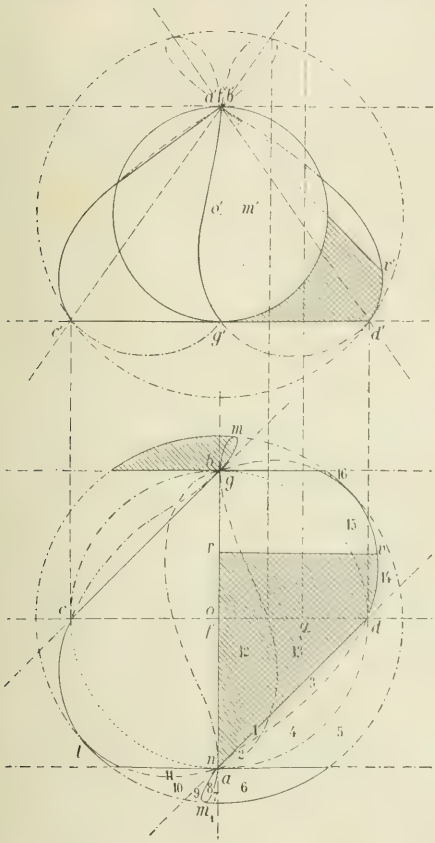


Fig. 4.

Les lignes à tracer, comme nous l'avons expliqué, sont : 1° l'intersection de S et du paraboloïde P ; 2° de S et de Q ; 3° de S et du cylindre vertical circonscrit à P qui est ici le plan de front *a* ; 4° de S et du plan de front *b* ; 5° de P et de Q ; 6° de H avec S, P, Q ; enfin tous les contours apparents (*fig.* 4).

Nous avons figuré aussi les sections des différentes surfaces par le plan de front *o*. Cette construction nous permet de reconnaître l'ordre des points sur la verticale μ, dans la région 13. Le point le plus élevé se trouve sur *a'c'* qui appartient au paraboloïde Q. Au-dessous nous trouvons le point le plus haut de la sphère s_1, ensuite on rencontre le paraboloïde P sur *b'd'*, après le plan horizontal *c'd'*, et enfin le point le plus bas de la sphère sur le contour apparent vertical ; l'ordre des points dans la région 13 est donc qs_1phs_2.

Passons maintenant de la région 13 dans la région voisine 12 ; pour cela nous traversons l'intersection du paraboloïde *q* avec la sphère dans sa zone supérieure, il se produira donc une inversion dans l'ordre des lettres *q* et s_1, ce qui donne pour la région 12 l'ordre s_1qphs_2. De même, passons de 13 à 15 en traversant l'intersection de S et de H, il se produira une inversion entre les deux lettres *h*, s_2, et nous aurons l'ordre qs_1ps_2h. De 15 à 16 on traverse la ligne SP ; S étant dans la région vue, on obtient donc l'ordre qps_1s_2h.

Supposons qu'on ait procédé de même pour les régions 3, 4, 5, où l'ordre est qs_1s_2hp. Passons alors de 5 à 6, après avoir traversé le contour apparent de P. Le point *p*, qui avait primitivement une cote très grande négative, a maintenant une cote très grande mais positive, ce qui donne l'ordre pqs_1s_2h, d'où l'on peut déduire l'ordre dans les régions avoisinantes.

Voici d'ailleurs le tableau complet pour une moitié de l'objet, le résultat étant le même pour l'autre moitié en changeant *p* en *q* et *q* en *p*, à cause de la symétrie de la figure par rapport à la verticale O.

1	s_1qhps_2	5	qs_1s_2hp	9	qs_1s_2ph	13	qs_1phs_2
2	s_1qhs_2p	6	pqs_1s_2h	10	qs_1s_2hp	14	qs_1s_2ph
3	qs_1hps_2	7	qps_1s_2h	11	s_1qs_2hp	15	qs_1ps_2h
4	qs_1hs_2p	8	qs_1ps_2h	12	s_1qphs_2	16	qps_1s_2h

Il faut maintenant conserver la partie solide de S au-dessous simultanément de P et de Q, et en même temps au-dessus de H.

Par exemple dans la région 13, qs_1phs_2, on conserve entre s_1 et s_2 ce qui est à droite des deux lettres p et q et à gauche de h, il reste donc ph. Donc, dans cette région on verra le paraboloïde p, le solide étant terminé au-dessous par le plan H.

De même, dans la région 16 qps_1s_2h, il faut conserver entre s_1 et s_2 ce qui est à droite de p et de q, mais à gauche de h ; il reste donc s_1s_2, et par suite dans cette région on voit la sphère, le solide étant limité au-dessous par la même sphère.

Le tableau suivant résume l'ordre final :

1	néant	5	néant	9	néant	13	ph
2	néant	6	s_1s_2	10	néant	14	néant
3	néant	7	s_1s_2	11	néant	15	ps_2
4	néant	8	ps_2	12	ph	16	s_1s_2

Le paraboloïde P est donc vu dans les régions 8, 12, 13, 15 et le paraboloïde Q dans les régions symétriques. Quant à la sphère, elle est vue dans les régions 6, 7, 16 ainsi que dans les régions symétriques.

Le tableau nous donne en même temps la ponctuation des différentes lignes qui ont été tracées. Par exemple, la ligne qui sépare les régions 13 (ph), 15 (ps_2) est l'intersection de h et de s_2 : elle est donc cachée. De même, la ligne qui sépare 15 (ps_2) de 16 (s_1s_2) est l'intersection de p et de s_1, elle est donc vue. Entre 12 (ph) et 13 (ph) nous traversons l'intersection de Q et de S ; elle n'existe plus. Entre 5 (néant) et 6 (s_1s_2), on traverse le contour apparent de P qui sera vu, et ainsi de suite.

L'ombre portée par (ab, $a'b'$) sur le paraboloïde P était exacte ; on doit tenir compte de plus de l'ombre propre de la sphère dans la région 16 et la symétrique de 6, ainsi que de l'ombre du paraboloïde Q dans la feuille bgm. Le contour de l'ombre propre de la sphère ne présente aucune partie utile. Il est facile de reconnaître qu'il est tangent aux lignes de front a et b. Soit a la longueur od, le côté du carré $abcd$ vaut $a\sqrt{2}$; c'est la plus courte distance entre deux arêtes opposées du tétraèdre. Donc $o'g'$ vaut $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

D'ailleurs le plan de l'ombre propre dans la sphère, en prenant pour origine le centre de la sphère, a pour équation $x + y + z = 0$ puisqu'il est perpendiculaire sur les rayons lumineux $x = y = z$. Ce plan est coupé par le plan de front a ($y = a$) suivant la droite $x + z = a$ dont la distance à l'origine est bien $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Je laisse au lecteur le soin de faire la ponctuation de la projection verticale, cette ponctuation ne présentant aucune difficulté, une fois que l'on connaît la ponctuation en projection horizontale ainsi que la description complète de l'objet.

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (*Concours de 1912.*)

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs)

2101. — 1° *Exprimer, au moyen d'une série ordonnée suivant les puissances entières croissantes de x, l'intégrale particulière y de l'équation différentielle*

$$y'' = xy,$$

telle que pour $x = 0$ on ait $y = 1$ et $y' = 0$.

2° *La série obtenue représente-t-elle cette intégrale particulière pour toute valeur de x ?*

3° *Indiquer une limite de l'erreur commise quand on s'arrête au terme en x^9 inclus, en supposant soit $x > 0$ soit $-2 < x < 0$.*

4° *Calculer, au moyen de cette série, arrêtée au terme en x^9 inclus, les valeurs numériques de y qui correspondent aux quatre valeurs suivantes de x :*

$$-2, \quad -1, \quad 1 \quad et \quad 2,$$

en fixant chaque fois une limite de l'erreur commise.

5° *Tracer correctement, entre $x = -2$ et $x = 2$, la courbe qui représente l'intégrale particulière considérée, en prenant 4 centimètres pour unité ; amorcer cette courbe au delà de $x = -2$.*

1. Soit la série

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

nous en tirons successivement

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 2.3a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots;$$

remplaçons, dans l'équation différentielle donnée, $y'' = xy$, y et y'' par ces valeurs, puis écrivons que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres sont égaux ; nous obtenons

$$1.2a_2 = 0, \qquad 2.3a_3 = a_0, \qquad 3.4a_4 = a_1, \qquad 4.5a_5 = a_2, \qquad \ldots$$
$$(n-1)na_n = a_{n-3}, \qquad \ldots$$

Par hypothèse, pour $x = 0$ on doit avoir $y = 1$ et $y' = 0$; on a donc $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, et les égalités précédentes nous montrent que lorsque n n'est pas divisible par 3, a_n est nul. Par suite, en conservant seulement les coefficients a_n dont l'indice n est divisible par 3, on obtient les égalités suivantes : $2.3a_3 = 1$, $5.6a_6 = a_3$, $8.9a_9 = a_6$, $\ldots$ $(3p-1)3pa_{3p} = a_{3p-3}$.

On en tire, en multipliant membre à membre,

$$2.3.5.6.8.9\ldots(3p-1)3pa_{3p} = 1, \qquad \text{ou} \qquad a_{3p} = \frac{1}{2.3.5.6.8.9\ldots(3p-1)3p}.$$

Il en résulte que la série cherchée est

$$1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12} + \cdots \frac{x^{3p}}{2.3.5.6\ldots(3p-1)3p} + \cdots$$

2. Le rapport du $(p+1)^{\text{ème}}$ terme au $p^{\text{ème}}$ est $\dfrac{x^3}{(3p-1)3p}$; quand p augmente indéfiniment, ce rapport a pour limite zéro. Donc la série est absolument convergente pour toute valeur de x, et la somme de cette série est une intégrale particulière de l'équation différentielle donnée pour toute valeur de x.

3. Soit $f(x)$ la somme de la série et $f_4(x)$ la somme des quatre premiers termes :

$$f_4(x) = 1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9};$$

nous nous proposons d'évaluer une limite supérieure de l'erreur $f(x) - f_4(x)$.

Supposons d'abord $x > 0$: la série est à termes positifs. Si $p \leqslant 4$, on a $\frac{u_{p+1}}{u_p} \leqslant \frac{x^3}{11.12}$;

on en conclut que
$$f(x) - f_4(x) < u_5 \frac{\frac{x^3}{11.12}}{1 - \frac{x^3}{11.12}},$$
ou
$$f(x) - f_4(x) < \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9(11.12 - x^3)},$$
en supposant bien entendu $x^3 < 11.12$.

Si x est négatif, la série est alternée. L'erreur est moindre en valeur absolue que le premier terme négligé et a le signe de ce terme. Or ce terme est positif ; donc l'erreur $f(x) - f_4(x)$ est encore positive et l'on a
$$f(x) - f_4(x) < \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12}.$$

4. Pour $x = -2$, nous avons
$$f_4(-2) = 1 - \frac{2^3}{2.3} + \frac{2^6}{2.3.5.6} - \frac{2^9}{2.3.5.6.8.9} = 1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{45} - \frac{16}{405} = -\frac{7}{405}$$
ou, en décimales,
$$f_4(-2) = -0{,}0172\ldots,$$
valeur approchée par défaut.

L'erreur commise est moindre que $\frac{2^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12}$ ou $\frac{32}{13365}$; ceci est moindre que 0,0024.

Par suite, la somme de la série est comprise entre $-0{,}0172$ et $-0{,}0148$; cette somme est $-0{,}01$ à $\frac{1}{100}$ près.

Pour $x = -1$,
$$f_4(-1) = 1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.5.6} - \frac{1}{2.3.5.6.8.9} = \frac{10871}{12960} = 0{,}838811\ldots$$

L'erreur est moindre que $\frac{1}{2.3.5.6.8.9.11.12}$ ou que $\frac{1}{10^6}$; la somme de la série est comprise entre 0,838811 et 0,838812.

Pour $x = +1$,
$$f_4(1) = \frac{15193}{12960} = 1{,}1722993\ldots$$

L'erreur est moindre que $\frac{1}{2.3.5.6.8.9(11.12 - 1)}$ ou que $\frac{6}{10^7}$. La somme de la série est comprise entre 1,1722993 et 1,1722999. Enfin pour $x = +2$,
$$f_4(2) = \frac{221}{81} = 2{,}7283\ldots$$

L'erreur est moindre que $\frac{2^{12}}{2.3.5.6.8.9(11.12 - 2^3)}$ ou que 0,0026.

La somme de la série est comprise entre 2,7283 et 2,7309.

5. Nous connaissons cinq points de la courbe considérée :

A($x = -2$, $y = -0{,}01$), B($x = -1$, $y = 0{,}83881$), C($x = 0$, $y = 1$),
D($x = 1$, $y = 1{,}1722999$), E($x = -2$, $y = 2{,}72$).

On joindra ces points par un trait continu. On peut remarquer que pour $x = 0$, y' et y'' sont nuls ; donc, au point C la courbe présente une inflexion, la tangente étant parallèle à Ox.

Pour amorcer la courbe au delà du point $x = -2$, on peut calculer les premiers termes du

développement de y' :

$$y' = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{30} + \frac{x^8}{1440} + \cdots$$

et on reconnait que pour $x = -2$, y' a une valeur voisine de 1,1. La tangente au point A est sensiblement parallèle à la première bissectrice.

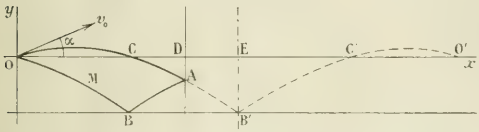
H. FROBERT, à Paris.

Bonne solution par M. G. Lach, à Douai.

2102. — *Déterminer à un centième près l'intensité minimum v_0 et la pente m correspondante que doit avoir la vitesse d'une balle élastique pour que, lancée du point O et rebondissant successivement en A sur une paroi verticale et en B sur une paroi horizontale, elle revienne exactement à son point de départ, dont les distances à ces parois sont respectivement $a = 3^m$, $b = 1^m$.*

On négligera le diamètre de la balle et le frottement.

Si la paroi verticale n'existait pas, la balle décrirait la parabole OA jusqu'au point B′ où cette courbe rencontre la paroi horizontale ; puis elle rebondirait en décrivant la parabole B′C′O′ symétrique de B′ACO par rapport à la verticale B′E.



Comme la paroi verticale AD existe, la balle décrira les arcs de parabole AB, BM qui sont respectivement symétriques par rapport à AD des arcs AB′ et B′C′O′. Pour que l'arc BM passe par le point O, il suffit que le point C′ soit symétrique de O par rapport au point D et pour cela que l'on ait $OC' = 6$.

On doit donc avoir $$OO' = 6 + O'C' = 6 + OC,$$

ou (1) $$2OE = 6 + OC.$$

Cela posé, prenons pour axes l'horizontale Ox et la verticale Oy, et désignons par v_0 la vitesse initiale et par α l'angle de cette vitesse avec Ox. L'équation de la parabole OCAB′ est

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

ou, en remplaçant $\operatorname{tg} \alpha$ par m,

$$y = mx - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + m^2).$$

Cette courbe rencontre la paroi horizontale, $y = -1$, au point B′ dont l'abscisse x_1 vérifie l'équation

(2) $$-1 = mx_1 - \frac{gx_1^2}{2v_0^2}(1 + m^2).$$

D'autre part, la portée OC est égale à $\dfrac{2v_0^2 m}{g(1 + m^2)}$, et la relation (1) nous donne

$$2x_1 = 6 + \frac{2v_0^2 m}{g(1 + m^2)}, \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{3gm^2 + v_0^2 m + 3g}{g(1 + m^2)}.$$

Remplaçons x_1 par cette valeur dans la relation (2), nous obtenons une équation entre m et v_0, qui s'écrit, ordonnée par rapport à m,

(3) $$9g^2 m^4 - m^3(v_0^4 + 2v_0^2 g - 18g^2) - 2v_0^2 g + 9g^2 = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée par des valeurs réelles de m, il faut qu'on ait

$$(v_0^4 + 2v_0^2 g - 18g^2)^2 + 36g^2(2v_0^2 g - 9g^2) > 0, \quad \text{ou} \quad v_0^4(v_0^2 - 4g)(v_0^2 + 8g) > 0.$$

On doit donc avoir $v_0^2 > 4g$, ce qui montre que le minimum de v_0 est $2\sqrt{g}$. Si l'on remplace v_0 par cette valeur dans l'équation (3), celle-ci se réduit à $(3m^2 - 1)^2 = 0$; la seule racine acceptable est $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

A. BOUSSEAU, à Fournes-en-Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2105. *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et une droite* AB *qui rencontre* Ox *en* A *et* Oy *en* B.

1° *Connaissant l'équation ponctuelle de la courbe* (C) *décrite par le milieu* C *de* AB, *trouver l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite* AB.

2° *Examiner les cas où la courbe* (C) *est une droite, un cercle, une kreuzcurve d'axes* Ox, Oy.

3° *Lorsque la courbe* (C) *est une droite, l'enveloppe de* AB *est une parabole. Trouver, lorsque la droite* (C) *varie en passant par un point fixe, le lieu du foyer, du sommet de cette parabole, ainsi que l'enveloppe de son axe et de sa tangente au sommet.*

1. Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la courbe donnée. Nous prendrons pour droite AB la droite courante du plan

$$ux + vy + wz = 0;$$

les coordonnées des points de rencontre avec les axes, les coordonnées cartésiennes des points A et B, sont

$$x = -\frac{w}{u}, \qquad y = 0,$$

et

$$x = 0 \qquad y = -\frac{w}{v}$$

Par conséquent, le milieu de AB a pour coordonnées

$$-\frac{w}{2u} \qquad \text{et} \qquad -\frac{w}{2v}.$$

Ses coordonnées homogènes sont donc

$$\frac{1}{u}, \qquad \frac{1}{v}, \qquad -\frac{2}{w},$$

et, en exprimant que ce point est sur la courbe donnée, nous obtenons l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB :

$$f\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{2}{w}\right) = 0.$$

Cette équation, rendue entière, s'écrit

$$f(vw, wu, -2uv) = 0.$$

Elle est de degré $2m$, donc l'enveloppe de la droite AB est une courbe de classe $2m$. Il est visible d'ailleurs que cette équation admet m fois chacune des solutions

$$u = 0, \qquad v = 0,$$
$$u = 0, \qquad w = 0,$$
$$v = 0, \qquad w = 0,$$

Par conséquent, la droite de l'infini, l'axe des y et l'axe des x sont des tangentes multiples d'ordre m.

Il est facile d'expliquer *a priori* tous ces résultats. Considérons, en effet, un point A quelconque de l'axe des x : si nous menons une droite quelconque par le point A, le lieu du milieu de AB sera une parallèle à l'axe des y : c'est l'homothétique de l'axe des y par rapport au point A dans le rapport

$\frac{1}{2}$; cette droite coupe la courbe donnée en m points, il y a donc m droites AB et par suite m points B qui correspondent au point A. Nous démontrerions de même qu'il y a m points A qui correspondent au point B. La correspondance entre les deux séries A, B est une correspondance (m, m). Prenons alors un point P quelconque du plan, joignons-le aux points A et B, nous aurons deux faisceaux superposés PA et PB, qui sont en correspondance (m, m); donc il y a $2m$ rayons doubles, c'est-à-dire $2m$ droites AB qui passent au point P. Quand le point A s'éloigne à l'infini, le lieu des milieux de AB s'éloigne à l'infini aussi et les m points B correspondants sont à l'infini sur Oy; la droite de l'infini est donc une tangente multiple d'ordre m. Pour voir que Ox est tangente multiple d'ordre m, il suffit de montrer que, quand le point B vient en O, il y a m points A qui lui correspondent, de sorte qu'il y ait m droites AB placées sur Ox. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_m$ les points de rencontre de la courbe avec Ox, les m symétriques du point O par rapport à ces points I sont les m points demandés.

2. Si la courbe (C) est une droite, les deux séries A et B sont homographiques et l'enveloppe de la droite AB est une conique tangente aux deux axes et à la droite de l'infini; c'est une parabole. D'ailleurs si l'équation de la droite est

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe est

$$\frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - \frac{2\gamma}{w} = 0,$$

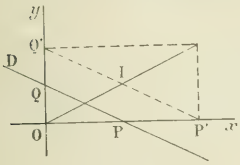
ou

$$\alpha vw + \beta uw - 2\gamma uv = 0.$$

C'est bien l'équation tangentielle d'une parabole.

On pourrait étudier les divers cas qui correspondent aux diverses droites du plan; cela est facile et peu intéressant; nous allons étudier cette parabole dans le cas général, pour une droite quelconque.

Je remarque d'abord qu'elle est tangente à la droite donnée; en effet, si je fais $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$, l'équation est identiquement vérifiée. Elle sera donc parfaitement définie si je donne ses points de contact avec les axes; or le point de contact est le point de rencontre de deux tangentes confondues; il suffit donc de chercher où vient le point A quand le point B vient en O; or nous avons vu que c'est le symétrique du point O par rapport à P; la droite P'Q' parallèle à PQ et homothétique par rapport à D dans le rapport 2, est donc la corde des contacts; si je joins le point O au milieu de P'Q', OI est la direction de l'axe. Or les coordonnées du point I sont



$$-\frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{et} \quad -\frac{\gamma}{\beta};$$

par conséquent, la direction de l'axe a pour paramètres $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$; c'est la droite

$$\alpha x = \beta y.$$

D'ailleurs tous ces résultats sont évidents sur l'équation tangentielle; il suffit, pour le voir, de chercher les pôles des axes et de la droite de l'infini.

Supposons maintenant que la courbe (C) soit un cercle

$$x^2 + y^2 - 2axz - 2byz + cz^2 = 0.$$

Alors, il suffit d'appliquer les raisonnements antérieurs pour apercevoir de suite que l'enveloppe est de quatrième classe, doublement tangente aux axes et à la droite de l'infini; d'ailleurs l'équation tangentielle est

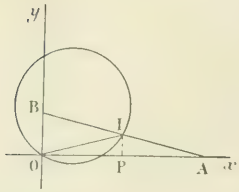
$$w^2(u^2 + v^2) + 4uvw(av + bu) + 4cu^2v^2 = 0.$$

Cette équation montre que la droite de l'infini est doublement tangente à cette courbe aux points cycliques. Quant aux points de contact avec les axes, on les trouverait aisément par les considérations antérieures.

Supposons maintenant que le cercle passe à l'origine ; alors c est nul. L'équation tangentielle se décompose en

$$w = 0 \qquad \text{et} \qquad w(u^2 + v^2) + 4uv(av + bu) = 0.$$

La première représente l'origine et la deuxième représente une hypocycloïde à trois rebroussements. L'origine tient à ce que les deux séries A et B ont un point commun ; le point O se correspond à lui-même ; toutes les droites passant en O font partie de l'enveloppe ; par conséquent, l'enveloppe doit se décomposer en ce point et une courbe de troisième classe.



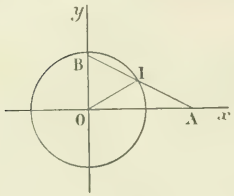
Pour montrer que cette courbe est une hypocycloïde à trois rebroussements, il suffit de remarquer que $OI = IA = IB$.

Par conséquent, la droite IA s'obtient en menant par le point O une droite OI et par le point I, où elle coupe le cercle, une droite IA qui soit avec OI également inclinée sur une direction fixe ; le triangle OIA est isocèle. Cette propriété est caractéristique de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Supposons enfin que le cercle ait son centre à l'origine ; l'équation devient

$$w^2(u^2 + v^2) - 4R^2u^2v^2 = 0 ;$$

elle représente une hypocycloïde à quatre rebroussements, enveloppe d'une droite de longueur constante 2R dont les extrémités glissent sur les axes.



Nous allons encore démontrer ceci géométriquement ; la figure ci-contre nous montre immédiatement que

$$OI = IA = IB ;$$

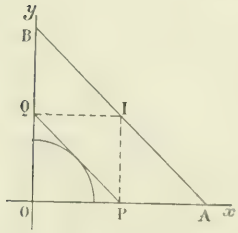
par conséquent, $AB = 2OI = 2R$.

Examinons maintenant le cas où la courbe donnée est une kreuzcurve relative au cercle de rayon a ; c'est la courbe d'équation

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2z^2}.$$

Alors, l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite AB est

$$u^2 + v^2 = \frac{w^2}{4a^2}.$$



Nous reconnaissons l'équation tangentielle d'un cercle de rayon $2a$ ayant son centre à l'origine.

Pour apercevoir ce fait, je construis le cercle de rayon a qui a son centre au point O et je lui mène une tangente PQ ; le point de la kreuzcurve est le point I, quatrième sommet du rectangle construit avec OP et OQ ; la droite AB est une droite qui a pour milieu le point I et qui s'appuie sur les deux axes ; donc c'est une parallèle à PQ. Elle enveloppe donc un cercle concentrique au premier et de rayon $2a$.

3. Nous allons revenir maintenant au cas où la courbe (C) est une droite D, où l'enveloppe de la droite AB est une parabole, et nous allons commencer par chercher tous les éléments de cette parabole. Son équation tangentielle est

$$\alpha vw + \beta wu - 2\gamma uv = 0.$$

Nous avons le point à l'infini en cherchant le pôle de la droite de l'infini, $f'_w = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha v + \beta u = 0.$$

Ce point a pour coordonnées $(\beta, \alpha, 0)$; la direction de l'axe est

$$\frac{x}{\beta} = \frac{y}{\alpha}.$$

La tangente au sommet est la direction perpendiculaire ; elle a pour équation

$$\beta x + \alpha y + p = 0.$$

En écrivant qu'elle vérifie l'équation tangentielle, on obtient

$$p(\alpha^2 + \beta^2) = 2\alpha\beta\gamma.$$

L'équation de la tangente au sommet est donc

$$\beta x + \alpha y + \frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Nous aurons le sommet en prenant le pôle de cette droite par rapport à la parabole, c'est-à-dire en calculant les trois quantités

$$f'_u,\ f'_v,\ f'_w.$$

Nous avons ainsi successivement :

$$x = f'_u = \beta w - 2\gamma v = \frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha\gamma = -\frac{2\gamma\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y = f'_v = \alpha w - 2\gamma u = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} - 2\beta\gamma = -\frac{2\gamma\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$z = f'_w = \alpha v + \beta u = \alpha^2 + \beta^2.$$

Les coordonnées ponctuelles du sommet sont alors

$$x_s = -\frac{2\gamma\alpha^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \qquad y_s = -\frac{2\gamma\beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Maintenant que nous avons le sommet, rien n'est plus facile que d'avoir l'axe : il a pour direction

$$\alpha x - \beta y = 0.$$

Par conséquent, son équation est

$$\alpha(x - x_s) - \beta(y - y_s) = 0, \qquad \alpha x - \beta y = \alpha x_s - \beta y_s,$$

$$\alpha x - \beta y = 2\gamma\frac{\beta^4 - \alpha^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha x - \beta y + 2\gamma\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

Restent à trouver les coordonnées du foyer ; pour cela, nous appliquerons la méthode courante : nous exprimerons que la droite $\qquad Y - y = i(X - x)$
est tangente à la parabole, et nous annulerons, dans la condition trouvée, le coefficient de i et le terme indépendant de i.

Nous avons ainsi $\qquad (y - ix)(\beta i - \alpha) + 2\gamma i = 0.$

Annulons le terme indépendant de i : $\qquad \beta x - \alpha y = 0,$
puis le terme en i : $\qquad \alpha x + \beta y + 2\gamma = 0.$

La première équation représente la perpendiculaire à la droite donnée abaissée du point O ; la deuxième équation représente la parallèle à cette droite, homothétique par rapport au point O, et dans le rapport 2 ; c'est la corde des contacts de la parabole avec les axes et nous retrouvons la propriété connue que le foyer est la projection du point O sur cette corde.

Les coordonnées du foyer sont

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = -\frac{2\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad x = -\frac{2\alpha\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad y = -\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Supposons maintenant que la droite donnée passe par un point fixe (x_0, y_0) ; nous aurons la relation

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0,$$

qui donne $\qquad \gamma = -\alpha x_0 - \beta y_0 ;$
en portant cette valeur de γ dans les éléments que l'on vient de calculer, on trouve des expressions toutes homogènes en α et β ; il n'entre plus dans ces équations qu'un seul paramètre,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lambda,$$

et nous avons alors, pour équations de la tangente au sommet et de l'axe,

$$x - \lambda y - \frac{2\lambda(y_0 + \lambda x_0)}{1 + \lambda^2} = 0, \qquad \lambda x - y - 2\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}(y_0 + \lambda x_0) = 0.$$

Ce sont là les formes de la tangente à une hypocycloïde à trois rebroussements ; par conséquent, chacune d'elles enveloppe une telle courbe, et il serait facile, au surplus, de le vérifier en cherchant les équations tangentielles.

Voyons maintenant le lieu du foyer ; les coordonnées du foyer sont

$$x = \frac{2\lambda(y_0 + \lambda x_0)}{1 + \lambda^2}, \qquad y = \frac{2(y_0 + \lambda x_0)}{1 + \lambda^2}.$$

Ce sont les équations paramétriques d'un cercle dont on obtient immédiatement l'équation cartésienne en remplaçant λ par $\frac{x}{y}$ dans l'une d'elles ; on trouve ainsi

$$x^2 + y^2 - 2x x_0 - 2y y_0 = 0 ;$$

c'est le cercle ayant pour centre le point donné et qui passe au point O. Ceci était évident *a priori*. Revenons en effet à une figure antérieure ; nous voyons que, la droite PQ passant par un point fixe A, la droite P'Q' passe aussi par un point fixe A' qui est, par rapport au point O, l'homothétique de A dans le rapport 2. Mais le foyer F est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur P'Q' ; donc le lieu de ce point est le cercle décrit sur OA' comme diamètre.

Passons enfin au lieu du sommet ; les équations paramétriques de ce lieu sont

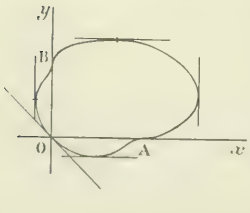
$$x = \frac{2\lambda^2(y_0 + \lambda x_0)}{(1 + \lambda^2)^2}, \qquad y = \frac{2(y_0 + \lambda x_0)}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Ce lieu est une courbe fermée du quatrième degré, que nous allons construire dans l'hypothèse où le point donné est situé dans le premier angle des axes et où l'on a, par exemple, $\frac{y_0}{x_0} = m < 1$.

Les équations paramétriques s'écrivent

$$x = x_0 \frac{2\lambda(m + \lambda)}{(1 + \lambda^2)^2}, \qquad \text{et} \qquad y = x_0 \frac{2(m + \lambda)}{(1 + \lambda^2)^2}$$

Les valeurs particulières de λ sont peu nombreuses ; ce sont $-\infty$, $-m$, 0, $+\infty$. Pour $\lambda = -\infty$, x est égal à $2x_0$, y est nul et négatif, car sa partie principale est $\frac{2x_0}{\lambda}$; si je prends $OA = 2x_0$, la courbe part de A et passe au-dessous de l'axe des x ; mais une remarque très simple me montre que Ox est une tangente d'inflexion ; si je fais $y = 0$, l'équation a une racine triple infinie ; la courbe coupe Ox en trois points confondus. Pour $\lambda = -m$, la courbe vient passer au point O ; $\frac{y}{x} = -\frac{1}{m^3}$, la tangente est une direction du second quadrant. Pour $\lambda = 0$, x s'annule et y devient $2y_0$; la courbe passe au point B tel que $OB = 2y_0$; la tangente est d'inflexion aussi, car, si je fais $x = 0$, j'ai trois racines nulles. Puis x et y deviennent positifs et pour x infini, la courbe revient au point A.



Pour vérifier la forme indiquée, il faut prendre les dérivées par rapport à y et à x, constater que chacune d'elles s'annule deux fois, pour une valeur négative et pour une valeur positive de λ ; il faut vérifier en outre que ces racines s'entrecroisent et alors la forme indiquée sera certaine.

Or les dérivées de x et de y sont

$$x' = 2x_0 \frac{m\lambda^2 + 4\lambda + 3m}{(1 + \lambda^2)^3}, \qquad y' = 2x_0 \frac{-3\lambda^2 - 4\lambda m + 1}{(1 + \lambda^2)^3}.$$

Nous voyons de suite que chacune d'elles a une racine positive et une racine négative, que la

racine négative de y' est comprise entre $-\infty$ et $-m$, celle de x' entre $-m$ et 0. Il reste à vérifier que la racine positive de x' est plus grande que celle de y', c'est-à-dire que pour la racine positive de y', x' est positif. Or $y' = 0$ nous donne

$$\lambda^2 = \frac{1 - 4m\lambda}{3},$$

et, en portant cette valeur dans x', nous avons le signe de $4\lambda m^2 + 12\lambda + 8m$, qui est positif pour λ positif. Les autres vérifications se font facilement.

Bonnes solutions : MM. Roi ; E. Rème, à Batna.
Assez bonnes solutions : MM. G. Bertier, à Poitiers ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; G. Lach, à Douai ; L. Simon, à Fourmies ; L. Naucelle, à La Châtre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE 1913

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

9427. — Déterminer une courbe telle que l'aire limitée par la courbe, l'axe polaire et un rayon vecteur quelconque soit proportionnelle au produit du rayon vecteur par la sous-normale polaire.

9428. — Déterminer une courbe telle que la somme de la sous-tangente et de la sous-normale polaires soit constante.

9429. — Déterminer une courbe telle que l'on ait $p = \frac{a^2}{r - a}$, r rayon vecteur, p distance du pôle à la tangente.

9430. — La normale en un point M d'une courbe rencontre les axes Ox, Oy aux points P et Q. Déterminer la courbe de façon que la longueur PQ soit constante.

9431. — Déterminer une courbe telle que le carré du rayon de courbure soit proportionnel à l'arc, $\rho^2 = 2as$.

9432. — Soient M un point d'une courbe C, ω le centre de courbure en M, ω' le centre de courbure au point ω de la développée de C. Déterminer la courbe C de façon que l'angle $\omega M \omega'$ soit constant.

9433. — Trouver une courbe telle qu'en chaque point on ait $\rho^2 + s^2 = a^2$, ρ étant le rayon de courbure et s l'arc compté à partir d'une origine fixe.

9434. — On donne deux axes rectangulaires, et une courbe rencontrant Oy au point A. Soit M un point de la courbe, MP l'ordonnée de ce point. Déterminer la courbe de façon que le centre de gravité de l'aire du trapèze mixtiligne OAMP ait une abscisse proportionnelle à l'abscisse du point M.

9435. — Trouver les courbes dont la tangente polaire est constante.

9436. — Déterminer une courbe telle que le triangle ayant pour sommets un point fixe O, un point M de la courbe et la projection du point O sur la tangente en M ait une aire constante.

9437. — Déterminer une courbe telle que la longueur de la normale limitée au pied et à Ox soit égale à $\frac{2x}{3}$, x étant l'abscisse du pied. Construire les courbes obtenues. En quoi diffèrent-elles les unes des autres ?

9438. — On donne une parabole et une courbe (C). La tangente en un point M de cette courbe rencontre la parabole en deux points A et B ; soit M' le conjugué harmonique de M par rapport à A et B. Déterminer la courbe (C) de telle manière que le point M' décrive un diamètre de la parabole.

9439. — Trouver les courbes telles que l'ordonnée à l'origine de la tangente en un point quelconque (x, y) soit donnée par l'expression $\frac{Kx^3}{y^2}$. Construire les courbes obtenues.

9440. — Déterminer une courbe telle que l'aire comprise entre l'ordonnée d'un point quelconque M, la tangente en ce point et les axes de coordonnées soit constante.

9441. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure ρ et l'angle α de la tangente avec Ox soient liés par la relation $\rho = a \sin \alpha$.

9442. — Trouver une courbe telle que le rayon de courbure soit divisé en deux parties égales par l'axe des y.

9443. — Soit T le point de rencontre avec Ox de la tangente en un point M d'une courbe. Déterminer la courbe de façon que le rapport $\frac{MT}{OT}$ soit constant.

9444. — Déterminer une courbe telle que la tangente et la normale en un point quelconque déterminent sur Ox un vecteur dont la valeur algébrique soit constante.

9445. — Sur la tangente et la normale en un point M d'une courbe on abaisse de l'origine les perpendiculaires OQ et OP. La droite PQ rencontre Ox au point I. Déterminer la courbe de façon que le rapport $\frac{\overline{QI}}{\overline{IP}}$ soit égal à 2.

9446. — Enveloppe des cercles ayant pour diamètres les cordes focales d'une parabole.

9447. — Étudier les variations de l'aire du parallélogramme qui a pour sommets les centres de courbure aux extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

9448. — Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante tangentes à deux droites fixes. Cas où les deux droites sont perpendiculaires.

9449. — Déterminer un point d'une ellipse tel que le segment intercepté par l'ellipse sur la normale en ce point ait une longueur donnée.

9450. — Des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole se réfléchissent sur cette courbe. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.

9451. — Soit une parabole de sommet O, et soit M un point variable de la courbe. Lieu du point de rencontre de la parallèle à l'axe menée par le point M et de la perpendiculaire à OM menée par O.

9452. — Soient O le sommet d'une parabole et M un point variable de la courbe. Le cercle de diamètre OM rencontre la parabole en deux autres points A et B. Trouver l'enveloppe de la droite AB.

9453. — Calculer la longueur de la développée de l'ellipse.

9454. — On donne une conique et une droite D. Sur cette droite on prend deux points M et M′ conjugués par rapport à la conique. On demande s'il existe un point du plan d'où l'on voit les segments MM′ sous un angle droit.

9455. — On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le foyer de la parabole. Trouver l'enveloppe des polaires des points du cercle par rapport à la parabole.

9456. — D'un point $P(\alpha, \beta)$ on mène les normales à une parabole $y^2 - 2px = 0$; soient y_1, y_2, y_3 les ordonnées des pieds de ces normales ; calculer $\Sigma \frac{y_1}{y_2}$.

9457. — Par un point $P(x_0, y_0)$ on mène des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ces parallèles rencontrent la courbe en M et N. Former l'équation de la droite MN.

9458. — Lieu des foyers des ellipses passant par deux points A, B telles que AB soit l'un des diamètres conjugués égaux.

9459. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$. Former l'équation de la corde de longueur $2kp$ et ayant pour pente m. En déduire le lieu des points d'où l'on peut mener deux cordes rectangulaires de longueur $2kp$.

9460. — Déterminer les directrices de la conique $y^2 = 2px + qx^2$.

9461. — Trouver le foyer de la conique $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 0$.

9462. — Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à des coniques homofocales. Cas où le point est sur un axe.

9463. — Soient M et M′ deux points d'une ellipse symétriques par rapport à l'un des axes. Par le point M′ on mène une droite D perpendiculaire à la tangente au point M. Trouver l'enveloppe de D quand M décrit l'ellipse.

9464. — Lieu des centres des coniques passant par les trois sommets d'un triangle et par le point de concours des hauteurs.

9465. — Trouver l'enveloppe des droites formant avec deux droites données un triangle d'aire constante.

9466. — On donne une ellipse $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. On pose $t = e^{i\varphi}$. Quelle relation doit-il exister entre les t de quatre points pour que ces points soient sur un cercle.

9467. — On considère la parabole $y^2 - 4ax = 0$, et on demande le lieu des centres des cercles touchant cette parabole et passant par le foyer.

9468. — On donne une conique, un point fixe A sur cette conique et un cercle variable tangent en A à la conique. Trouver le lieu des points de rencontre des tangentes communes à la conique et au cercle.

9469. — On donne une parabole et deux points M et M′ de cette courbe symétriques par rapport à l'axe ; par ces points on mène des parallèles qui rencontrent la parabole en A et A′. Trouver l'enveloppe de AA′ quand la direction des parallèles varie.

9470. — Lieu des pôles des normales à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

9471. — Par un point fixe A d'une parabole on mène deux droites variables symétriques par rapport à la normale en A. Ces droites rencontrent la courbe en B et C. Trouver l'enveloppe de BC.

9472. — On considère les coniques $x^2 + \frac{4ak}{a^2 - k^2} xy - y^2 - 2ax - 2y = 0$. Trouver le diamètre conjugué de la tangente à l'origine. Enveloppe des axes non transverses.

9473. — Former l'équation de la parabole rencontrant une hyperbole équilatère en quatre points confondus en un point donné de l'hyperbole.

9474. — Lieu du milieu de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.

9475. — Former l'équation de la parabole en coordonnées polaires, en prenant le foyer pour pôle et l'axe comme axe polaire. Former l'équation du lieu de l'extrémité de la sous-normale polaire.

9476. — On donne une conique et un point M dans son plan ; par le point M on mène les tangentes MP, MQ à la conique, puis par les points M, P, Q, on fait passer un cercle qui rencontre la conique en deux autres points R et S. Montrer que les tangentes à la conique aux points R et S se coupent sur le cercle.

9477. — Une parabole de grandeur constante tourne autour de son foyer. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée.

9478. — On donne une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et les droites $x = \pm d$. Une tangente variable à l'ellipse ren-

contre les droites en A et B. Lieu du point de rencontre des tangentes menées à l'ellipse par les points A et B.

9479 — Par un point A fixe situé sur le grand axe d'une ellipse on mène une corde variable rencontrant l'ellipse en M et M'. Trouver l'enveloppe du cercle de diamètre MM'.

9480. — Trouver l'enveloppe des cordes de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ dont les milieux sont sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{4}=0$. Ne pourrait-on se servir de ce que l'ellipse est projection d'un cercle ?

9481. — On donne une ellipse et on demande de déterminer le rayon d'un cercle concentrique de façon que les deux courbes se coupent suivant l'angle maximum.

9482. — Trouver la surface de l'ellipse définie par les équations paramétriques $x=\frac{1+t}{1+2t+3t^2}$, $y=\frac{1-t^2}{1+2t+3t^2}$. Déterminer le centre de cette courbe.

9483. — Lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et qui passent par un point donné.

9484. — On considère une conique à centre et un point P. Du point P on mène une perpendiculaire à un diamètre quelconque, et on prend le point de rencontre de cette perpendiculaire et du diamètre conjugué. Lieu de ce point. Solution géométrique. En quels points le lieu coupe-t-il la conique ?

9485. — Construire une parabole connaissant la direction de l'axe, un point et le cercle osculateur en ce point. Combien a-t-on donné de conditions ? Former l'équation de cette parabole.

9486. — Condition pour que la droite $ux+vy+w=0$ soit tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. En déduire le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une ellipse. Solution géométrique. Même question pour l'hyperbole.

9487. — Déterminer les foyers de la conique $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$. Quelles sont les diverses méthodes que l'on peut employer ?

9488. — On donne une ellipse rapportée à ses axes et un point M de cette ellipse. Former l'équation de l'hyperbole équilatère ayant au point M un contact du troisième ordre avec l'ellipse. Lieu du centre de cette hyperbole quand le point M décrit l'ellipse.

9489. — Lieu des projections du centre d'une ellipse sur les tangentes. Même question pour l'hyperbole.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2213. — On considère dans un plan deux cercles, A et B, et deux droites, D et Δ ; on demande de déterminer un point S tel qu'en faisant tourner les deux cercles d'un angle donné α autour du point S, les deux cercles dans leurs nouvelles positions, A' et B', soient tangents, l'un, A', à la droite D, l'autre, B', à la droite Δ.

Lieu de S quand α varie. Donner une définition géométrique simple de ce lieu.

J. Mourret, élève de l'École normale supérieure.

2214. — La normale en M à une courbe C rencontre l'axe Ox en un point N, et sur la tangente en M on porte MP = MN. Déterminer la courbe C de façon que le lieu de P soit une droite donnée Δ. Examiner le cas où l'angle de Ox avec Δ est égal à 45°.

J. Mourret, élève de l'École normale supérieure.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2108. — *Déterminer et discuter les trajectoires orthogonales d'un système de trisectrices de Maclaurin*

$$x(x^2+y^2)=a(3x^2-y^2)$$

où a est le paramètre variable.

Dérivons par rapport à x l'équation donnée

$$x(x^2+y^2) = a(3x^2-y^2);$$

nous obtenons

$$3x^2+y^2+2xyy' = a(6x-2yy').$$

Éliminons a entre ces deux équations ; nous formons l'équation différentielle des trisectrices,

$$\frac{x(x^2+y^2)}{3x^2+y^2+2xyy'} = \frac{3x^2-y^2}{6x-2yy'},$$

d'où nous déduisons celle des trajectoires orthogonales en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$. Nous obtenons ainsi, après un calcul facile,

$$y(y^4+6x^2y^2-3x^4)+8x^3y = 0.$$

C'est une équation homogène qu'on intègre en posant $y = tx$; l'équation transformée est

$$\frac{dx}{x}+\frac{t^4+6t^2-3}{t(t^4+6t^2+5)}dt = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{x}+\frac{2tdt}{t^2+1}-\frac{3}{5}\frac{dt}{t}-\frac{1}{5}\frac{2tdt}{t^2+5} = 0.$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$\frac{x(t^2+1)}{t^{\frac{3}{5}}(t^2+5)^{\frac{1}{5}}} = a,$$

ou, en élevant à la cinquieme puissance et en remplaçant t par $\frac{y}{x}$,

$$(x^2+y^2)^5-a^5y^3(y^2+5x^2) = 0.$$

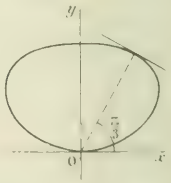
On voit ainsi que les trajectoires orthogonales sont des courbes du dixième degré, symétriques par rapport à Oy.

Pour les construire, on peut passer aux coordonnées polaires ; l'équation devient alors

$$\rho^5 = a^5\sin^3\omega(5-4\sin^2\omega).$$

On obtiendra toute la courbe en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et en prenant le symétrique de la branche obtenue par rapport à Oy. ρ varie dans le même sens que ρ^5 ; on a aisément les variations suivantes

ω	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\nearrow$	$a\sqrt[5]{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$	$\searrow$	a



ρ a un maximum pour $\omega = \frac{\pi}{3}$.

On peut remarquer que l'ordonnée $y = \rho\sin\omega$ va toujours en croissant quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

C. S., à Château-Thierry.

Bonnes solutions de MM. Gaston Beiter, 20e d'artillerie, à Poitiers ; G. Lach, à Douai ; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

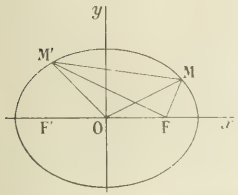
2104. — *Soit* MM′ *une droite joignant les extrémités de deux demi-diamètres conjugués* M, M′ *d'une ellipse et* F *l'un des foyers de l'ellipse. Trouver et construire les courbes :*

1° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* FMM′;

2° *Lieu de l'orthocentre du même triangle.*

1. *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* FMM′. — L'équation de l'ellipse étant

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$



les coordonnées de M et M′ sont

$$M(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi),\qquad M'(-a\sin\varphi,\ b\cos\varphi).$$

Les médiatrices des côtés FM et FM′ du triangle FMM′ ont pour équations

$$2y - b\sin\varphi = -\frac{(a\cos\varphi - c)}{b\sin\varphi}\,[2x - (a\cos\varphi + c)],$$

$$2y - b\cos\varphi = \frac{(a\sin\varphi + c)}{b\cos\varphi}\,[2x - (c - a\sin\varphi)],$$

ou

$$2x(a\cos\varphi - c) + 2by\sin\varphi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - c^2,$$

$$2x(a\sin\varphi + c) - 2by\cos\varphi = c^2 - a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi.$$

Il faut éliminer φ entre ces deux équations.

En les ajoutant et retranchant, on obtient

$$2ax(\cos\varphi + \sin\varphi) - 2by(\cos\varphi - \sin\varphi) = c^2\cos 2\varphi,$$

$$2ax(\cos\varphi - \sin\varphi) + 2by(\cos\varphi + \sin\varphi) = 3b^2 - a^2 + 4cx.$$

En faisant la somme des carrés de ces équations dans chaque membre, et de même leur produit, on obtient

(1) $$8(a^2x^2 + b^2y^2) = c^4\cos^2 2\varphi + (4cx + 3b^2 - a^2)^2,$$

et (2) $$4(a^2x^2 - b^2y^2)\cos 2\varphi + 8abxy\sin 2\varphi = c^2(4cx + 3b^2 - a^2)\cos 2\varphi.$$

Cette dernière équation donne

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{c^2(4cx + 3b^2 - a^2) - 4(a^2x^2 - b^2y^2)}{8abxy}.$$

Il en résulte

$$\cos^2 2\varphi = \frac{16a^2b^2x^2y^2}{[c^2(4cx + 3b^2 - a^2) - 4(a^2x^2 - b^2y^2)]^2 + 64a^2b^2x^2y^2};$$

et, en portant cette valeur dans (1), on a l'équation du lieu du centre du cercle circonscrit au triangle FMM′

$$[8(a^2x^2 + b^2y^2) - (4cx + 3b^2 - a^2)^2]\{4(a^2x^2 - b^2y^2) - c^2(4cx + 3b^2 - a^2)^2 + 64a^2b^2x^2y^2\} - 16c^4a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

C'est une courbe du 6e degré symétrique par rapport à Ox.

Les termes du degré le plus élevé sont

$$128(a^2x^2 + b^2y^2)^2[x^2(2b^2 - a^2) + b^2y^2].$$

La courbe sera donc fermée si $a < b\sqrt{2}$.

Si $a \geqslant b\sqrt{2}$, la courbe aura deux asymptotes de directions $\pm\dfrac{\sqrt{a^2 - 2b^2}}{b}$.

Les équations de ces asymptotes sont

$$y = \pm\frac{1}{2b\sqrt{a^2 - 2b^2}}\,[2(a^2 - 2b^2)x + c(3b^2 - a^2)].$$

Les asymptotes passeront par le centre de l'ellipse si $a = b\sqrt{3}$.

En faisant $y = 0$ dans l'équation du lieu, on aura les abscisses des points d'intersection avec Ox :

$$[8a^2x^2 - (4cx + 3b^2 - a^2)^2][4a^2x^2 - c^2(4cx + 3b^2 - a^2)]^2 = 0,$$

ou $$(2ax\sqrt{2} - 4cx + a^2 - 3b^2)(2ax\sqrt{2} + 4cx + 3b^2 - a^2)[4a^2x^2 - 4c^3x - c^2(3b^2 - a^2)]^2 = 0.$$

On a donc les deux points d'abscisses

$$x_1 = \frac{a^2 - 3b^2}{2(2c - a\sqrt{2})}, \qquad x_2 = \frac{a^2 - 3b^2}{2(2c + a\sqrt{2})},$$

et les deux points doubles dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$4a^2x^2 - 4c^3x - c^2(3b^2 - a^2) = 0.$$

Ce sont

$$x_3 = \frac{c^3 + bc\sqrt{a^2 + b^2}}{2a^2}, \qquad x_4 = \frac{c^3 - bc\sqrt{a^2 + b^2}}{2a^2}.$$

Pour $x = 0$, on a, pour les ordonnées des points d'intersection de la sextique avec Oy,

$$[8b^2y^2 - (3b^2 - a^2)^2][4b^2y^2 + c^2(3b^2 - a^2)]^2 = 0.$$

Les points d'intersection ont donc pour ordonnées

$$y_1 = \frac{3b^2 - a^2}{2b\sqrt{2}}, \qquad y_2 = -\frac{(3b^2 - a^2)}{2b\sqrt{2}}, \qquad y_3 = \frac{c\sqrt{a^2 - 3b^2}}{2b}, \qquad y_4 = -\frac{c\sqrt{a^2 - 3b^2}}{2b}.$$

Les deux derniers sont des points doubles.

Ces quatre points se réunissent au centre de l'ellipse lorsque $a = b\sqrt{3}$.

2. *Lieu de l'orthocentre du triangle* FMM'. — Les équations des hauteurs issues de M et M' sont

$$y - b\sin\varphi = (x - a\cos\varphi)\frac{(a\sin\varphi + c)}{b\cos\varphi}, \qquad y - b\cos\varphi = (x + a\sin\varphi)\frac{(c - a\cos\varphi)}{b\sin\varphi}.$$

En les résolvant par rapport à x et y, on obtient

$$x = \frac{c\sin\varphi\cos\varphi(2a + c(\sin\varphi - \cos\varphi))}{a + c(\sin\varphi - \cos\varphi)},$$

$$x - c = \frac{c(\cos\varphi + \sin\varphi)[c(1 - \sin\varphi\cos\varphi) - a(\cos\varphi - \sin\varphi)]}{a + c(\sin\varphi - \cos\varphi)},$$

$$y = \frac{ac(\cos\varphi + \sin\varphi)[c(1 - \sin\varphi\cos\varphi) - a(\cos\varphi - \sin\varphi)]}{b[a + c(\sin\varphi - \cos\varphi)]}.$$

Il en résulte

$$\frac{y}{x - c} = \frac{a(\cos\varphi + \sin\varphi)}{b(\cos\varphi - \sin\varphi)},$$

qui est l'équation de la hauteur issue de F.

On voit ainsi que le lieu de l'orthocentre est une courbe unicursale du 6e ordre.

Cherchons son équation cartésienne. On déduit de la dernière équation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{by - a(x - c)}{by + a(x - c)},$$

$$\sin\varphi = \frac{by - a(x - c)}{\sqrt{2(b^2y^2 + a^2(x - c)^2)}}, \qquad \cos\varphi = \frac{by + a(x - c)}{\sqrt{2(b^2y^2 + a^2(x - c)^2)}}.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation de la première hauteur,

$$cx - c^2\sin\varphi\cos\varphi = (by + ac)\cos\varphi - ax\sin\varphi,$$

donnent, tous calculs faits,

$$2a^2(x - c)^2 + b^2y^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2c^2)^2 = c^2[b^2y^2(2x - c) + a^2(x - c)^2(2x + c)]^2.$$

Telle est l'équation de la courbe du 6e degré.

Les termes du 6e degré étant

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^2[(2b^2 - a^2)x^2 + b^2y^2],$$

il en résulte que la courbe sera fermée si $a < b\sqrt{2}$, et aura des branches infinies si $a \geqslant b\sqrt{2}$.

Pour $y = 0$, on a

$$(x - c)^4[2a^2(x + c)^2 - c^2(2x + c)^2] = 0.$$

La courbe passe donc par le foyer $F(c, 0)$ qui est un point quadruple. Les deux autres points situés sur Ox ont pour abscisses

$$\pm a\sqrt{2}(x + c) = c(2x + c),$$

$$x_1 = \frac{c(a\sqrt{2} - c)}{2c - a\sqrt{2}}, \qquad x_2 = -\frac{c(a\sqrt{2} + c)}{2c + a\sqrt{2}}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$(b^2y^2 - a^2c^2)^2 - 2(b^2y^2 + a^2c^2)c^2 = 0.$$

L'axe Oy rencontre donc la courbe aux deux points doubles ayant pour ordonnées

$$y_1 = \frac{ac}{b}, \qquad y_2 = -\frac{ac}{b}.$$

Les deux autres points de rencontre sont imaginaires et ont pour ordonnées

$$y_3 = \frac{c}{b\sqrt{2}}\sqrt{-(a^2 + b^2)}, \qquad y_4 = -\frac{c}{b\sqrt{2}}\sqrt{-(a^2 + b^2)}.$$

Lorsque $a > b\sqrt{2}$, les deux asymptotes de la courbe ont pour équations

$$y = \pm\frac{1}{b\sqrt{a^2 - 2b^2}}[(a^2 - 2b^2)x - c^3].$$

E.-N. BARISIEN.

ÉCOLE CENTRALE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

Géométrie analytique et Mécanique (M. Jablonski).

Géométrie analytique à deux dimensions.

9431. — Construire la longueur $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + b^2}}$.

9432. — Mener du point $x = 2$, $y = 3$ la perpendiculaire à la droite $2x + 4y - 5 = 0$.

9433. — Mener au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ une tangente de coefficient angulaire m.

9434. — Construire les courbes $y = 2x + 3 - \sqrt{-x^2 + 3x + 1}$, $y + x^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

9435. — Asymptotes de la courbe $y = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 2}$.

9436. — Construire les courbes suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^2-4}, \\ y = \dfrac{t^2}{t-2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{t^2-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{t+2}{t(t+1)}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1 + \sqrt{2}\cos t}, \\ y = \dfrac{\cos t}{1 - \sqrt{2}\sin t}, \end{cases}$$

$$\rho = \frac{1}{\sin\omega} + \frac{1}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - \sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - 2\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{1 + \operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1}, \qquad \rho = \frac{\sin^2\omega}{\cos 2\omega}.$$

9437. — Concavité et convexité en coordonnées polaires. Cas d'une courbe passant par le pôle.

9438. — Construire les courbes $x^2 + y^2 - xy + x + y = 0$, $x^2 + 2y^2 - xy + 2x - y = 0$.

9439. — Points doubles d'une courbe algébrique. Exemple : $x^3 - y^3 + xy + x - y = 0$.

9440. — Recherche des asymptotes. Exemples : $x^3 - y^3 + xy + x - y = 0$, $x^2y - y^2x + x^2 + y^2 - x = 0$.

9441. — Rayon de courbure de la parabole $y^2 - 2px = 0$, en un point donné.

9442. — Rayon de courbure pour $x = 0$ de la courbe $y = \frac{x^2+1}{x+1}$.

9443. — Rayon de courbure de la courbe $x = a(1 - \cos\varphi)$, $y = a(\varphi - \sin\varphi)$ pour une valeur donnée de φ.

9444. — Enveloppe des droites $y = \lambda x - c\sqrt{1+\lambda^2} = 0$.

9445. — Enveloppe de la droite $\lambda x + \mu y - 1 = 0$, sachant que $x^2 - y^2 = a^2$. Construire cette enveloppe ; déterminer les paramètres λ et μ pour que les tangentes à cette enveloppe passent par un point donné.

9446. — Enveloppe de la droite $\frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu} - 1 = 0$, sachant que $\lambda\mu = a^2$.

9447. — Développée de la parabole ; de l'ellipse.

9448. — Réduction de l'équation $x^2 + 4y^2 - xy - 1 = 0$.

9449. — Réduction de l'équation $x^2 + 9y^2 - 6xy + 3x = 0$.

9450. — Axe de la conique $x^2 + 4y^2 + 4xy + 3x - 2y = 0$.

9451. — Axe de la parabole $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 1 = 0$.

9452. — Sommet de la parabole $y^2 + 4x^2 - 4xy + x - y = 0$.

9453. — Diamètres dans les coniques. Condition pour que la droite $ux + vy + w = 0$ soit un diamètre.

9454. — Foyers de l'hyperbole $xy - a^2 = 0$, les axes étant rectangulaires.

9455. — Démontrer que dans une ellipse, la somme des rayons vecteurs est constante.

9456. — Trouver les coefficients angulaires des tangentes que l'on peut mener d'un point à une conique. Tangentes menées du point $x = 1$, $y = 2$ à la conique $2x^2 + 3y^2 - xy + 2x - y = 0$.

9457. — Lieu des points d'où on peut mener à une ellipse des tangentes rectangulaires.

9458. — Mener d'un point x_0, y_0 des tangentes à la courbe d'équation $x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$.

9459. — Lieu de la projection du foyer sur les tangentes dans la parabole.

9460. — Mener par un point x_0, y_0 des normales à $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

9461. — Mener à la parabole $y^2 - 2px = 0$ une normale de direction donnée m.

9462. — Mener par un point des normales à l'hyperbole $xy - a^2 = 0$ (axes rectangulaires).

9463. — Intersection de deux coniques ; cas où elles ont deux directions asymptotiques communes.

9464. — Équation générale des coniques passant par quatre points donnés.

Géométrie analytique à trois dimensions.

9465. — Mener, par un point, un plan parallèle à deux droites données.

9466. — Condition pour que deux droites soient dans un même plan.

9467. — Angle de deux droites passant par l'origine et de coefficients directeurs $(1, 2, -1)$; $(-1, 3, 2)$.

9468. — Distance du point $(-1, 3, -2)$ à la droite $2x - 3y + 2 = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$.

9469. — Distance de la droite $x - 2y + z - 1 = 0$, $2x + y + z = 0$ à l'axe des x.

9470. — Centre et rayon de la section de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ par le plan $x + 2y - z = 0$.

9471. — Intersection de $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 3y = 0$. Centre et rayon de la section.

9472. — Mener par la droite $x = z + h$, $y = z + k$, un plan tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

9473. — Rayon de courbure d'une hélice.

9474. — Équation du cône qui a pour sommet le point $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ et pour directrice la courbe définie par les équations : $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$.

9475. — Équation d'un cône de révolution dont on donne le sommet, l'axe et l'angle au sommet.

9476. — Équation d'un cylindre de révolution dont on donne l'axe et le rayon.

9477. — Surface engendrée par la droite $x = a$, $y = mz$, en tournant autour de Oz.

9478. — Équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes parallèles à un même plan.

9479. — Surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites données et reste parallèle à un plan donné. Former l'équation de la surface.

9480. — Cylindre de direction α, β, γ circonscrit à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

9481. — Circonscrire au paraboloïde $xy - z = 0$ un cylindre de génératrices parallèles à la droite $x + y - z = 0$, $2x + y + z = 0$.

9482. — Soit l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, rapporté à ses trois plans principaux, et trois diamètres conjugués OD, OE, OF ; démontrer que le plan tangent à l'ellipsoïde en D est parallèle au plan EOF.

9483. — Mener par une droite $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ un plan tangent à $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$.

9484. — Mener à l'ellipsoïde $x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ un plan tangent perpendiculaire à la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$.

9485. — Mener à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ un plan tangent parallèle à $ux + vy + wz = 0$.

9486. — Mener à la surface $xy - pz = 0$ un plan tangent parallèle à $ux + vy + wz = 0$.

9487. — Mener par la droite $x = 2y = z - 1$ un plan tangent à la surface $x^2 - y^2 - 2z = 0$

9488. — Mener au cône $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ un plan tangent par le point $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$

9489. — Mener d'un point une normale à $x^2 + y^2 - 2az = 0$.

9490. — Section de l'hyperboloïde à une nappe par un de ses plans tangents.

9491. — Asymptotes de la section de $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$ par le plan $2x - y - z = 1$.

9492. — Plans asymptotes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. — Démontrer qu'un pareil plan coupe la surface suivant deux droites parallèles.

9493. — Cône asymptote de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$; montrer que les sections de l'hyperboloïde et de son cône asymptote par un même plan sont concentriques.

9494. — Sections circulaires d'un ellipsoïde.

9495. — Sections circulaires de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

9496. — Sections circulaires d'un paraboloïde elliptique.

9497. — Propriétés des diamètres dans les paraboloïdes.

Mécanique.

9498. — Discuter les mouvements rectilignes $x = 3\sin\frac{\pi t}{3}$, $x = \sin t - 2\cos 2t$, $x = \sin t + 2\cos 2t$, $x = a\,\mathrm{ch}\,\omega t$.

9499. — Diagrammes de l'espace et de la vitesse dans le mouvement rectiligne $x = \sin t . e^{\pi t}$.

9500. — Discuter le mouvement rectiligne $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ $(v_0 > 0)$.

9501. — Vecteur vitesse dans un mouvement curviligne. — Composantes suivant les axes.

9502. — Accélération dans un mouvement curviligne quelconque ; accélération totale, tangentielle et normale.

9503. — Vitesse et accélération dans le mouvement circulaire.

9504. — Vitesse et accélération en coordonnées polaires.

9505. — Vitesse aréolaire.

9506. — Mouvement de rotation autour d'un axe passant par l'origine et de paramètres directeurs a, b, c. — Composantes du vecteur vitesse.

9507. — Accélération dans un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. — Composantes suivant les axes, dans le cas d'un mouvement uniforme, l'axe de rotation étant quelconque.

9508. — Étudier le mouvement $x = at$, $y = gt^2 + bt$, $z = gt^2 + ct$.

9509. — Composition de deux mouvements périodiques simples de même fréquence

$$x = a\sin(\omega t + \alpha), \qquad y = b\sin(\omega t - \alpha).$$

9510. — Composition d'un mouvement rectiligne uniforme, avec un mouvement circulaire, uniforme également.

9511. — Mouvement d'un point repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance.

9512. — Mouvement des planètes. Troisième loi de Képler.

9513. — Mouvement d'un point repoussé par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

9514. — Mouvement d'un point pesant abandonné sans vitesse initiale dans un milieu exerçant sur lui une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

9515. — Mouvement sur un plan horizontal rugueux d'un point pesant soumis à une traction horizontale constante en grandeur et en direction ; le point n'ayant pas de vitesse initiale, chercher s'il y aura équilibre ou mouvement.

9516. — Mouvement d'un point pesant sur un plan horizontal rugueux, le point étant attiré proportionnellement à la distance par un centre situé dans le plan.

9517. — Mouvement d'un point pesant sur un cercle dans un plan vertical.

9518. — Mouvement d'un point pesant sur la parabole $x^2 - 2pz = 0$ d'axe vertical.

9519. — Mouvement d'un point pesant sur une hélice verticale polie.

9520. — Mouvement d'un point pesant lancé de bas en haut, suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné.

9521. — Théorème des forces vives. Application à un mobile lancé avec une vitesse initiale v_0, montant sur un plan incliné rugueux. Quelle est pour une cote donnée la vitesse du mobile ?

9522. — Une tige polie tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical ; étudier le mouvement d'un point pesant assujetti à glisser sur cette tige. Traiter d'abord le cas où la tige rencontre l'axe.

9523. — Mouvement d'un point dans un champ : $X = kxy$, $Y = k^2x$, $Z = -g$. Chercher les surfaces de niveau et les lignes de force.

9524. — On considère la droite $x = az + b$, $y = bz + b$, dans le champ $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$. Équilibre d'un point mobile sur cette droite sans frottement. Application : $a = 1$, $b = -1$.

9525. — Équilibre d'un point sur une courbe matérielle polie. Stabilité et instabilité.

9526. — Équilibre sur une hélice verticale d'un point pesant attiré par un point de l'axe. On supposera l'hélice polie et la force d'attraction constante.

9527. — Équilibre d'un point matériel pesant sur un plan incliné rugueux.

9528. — Équilibre d'un point pesant sur une sphère rugueuse.

9529. — Équilibre d'un point pesant sur un cône rugueux dont l'axe est incliné.

9530. — Un point matériel pesant se meut avec frottement sur un cercle tracé dans un plan, incliné d'un angle α sur l'horizon. Positions d'équilibre.

9531. — Relation entre les moments d'un même vecteur par rapport à deux centres O et O'.

9532. — Conditions d'équilibre de deux systèmes de vecteurs.

9533. — Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.

9534. — Centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère. Calculer les coordonnées de ce point en fonction des coordonnées des quatre sommets.

9535. — Centre de gravité d'un tronc de cône de révolution homogène.

9536. — On considère une tige homogène de longueur $2l$, dont une extrémité O est fixe ; l'autre A est attachée à un fil passant sur une poulie fixe B sans frottement, l'extrémité O de la tige OA étant sur la verticale du point B. Le fil est tendu par un poids P. Position d'équilibre.

9537. — Équilibre du treuil ; pression sur les appuis.

9538. — Levier avec frottement.

9539. — Poulie fixe avec frottement, les cordons étant rectangulaires.

QUESTIONS PROPOSÉES

2215. — Montrer que l'équation de la courbe

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$$

devient, en se débarrassant des radicaux,

$$(x + y - a)^5 + 625axy(x^2 + y^2 + a^2 - 3xy + 3a(x + y)) = 0.$$

La construire.

E. N. Barisien.

2216. La droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

où p désigne une certaine fonction de φ, enveloppe une courbe (C). Soient M le point de contact, N le point de rencontre de la normale en M avec Ox, P la projection de l'origine sur la tangente.

1° Déterminer la fonction p pour que l'on ait constamment

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PO}} = 1 - n,$$

n désignant une constante donnée.

2° Montrer que pour une certaine valeur de n les courbes (C) ainsi obtenues sont telles que le rayon de courbure en M soit fonction linéaire de p. Parmi les courbes parallèles à (C) il y en a alors une dont le rayon de courbure est triple de la normale limitée à Ox.

3° Construire une des courbes (C) trouvées dans la deuxième partie, et calculer sa longueur totale.

(Certificat de mathématiques générales, Clermont, novembre 1912.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2123. — 1° *Déterminer une série dont tous les termes sont des fonctions de x :*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

et telle que $u_n(x) = S_n'(x)$, $S_n(x)$ *étant la dérivée par rapport à x de la somme des n premiers termes de la série (on prendra égales à 1 toutes les constantes d'intégration).*

2° *Nature de cette série et ordre d'infinitude de* $S_n(x)$.

Nous avons d'abord

$$u_1 = u_1',$$

et, par suite, $u_1 = Ce^x$; comme nous devons prendre la constante d'intégration égale à 1, nous avons

$$u_1 = e^x.$$

Nous avons de même

$$u_2 = u_1 + u_2',$$

$$u_2 - u_2' = e^x,$$

et u_2 est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Pour la résoudre, posons $u_2 = ye^x$; nous aurons $-y' = 1$; d'où $y = -x + C$, et $u_2 = (C - x)e^x$.

En prenant la constante d'intégration égale à 1, nous avons

$$u_2 = (1 - x)e^x.$$

Ceci nous permet de prévoir la loi et d'écrire

$$u_n = \left[1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]e^x.$$

Pour justifier cette loi, il suffit de l'admettre pour u_n et de démontrer qu'elle est vraie pour u_{n+1}.

Or nous avons

$$u_{n+1} = S_{n+1}'(x) = u_{n+1}' + S_n'(x),$$

et, comme $S_n'(x) = u_n(x)$,

$$u_{n+1} = u_{n+1}' + u_n(x).$$

Nous sommes ramenés à une équation linéaire de même forme que la précédente. Posons encore $u_{n+1} = ye^x$, nous aurons

$$-y' = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n-1)!},$$

et

$$y = C - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!};$$

faisant encore $C = 1$, nous avons

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

et

$$u_{n+1} = e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right).$$

La loi est bien générale.

Le terme général tend vers $e^x e^{-x}$, c'est-à-dire vers 1 ; donc la série est divergente.

Pour avoir la somme des n premiers termes, écrivons

$$u_1 = e^x,$$

$$u_2 = e^x\left(1 - \frac{x}{1}\right),$$

$$u_3 = e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right),$$

et ajoutons ; nous aurons

$$S_n(x) = e^x\left[n - (n-1)\frac{x}{1} + (n-2)\frac{x^2}{1.2} - (n-3)\frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-n+1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right],$$

ou
$$S_n(x) = ne^x\left[1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$
$$+ xe^x\left[1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right].$$

Quand n augmente indéfiniment, les deux parenthèses tendent vers e^{-x} et la valeur asymptotique de $S_n(x)$ est $n + x$. L'ordre d'infinitude est égal à 1.

Jean MOURRET.

Bonne solution : M. R. Defoin, à Nancy.
Assez bonnes solutions : MM. G. Roy, à Varzy ; J. Dodier, et M. Ullmann, à Héricourt.

GÉOMÉTRIE

2124. — *Soient* (T) *et* (T′) *deux tangentes communes à deux coniques fixes* (C) *et* (C′), (Σ) *une conique variable tangente aux droites* (T) *et* (T′) *en* T *et* T′ *et aux coniques* (C) *et* (C′) *en* C *et* C′.

Trouver les enveloppes des droites TT′ *et* CC′ *et le lieu du pôle de* CC′ *par rapport à* (Σ).

Solution géométrique. Effectuons une transformation homographique qui conserve le point de rencontre, O, des deux tangentes (T) et (T′) et qui change celles-ci en les droites isotropes. Les trois coniques (C), (C′) et (Σ) deviennent (C_1) (C'_1) et (Σ_1) et ont alors pour foyer le point O. La droite $T_1T'_1$, des contacts de (Σ_1), avec les droites isotropes, est la polaire du foyer O, c'est la directrice. Les points C et C′ sont devenus C_1 et C'_1 ; ce sont les points de contact de la nouvelle conique (Σ_1) avec les coniques (C_1) et (C'_1).

Transformons maintenant par polaires réciproques, à l'aide d'un cercle ayant pour centre le point O; OI et OJ deviennent les points I et J, et les trois coniques deviennent trois cercles (C_2), (C'_2) et (Σ_2); les éléments de contact se conservent, et les points C_1, C'_1 deviennent les tangentes à (C_2) et (C'_2), aux points où (Σ_2) les touche. Le point O devient la droite de l'infini, et la droite $T_1T'_1$ le pôle de cette droite par rapport à (Σ_2), c'est-à-dire le centre du cercle (Σ_2). Ce cercle étant tangent aux deux cercles fixes (C_2) et (C'_2), le lieu de son centre se compose de deux coniques qui ont pour foyers les centres de ces cercles et qui passent aux points de rencontre de ces deux cercles. En revenant à la première figure, on obtient, comme enveloppe de la droite TT′, deux coniques tangentes aux deux autres tangentes communes aux coniques données (C) et (C′). Les points I et J correspondent maintenant aux droites (T) et (T′). Dans la nouvelle figure, les deux coniques sont tangentes aux tangentes menées aux deux cercles par les points

I et J ; donc dans l'ancienne, dans la première figure, les deux coniques passent par les points de contact de (T) et (T') avec les coniques données. Ces deux coniques sont donc parfaitement déterminées.

Passons maintenant à l'enveloppe de la droite CC' ; elle devient, après la transformation, le point de rencontre des tangentes à (C_2) et à (C'_2), aux points où le cercle (Σ_2) les touche. Ce point décrit la corde commune aux cercles (C_2) et (C'_2). Donc la droite CC' enveloppe le point de rencontre des deux autres tangentes communes à (C) et à (C'). Quant au pôle de la droite CC', ce point devient la polaire du point précédent ; c'est la droite des contacts de (Σ_2) avec (C_2) et (C'_2). Cette droite enveloppe les deux centres de similitude de (C_2) et (C'_2). Donc le pôle de CC' décrit deux des sécantes communes aux coniques (C) et (C'). Or les centres de (C_2) et (C'_2) sont les transformés des polaires de O par rapport aux coniques (C) et (C'). Ces deux polaires se coupent en un pôle double, et les deux sécantes communes sont celles qui passent par ce pôle double.

La solution analytique présente d'assez grandes difficultés. Nous ne la donnerons pas. M. Rousseau a envoyé une esquisse d'une pareille solution.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2125. — *On donne un point* P *et une conique* (C). *Par le point* P, *on fait passer deux cordes* PMM' *et* PNN', *également inclinées sur les axes de la conique, et, par les quatre points de rencontre avec la conique,* M, M', N, N', *on fait passer un cercle. Trouver le lieu du centre de ce cercle, quand l'inclinaison de la sécante sur les axes varie, et montrer que tous ces cercles ont même axe radical.*

2° *Du point* P *comme centre, on décrit un cercle variable, et on considère le triangle conjugué commun à ce cercle et à la conique. Trouver le lieu des sommets, l'enveloppe des côtés et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle.*

Solution analytique. — Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ l'équation de la conique (C) et α, β les coordonnées du point P. Les deux droites PMM' et PNN' ont pour équations

$$y-\beta=m(x-\alpha)=0 \qquad \text{et} \qquad y-\beta+m'(x-\alpha)=0,$$

ou

$$(y-\beta)^2-m^2(x-\alpha)^2=0;$$

les cercles demandés ont donc pour équation

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+(y-\beta)^2-m^2(x-\alpha)^2=0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut et il suffit que les coefficients des termes en x^2 et en y^2 soient égaux ; ce qui donne

$$\frac{\lambda}{a^2}-m^2=\frac{\lambda}{b^2}+1,$$

puis

$$\lambda\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=1+m^2, \qquad \lambda=-\frac{a^2b^2}{c^2}(1+m^2).$$

Le cercle variable a donc pour équation

$$(1+m^2)(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)-c^2(y-\beta)^2+c^2m^2(x-\alpha)^2=0,$$

ou

$$(a^2m^2+b^2x^2+y^2)-2c^2m^2\alpha x+2c^2\beta y-a^2b^2(1+m^2)-c^2\beta^2+c^2m^2\alpha^2=0.$$

Cette équation contient un paramètre unique m^2 au premier degré ; elle représente donc un faisceau linéaire de cercles dont les deux cercles de base sont

$$(a^2+x^2+y^2)-2\alpha c^2x-a^2b^2+c^2\alpha^2=0.$$

$$b^2(x^2+y^2)+2\beta c^2y-a^2b^2-c^2\beta^2=0.$$

Le lieu du centre est donc une ligne droite, la droite qui joint les deux centres des cercles de base, et l'axe radical s'obtient en éliminant $x^2 + y^2$ entre les deux équations.

La ligne des centres est

$$\frac{a^2x}{\alpha c^2} + \frac{b^2y}{\beta c^2} - 1 = 0;$$

elle passe au point (α, β), elle est perpendiculaire à la polaire de ce point.

L'axe radical est $$2b^2\alpha x + 2a^2\beta y - a^2b^2 - a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = 0;$$

c'est bien une droite parallèle à la polaire du point (α, β).

Considérons maintenant le cercle décrit du point P comme centre,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \rho^2 = 0.$$

Le faisceau de coniques passant par l'intersection de ce cercle et de la conique donnée a pour équation $$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \rho^2 = 0.$$

En écrivant que cette conique a un point double, nous avons

$$2\lambda b^2x + 2(x - \alpha) = 0,$$
$$2\lambda a^2y + 2(y - \beta) = 0,$$
$$-2\lambda a^2b^2 - 2\alpha(x - \alpha) - 2\beta(y - \beta) - 2\rho^2 = 0.$$

Nous aurons le lieu des points doubles, c'est-à-dire le lieu des sommets du triangle autopolaire commun, en éliminant λ et ρ^2 entre ces trois équations; ρ^2 est tout éliminé puisqu'il n'entre pas dans les deux premières ; il n'y a plus qu'à éliminer λ entre celles-ci. Cela donne

$$b^2x(y - \beta) - a^2y(x - \alpha) = 0.$$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère, une hyperbole d'Apollonius, celle du point (α, β).

L'enveloppe des côtés du triangle autopolaire est la polaire réciproque de cette hyperbole par rapport à l'ellipse. C'est une parabole, puisque l'hyperbole passe au centre de l'ellipse. Pour avoir l'équation de cette parabole, écrivons l'hyperbole d'Apollonius sous sa forme habituelle

$$\frac{x - \alpha}{\dfrac{x}{a^2}} = \frac{y - \beta}{\dfrac{y}{b^2}}$$

et appelons μ la valeur commune des rapports : nous aurons

$$x - \alpha = \mu\frac{x}{a^2}, \qquad y - \beta = \mu\frac{y}{b^2}; \qquad x = \frac{a^2\alpha}{a^2 - \mu}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 - \mu};$$

la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est $\dfrac{\alpha x}{a^2 - \mu} + \dfrac{\beta y}{b^2 - \mu} - 1 = 0$; nous aurons l'enveloppe de cette droite en écrivant que l'équation en μ a une racine double, ce qui nous donne

$$(\alpha x + \beta y - a^2 - b^2)^2 + 4(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2) = 0.$$

Nous aurions facilement l'équation tangentielle de cette parabole en considérant le faisceau tangentiel défini par les deux coniques données

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0, \qquad \rho^2(u^2 + v^2) - (\alpha u + \beta v + w)^2 = 0.$$

Ce faisceau est

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2) - \rho^2(u^2 + v^2) + (\alpha u + \beta v + w)^2 = 0,$$

et en écrivant qu'il y a une solution double nous avons

$$(\lambda a^2 + \rho^2)u - \alpha(\alpha u + \beta v + w) = 0, \qquad (\lambda b^2 + \rho^2)v - \beta(\alpha u + \beta v + w) = 0,$$
$$-\lambda w - (\alpha u + \beta v + w) = 0.$$

Éliminons λ, ρ^2 et $\alpha u + \beta v + w$ entre ces trois équations, nous aurons

$$\begin{vmatrix} a^2u & u & \alpha \\ b^2v & v & \beta \\ -w & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou $$a^2uv - w(\beta u - \alpha v) = 0.$$

C'est bien là l'équation tangentielle d'une parabole tangente aux deux axes, ce qui était évident d'après sa première définition.

Pour avoir le cercle circonscrit au triangle autopolaire commun, il faut former les trois coniques circonscrites au triangle autopolaire que l'on obtient en éliminant λ entre les équations

$$\lambda b^2 x + x - \alpha = 0, \qquad \lambda a^2 y - y - \beta = 0, \qquad \lambda a^2 b^2 - \alpha^2 x - \alpha^2 + \beta^2 y - \beta^2 + \rho^2 = 0.$$

Le calcul se simplifie un peu en portant les axes au point (α, β), c'est-à-dire en changeant x en $x+\alpha$, y en $y+\beta$, et l'on obtient ainsi

$$b^2 y^2 x + \alpha^2 x - a^2 x y - \beta^2 = 0, \qquad b^2 x^2 + \alpha^2 x + \beta y + \rho^2) - a^2 b^2 x = 0.$$

$$a^2 x^2 + \beta^2 x + \beta y + \rho^2 - a^2 b^2 y = 0.$$

Formons le faisceau $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$ et annulons le coefficient de xy : égalons le coefficient de x^2 et celui de y^2. Nous aurons

$$-\lambda a^2 - \mu b^2 \beta + \nu a^2 \alpha = 0, \qquad \mu b^2 \alpha - \nu a^2 \beta = 0 :$$

nous prendrons $\mu = a^2 \beta, \quad \nu = b^2 \alpha, \quad$ et $\quad \lambda = \dfrac{a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{c^2}.$

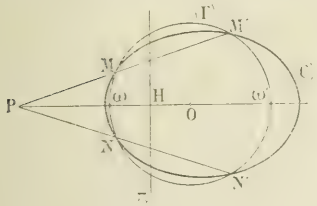
ou $\quad \lambda = a^2 b^2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad \mu = a^2 c^2 \beta, \quad \nu = b^2 c^2 \alpha ;$

nous obtiendrons ainsi

$$x^2 + y^2 + \left[\rho^2 - a^2 - \frac{a^2}{b^2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]\frac{x}{\alpha} - \left[\rho^2 - b^2 + \frac{b^2}{c^2}(\rho^2 - \beta^2)\right]\frac{y}{\beta} + a^2 - b^2 = 0.$$

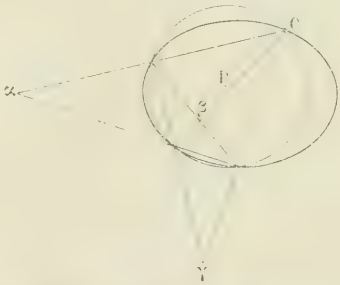
Il est visible que cette équation contient linéairement le paramètre ρ^2 ; elle représente donc un faisceau linéaire de cercles, et le coefficient de ρ^2 est l'axe radical du faisceau. La perpendiculaire abaissée du centre de l'autre cercle sur cette droite est le lieu des centres. Ces deux équations sont très simples et s'écrivent immédiatement.

Solution géométrique. — **1.** Le point P ayant même polaire par rapport à (C) et à (Γ), le point O se trouve sur la perpendiculaire PH abaissée de P sur la polaire π de ce point par rapport à (C).



Le cercle (Γ) rencontre la droite PH aux points ω, ω' conjugués par rapport aux points P, H. La perpendiculaire à PH en son milieu est donc un axe radical commun à tous les cercles (Γ).

2. Soit $\alpha\beta\gamma$ le triangle conjugué commun. La polaire de α par rapport à la conique étant perpendiculaire à Pα, le point α se trouve sur l'hyperbole d'Apollonius (A) relative au point P. C'est donc le lieu des sommets α, β, γ.



$\beta\gamma$, étant la polaire de α par rapport à la conique, a pour enveloppe la polaire réciproque de (A) par rapport à C ; (A) passant par le centre de (C), cette enveloppe est une parabole (ϖ). Le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$, passant par le foyer F de (ϖ) et étant orthogonal au cercle orthoptique de la conique (C) (théorème de Faure), passera par un deuxième point fixe. Ce cercle passant par deux points fixes, son centre décrira une droite.

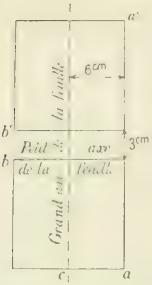
Jean MOURRET, élève à l'Ecole normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. R. Dontot, Ecole normale supérieure ; E. Rémé, à Batna ; A. Rousseau, à Fournes-en Weppe ; G. Ninin, lycée de Nancy ; L. Naucelle, à La Châtre.

Assez bonnes solutions : MM. Ullmann et J. Dopier, à Héricourt ; G. Lach, à Douai.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2157. — *Un cube de 12cm d'arête a une face horizontale et une face de front. Une sphère S a pour grand cercle le cercle inscrit dans la face antérieure du cube. Un hyperboloïde de révolution H a pour axe la droite qui joint les sommets (a, a') et (b, b') du cube et, pour l'une de ses génératrices, la médiane verticale de la face antérieure du cube, médiane projetée horizontalement au point c.*



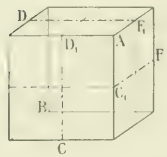
Figurer en traits mixtes les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde qui sont situées sur les faces du cube, en rouge celles qui sont du même système que la génératrice donnée, en bleu celles de l'autre système. On limitera les traits mixtes aux arêtes du cube.

Représenter par ses projections le solide, supposé opaque, obtenu en supprimant de la sphère S la partie contenue à l'intérieur de l'hyperboloïde H, l'intérieur étant la région qui contient le centre de cette surface.

On se conformera, pour la mise en place, au croquis joint à l'énoncé.

(*Ecole Polytechnique, 1913*)

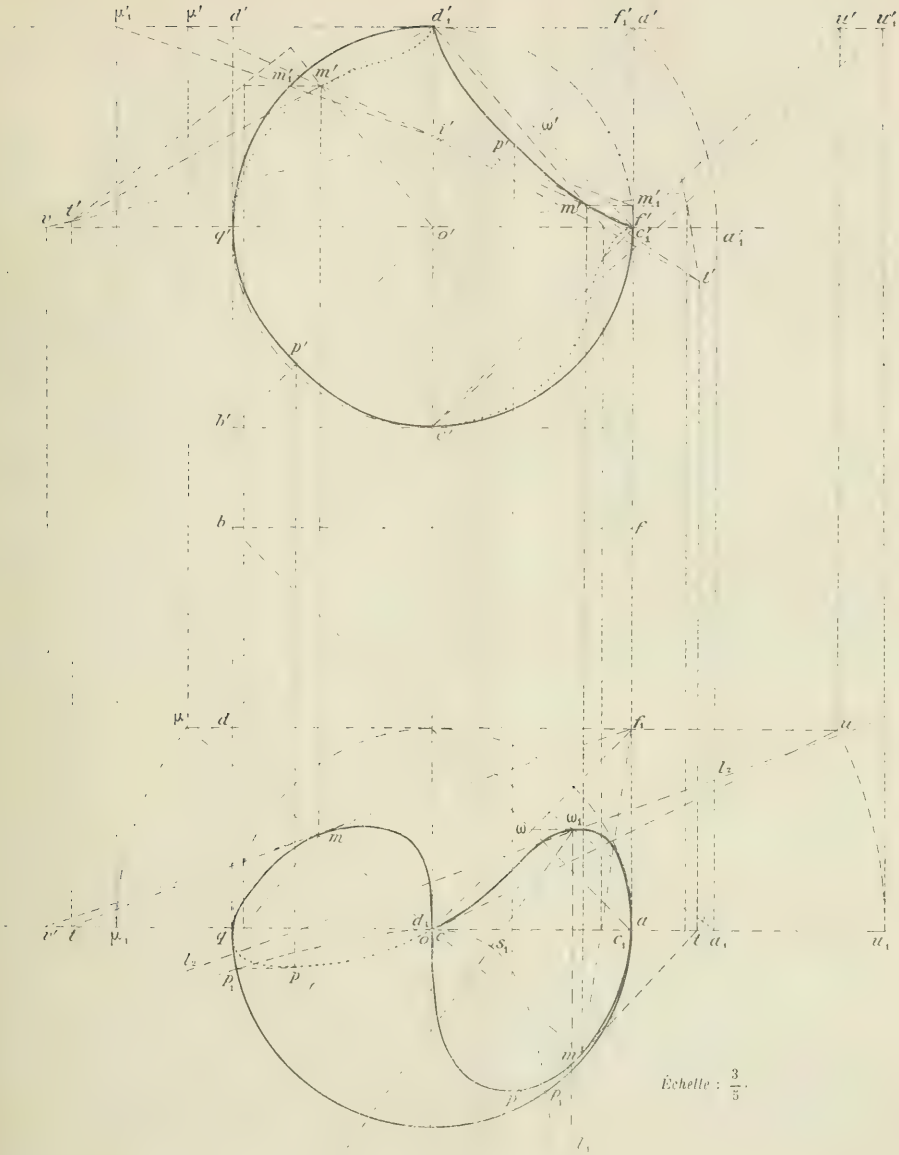
Considérons la figure dans l'espace : l'hyperboloïde engendré par la verticale C tournant autour de la diagonale AB est coupé par la face antérieure du cube suivant une seconde génératrice et par suite ce plan est tangent à la surface. Il en est donc de même des deux autres faces du cube qui passent en A, et avec chacune desquelles la première vient coïncider par une rotation convenable autour de la diagonale AB. On voit de suite qu'après ces rotations la génératrice C viendra prendre les positions D et F. Ce sont les trois génératrices du premier système. La génératrice de système différent contenue dans la face AC, devant couper la droite F, passera par le point C_1 et, comme elle doit faire avec l'axe de la surface de révolution le même angle que C, c'est la seconde médiane de la face AC ; on en déduit immédiatement les deux autres génératrices D_1 et F_1 dans les faces AD et AF.



La sphère S a pour contours apparents les deux cercles de centre (o, o') et dont le diamètre est égal à l'arête du cube. L'hyperboloïde, ayant deux génératrices verticales D_1 et F_1, n'a d'autre contour apparent horizontal que les projections de ces deux droites et pour la même raison son contour apparent vertical se réduit aux projections verticales des deux génératrices de bout C_1 et D_1.

Intersection des deux surfaces. — Pour trouver l'intersection des deux surfaces, nous les couperons par des plans auxiliaires passant par la génératrice verticale C. Chacun de ces plans coupe la sphère suivant un grand cercle, et l'hyperboloïde suivant C et une seconde génératrice dont les points d'intersection avec le cercle donnent des points de la courbe cherchée. Nous avons ainsi mené le plan vertical $c\mu$ qui coupe la génératrice F_1D au point (μ, μ'), ce qui donne la seconde génératrice projetée horizontalement en μc, et comme cette génératrice doit rencontrer aussi la génératrice FC_1 de système différent, sa projection verticale est la droite $\mu' f'$. En ramenant le plan vertical à être de front par une rotation autour de CD_1 nous obtenons en $\mu'_1 i' m'_1$ la nouvelle position de la génératrice qui coupe le grand cercle de la sphère aux points m'_1 qu'il suffit de ramener en m' sur la génératrice auxiliaire pour obtenir deux points de la courbe. On a aussitôt leurs projections horizontales m. La tangente en (m, m') est l'intersection des plans tangents à chaque surface en ce point. Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon OM ; le plan tangent à l'hyperboloïde est déterminé par la seconde génératrice qui passe en M. Or cette génératrice est du même système que CD_1 ; elle coupe donc la génératrice verticale F_1 et sa projection horizontale est $f_1 m$. Pour la même raison elle coupe la génératrice de bout D_1 et par suite sa projection verticale est $d'_1 m'$. Il suffit donc de prendre l'intersection du plan défini par ces deux droites avec le plan tangent à la sphère au point M, et pour cela de les couper par le plan de front $o\mu_1$ par exemple. Il donne un point (t, t') de leur intersection qu'il suffit de joindre au point (m, m') pour avoir la tangente $(tm, t'm')$.

Points remarquables. — On doit remarquer d'abord que le plan de bout qui projette l'axe AB de l'hyperboloïde est un plan de symétrie pour les deux surfaces. Donc la projection verticale de l'intersection est symétrique par rapport à la droite $a'b'$. Il y a intérêt à trouver directement les points d'intersection de cette droite avec la courbe, et pour cela prendre la section de chaque surface par ce plan de bout. Sur la sphère c'est un grand cercle, et sur l'hyperboloïde c'est l'hyperbole méridienne dont le centre est au pied de la perpendiculaire commune à l'axe AB et à la génératrice verticale C par exemple, et par suite projeté horizontalement


Échelle : $\frac{3}{5}$.

en ω. Cette hyperbole méridienne a une asymptote de bout parallèle à la génératrice FC_1, en sorte que si l'on rabat son plan sur le plan horizontal du centre de la sphère, le centre étant venu en ω_1, cette asymptote est $\omega_1 l_1$. Comme l'axe de l'hyperbole s'est rabattu suivant $\omega_1 a_1$, on obtient la seconde asymptote, $\omega_1 l_2$, par symétrie et l'axe transverse est la perpendiculaire sur $\omega_1 a_1$ au point ω_1, sa longueur étant égale au rayon ωc, du cercle de gorge de l'hyperboloïde. On peut donc tracer l'hyperbole dont on a un sommet s_1 et les asymptotes, puis prendre les points p_1 où elle coupe le grand cercle de la sphère pour les relever en (p, p'). En chacun de ces points (p, p') la tangente à la courbe d'intersection est perpendiculaire à l'axe de symétrie $a'b'$.

La courbe traverse le contour apparent vertical de la sphère aux points q' et c' en chacun desquels le plan tangent à la sphère est de bout, mais non le plan tangent à l'hyperboloïde ; par conséquent la courbe est tangente en chacun de ces points au cercle de contour apparent. Elle passe aussi aux points d'_1 et f', mais en chacun d'eux le plan tangent à l'hyperboloïde est aussi de bout, et la courbe présente un rebroussement. On obtient la tangente de rebroussement en prenant la trace du plan osculateur à la courbe et celui-ci est perpendiculaire à la droite qui joint les centres de courbure des sections normales dans chaque surface. Or au point d'_1, par exemple, la section normale de l'hyperboloïde est le système des deux génératrices projeté suivant $d'_1 o'$ et le centre de courbure correspondant est à l'infini dans la direction $o'f'$. Donc la tangente de rebroussement est $o'd'_1$, et de même au point f' elle est $o'f'$.

En projection horizontale la courbe présente un point double en c, la tangente à l'une des branches, celle dont la projection verticale passe en d'_1 est manifestement la droite de bout qui correspond à la tangente dans l'espace. Pour la branche dont la projection verticale passe en c' il suffit de remarquer qu'au point C de l'espace, le plan tangent à l'hyperboloïde, contenant la génératrice CD_1, est vertical et sa trace donne la tangente à la projection en même temps que la projection de la seconde génératrice qui passe au point C. Il suffit donc de déterminer cette seconde génératrice $(c'u', cu)$ par la construction ordinaire pour avoir la tangente cu.

Ponctuation. — La courbe d'intersection sépare la surface sphérique en deux régions dont l'une est intérieure à l'hyperboloïde, et a été enlevée, l'autre extérieure subsistant seule. On voit immédiatement que toute la portion de l'équateur de la sphère qui est intérieure au cube est sur la première région ainsi que l'arc de méridien principal $d'_1 f'$, et l'arc symétrique $q'c'$ projeté horizontalement en qc. Tout le reste du contour apparent de la sphère est conservé et on en déduit immédiatement les arcs vus et cachés pour la courbe d'intersection sur chacune des projections.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

9490. — Trouver le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes à une ellipse ou à une hyperbole. Solution analytique. Pouvait-on prévoir le facteur introduit ?

9491. — Trouver la développée d'une parabole. En quels points rencontre-t-elle la courbe ? Calculer l'aire comprise entre la parabole et la développée.

9492. — On donne une hyperbole équilatère et un système de cordes parallèles. Démontrer qu'il existe un point fixe d'où l'on voit ces cordes sous un angle droit.

9493. — Lieu des symétriques d'un foyer d'une ellipse par rapport aux tangentes.

9494. — Trouver les coordonnées du foyer de la parabole $(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - 2p \sin^2 \alpha = 0$. Lieu de ce point quand α varie.

9495. — Équation générale des cercles tangents à une parabole et ayant leurs centres sur la tangente au sommet. Trouver l'enveloppe de ces cercles. Que peut-on dire des trajectoires orthogonales ?

9496. — On donne deux paraboles homothétiques définies chacune par le foyer et la directrice. Trouver le centre d'homothétie.

9497. — On donne une hyperbole équilatère et un point A sur une asymptote. Par le point A on mène une sécante rencontrant l'autre asymptote en P et la courbe en Q. Lieu du milieu de PQ. Peut-on prévoir géométriquement que le lieu est une courbe unicursale et déterminer son degré ?

9498. — On donne les équations $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = a \operatorname{sh} u \sin v$. Que sont les courbes $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$? Ce sont des coniques homofocales. Que sont les courbes $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$? Montrer que ces courbes sont orthogonales.

9499. — Déterminer les trajectoires orthogonales des paraboles qui coupent Ox, Oy orthogonalement et dont la direction asymptotique est $x - y = 0$.

9500. — Par un point A situé sur l'axe d'une parabole, on mène une sécante rencontrant la courbe aux points M et M', et par le milieu de MM' on mène à MM' une perpendiculaire Δ. Trouver l'enveloppe de Δ. Classe de cette enveloppe. Ne peut-on la déterminer géométriquement ?

9501. — Trouver les trajectoires orthogonales des coniques ayant deux sommets donnés, appartenant au même axe. Discuter la forme des trajectoires. Calculer le volume engendré par l'une d'elles tournant autour de l'axe donné.

9502. — Soit un carré ABCD. Sur le côté AB on construit un triangle équilatéral AEB extérieur au carré, et dans le pentagone AEBCD ainsi défini on inscrit une ellipse. Quel est le rapport entre l'aire de l'ellipse et l'aire du pentagone ?

9503. — Equation générale des coniques circonscrite à un rectangle. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une droite donnée. Directions asymptotiques du lieu. Peut-on les trouver géométriquement ?

9504. — Etudier les trajectoires orthogonales des coniques circonscrites à un rectangle.

9505. — Développée de la développée d'une hyperbole équilatère.

9506. — Une parabole de grandeur constante tourne dans son plan autour de son foyer. Trouver les trajectoires orthogonales des courbes ainsi obtenues.

9507. — On donne une parabole. Déterminer toutes les coniques qui ont pour centre le sommet de la parabole et qui la coupent orthogonalement en leurs quatre points de rencontre.

9508. — On donne une parabole de foyer F. Soit C le centre de courbure au point M ; trouver le lieu de la projection du point C sur la droite MF.

9509. — Lieu des projections du sommet d'une parabole sur les tangentes.

9510. — Condition pour que les deux coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

soient homothétiques.

9511. — Trouver l'enveloppe des cordes d'une ellipse ou d'une hyperbole qui sont vues du centre sous un angle droit.

9512. — On donne une parabole et un système de cordes parallèles. Trouver l'enveloppe des cercles décrits sur ces cordes comme diamètres.

9513. — On donne une ellipse et deux points M, M' de cette courbe symétriques par rapport au grand axe. Par le point M' on mène une parallèle à la tangente au point M. Trouver l'enveloppe de cette droite quand le point M décrit l'ellipse.

9514. — On donne une ellipse et on considère deux points A et B de cette courbe où les normales sont perpendiculaires. Trouver l'enveloppe de la droite AB. Peut-on voir géométriquement que le lieu est une conique ?

9515. — On donne une conique et deux points O et O' sur cette conique ; ces points sont les sommets de deux faisceaux homographiques dont deux rayons homologues rencontrent la conique en a et a'. Enveloppe de la droite aa'.

9516. — On donne un cercle et on considère une parabole osculatrice au cercle en un point variable M et ayant son axe parallèle à une droite fixe. Trouver l'enveloppe de la droite joignant le point M au deuxième point de rencontre du cercle et de la parabole.

9517. — On donne un cercle et la tangente $A\hat{T}$ en un point A du cercle. On considère une parabole variable ayant pour sommet le point A et pour axe AT, puis on mène une tangente commune au cercle et à la parabole ; lieu du point de contact avec la parabole.

9518. — D'un point M d'une ellipse on peut mener trois normales MA, MB, MC autres que la normale qui a son pied en M. Lieu du centre de gravité du triangle ABC quand M varie.

9519. — On donne une ellipse, un point fixe M sur la courbe et un diamètre variable PQ. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MPQ.

9520. — On considère la courbe $y^2 = x^2 + 2px$; trouver le lieu des projections de l'origine sur les tangentes.

9521. — Lieu des points tels que des trois normales menées de ce point à une parabole l'une soit bissectrice de l'angle des deux autres.

9522. — Calculer la somme des angles que font avec Ox les tangentes communes à la parabole $y^2 - 2px = 0$ et à un cercle ayant pour centre le point $x = 0$, $y = p$.

9523. — Soit $f(x)$ un polynome du troisième degré. L'équation $f(x) = f(y)$ représente une conique et une droite. Étudier la conique. Calculer son excentricité.

9524. — La normale en un point M d'une ellipse rencontre le grand axe en N. Au point N, on mène une perpendiculaire au grand axe, qui rencontre la tangente en M en un point R. Lieu du point R.

9525. — On donne deux axes rectangulaires et un point A dans leur plan. Par le point A on mène une sécante rencontrant Ox en B et Oy en C, et on considère la parabole tangente à Ox en B et à Oy en C. Enveloppe des axes. Lieu des points par où passent deux axes rectangulaires.

9526. — On considère la parabole définie par les équations $x = pt^2$, $y = 2pt$. La normale en un point M rencontre la courbe au point M_1. On joint le point M_1 au sommet O, et par le point M on mène une parallèle à Oy qui rencontre OM_1 au point I. Calculer en fonction de t l'aire du triangle MOI.

9527. — On considère toutes les paraboles passant par deux points A, B et tangentes à une droite fixe parallèle à AB. Lieu du pôle de AB. Enveloppe des paraboles.

9528. — On donne une parabole et une normale fixe. D'un point variable M de cette normale on peut mener deux autres normales MP et MQ à la parabole. Trouver l'enveloppe de PQ.

9529. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et deux points A et B. Par ces points on mène des parallèles AP et BQ à une direction variable, P étant sur Ox et Q sur Oy. Enveloppe de PQ.

9530. — Déterminer les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse. Soit A le sommet d'un de ces triangles ; on joint ce point au foyer F, et on détermine le point B où AF rencontre le cercle de courbure en A. On fait de même pour les trois sommets du triangle. Démontrer que ΣAB est constante.

9531. — Soient A, A′ les extrémités du grand axe d'une ellipse, et une corde variable PQ de direction constante. Trouver le lieu du point de rencontre des droites AP et A′Q.

9532. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un cercle fixe tangent à Ox au point O. On considère une parabole variable ayant pour axe Ox et pour tangente au sommet Oy ; on mène une tangente commune aux deux courbes et on demande le lieu du point où elle touche la parabole.

9533. — Enveloppe des droites rencontrant une ellipse et ses deux axes en quatre points formant une division harmonique.

9534. — Combien peut-on mener de normales communes aux deux paraboles $x^2 - 2py = 0$, $y^2 - 2qx = 0$? Calculer la tangente trigonométrique de la somme des angles que font les normales communes avec Ox.

9535. — On donne un cercle, quatre points sur le cercle et une droite tangente au cercle. Trouver les coniques passant par les quatre points et tangentes à la droite.

9536. — On considère l'hyperbole équilatère $x = t$, $y = \frac{1}{t}$ et les six points de cette courbe définis par les valeurs de t : 0, a, ∞, b, t, c. Démontrer que la droite $(by - 1)c - a(t - b)x - c$ est une droite de Pascal pour l'hexagone défini par les six points considérés dans l'ordre indiqué.

9537. — On considère un cercle de rayon constant dont le centre décrit une parabole. Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à ce cercle.

9538. — On donne une ellipse, un cercle fixe ayant pour centre un foyer de l'ellipse et un cercle variable tangent au premier et ayant son centre sur l'ellipse. Lieu du point de concours des tangentes communes aux deux cercles.

9539. — Soit (D) l'une des asymptotes d'une hyperbole circonscrite au triangle ABC. Par le point I où BC rencontre (D) on mène une parallèle IJ à AB, et par le point A une parallèle AJ à (D). Démontrer que CJ est parallèle à la deuxième asymptote.

9540. — On considère deux paraboles qui ont même sommet et dont les axes sont perpendiculaires ; l'une est fixe et l'autre variable. On leur mène une tangente commune. Lieu du point de contact avec la parabole variable.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

9541. — Les cosinus directeurs d'une verticale par rapport à un trièdre trirectangle sont proportionnels à 2, -2, 1. On donne le plan $4x - y + 3z = 16$, et on demande les cosinus directeurs d'une ligne de plus grande pente de ce plan.

9542. — Trouver les équations de la perpendiculaire commune à l'axe des z et à la droite $x = az + p$, $y = bz + q$.

9543. — Trouver la distance du point (x_0, y_0, z_0) à la droite définie par les équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

9544. — Déterminer une droite rencontrant à angle droit le cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $z = 0$ et la droite

$$\frac{x - a}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

9545. — On donne deux droites rectangulaires D et Δ non situées dans le même plan. Étudier la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer D et Δ et faisant 45° avec Δ. Sections par des plans perpendiculaires à Δ.

9546. — Lieu des centres des sphères passant par deux points A, B et tangentes à un plan. Lieu de la conjuguée de AB par rapport à la sphère.

9547. — Étudier la surface $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $z = a\sin 2\omega$. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les génératrices de ce conoïde.

9548. — Étudier la courbe $x = e^t$, $y = e^{2t}$, $z = te^t$. Combien peut-on mener de plans osculateurs par un point ?

9549. — Étudier la surface engendrée par les normales à un cône de révolution qui rencontrent une droite fixe perpendiculaire à l'axe du cône et ne le rencontrant pas.

9550. — Condition pour que quatre points de la courbe gauche $x = \frac{t}{1+t^2}$, $y = \frac{t^2}{1+t^2}$, $z = \frac{t}{1+t^2}$ soient dans un même plan.

9551. — Calculer l'aire latérale d'un cône ayant pour base une ellipse et dont le sommet se projette sur le plan de cette ellipse en un point du grand axe. Cas d'intégration.

9552. — Calculer la longueur de l'arc de la courbe $x = L(z + a)$, $y = L(z + b)$. Cas d'intégration.

9553. — Définir une direction par deux angles en géométrie analytique à trois dimensions. Étant donnée la droite OD, et la projection OD′ sur le plan des xy, on peut définir OD par les angles $\psi = xOD'$, $\lambda = D'OD$. On considère le cône $\lambda = \psi$; déterminer les courbes qui coupent les génératrices sous un angle constant.

9554. — On considère la surface $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = \frac{v}{u^2 + v^2}$, $z = \frac{1}{u^2 + v^2}$. Quelle est la nature de cette surface ? On la coupe par le plan $z = x + 2y + 1$. Exprimer les coordonnées d'un point de la section en fonction d'un paramètre.

9555. — Trouver les droites de la surface $y z^2 + 2xyz + x^2 - 2y = 0$; contours apparents de la surface sur les plans coordonnés.

9556. — Etudier la surface $x = \operatorname{ch} u + v \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{sh} u + v \operatorname{ch} u$, $z = u + v$. Contour apparent sur le plan des xy.

9557. — Etudier la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer à angle droit une droite fixe D et à être tangente à un cône de révolution dont l'axe est parallèle à D et dont le demi-angle au sommet est égal à 45°. Courbe de contact de la surface et du cône.

9558. — Calculer l'aire de la section du cône $8(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ par le plan $\frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$.

9559. — On donne la courbe $y = x^2$, $z = x^3$. Peut-on trouver des plans rencontrant la courbe en quatre points qui soient les sommets d'un trapèze ?

9560. — Trouver la courbure de la courbe $x^2 - 2yz = 0$, $y^2 + z^2 = 1$ au point $x = 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

9561. — Plan osculateur en un point de la courbe $3z^2 = x^3$, $9y^2 = 4xz$.

9562. — Etant donnée la surface $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{(c^2 - m^2 z^2)^2} = 1$, calculer le volume limité par cette surface et compris entre les plans $z = 0$, $z = c$. On suppose $m < 1$.

9563. — Trouver l'aire engendrée par la courbe $\rho = 2a(1 + \cos\omega)$, tournant autour de Ox.

9564. — On donne la surface $x = \mathrm{L}\frac{uv}{u - v}$, $y = \mathrm{L}\frac{u - v}{u + v}$, $z = \mathrm{L}(u + v)$. Trouver la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction (α, β, γ).

9565. — Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant les tangentes à une hélice circulaire. Cas où l'angle est droit.

9566. — Lieu des centres des sphères passant par un point A et telles que le plan polaire d'un point B donné passe par une droite donnée.

9567. — Déterminer les cosinus directeurs de la normale principale en un point de la courbe $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Quel est le lieu des points dont les coordonnées sont égales à ces cosinus ?

9568. — On donne la courbe $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = bt$. Déterminer la normale principale et la courbure.

9569. — Calculer le rayon de courbure en un point de la courbe $x = \frac{at^2}{2}$, $y = \frac{2}{3}abt$, $z = \frac{b^2}{2}t^3$.

9570. — Si deux courbes planes sont tangentes en un point M, le rapport des rayons de courbure en ce point se conserve en projection orthogonale.

9571. — On considère la surface $\frac{x}{a} + \frac{y^2}{ax - b^2} + \frac{z^2}{ax - c^2} = 0$. Etudier les sections par les plans qui passent par la droite $y = 0$, $ax - b^2 = 0$.

9572. — Toute courbe dont le plan osculateur passe par un point fixe est une courbe plane.

9573. — On coupe la surface $z = xy$ par le plan $x + y + z = 0$; calculer le rayon de courbure de la section à l'origine.

9574. — On considère la courbe $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{z}{a} = \mathrm{L}\frac{y}{a}$. Calculer le rayon de courbure. Rectifier à partir du point $(0, a, 0)$.

9575. — On donne deux plans et un point O dans l'un deux. Trouver le lieu du point M tel que l'on ait $\overline{\mathrm{OM}}^2 = \mathrm{MA}.\mathrm{MB}$, MA, MB étant les distances du point M aux deux plans.

9576. — On donne un cône de révolution limité au sommet et à une section droite et on le coupe par un plan parallèle à un plan tangent. Déterminer le plan de façon que l'aire de la section soit maximum.

9577. — Trouver les courbes qui coupent sous un angle constant les méridiens d'un paraboloïde de révolution.

9578. — Trouver les courbes à pente constante situées sur un cylindre parabolique dont les génératrices sont horizontales.

9579. — Etudier la surface $z = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$. Trouver les lignes de plus grande pente, le plan directeur étant le plan horizontal. Calculer le volume compris entre la surface, le plan $z = 1$ et le plan $z = h$ $(h > 1)$. Si h croît indéfiniment, le volume est-il fini ? Que peut-on dire des plans tangents en tous les points d'une section horizontale ? Section par le plan passant par Oz. On prend comme plan horizontal de projection le plan $z = 0$, comme plan vertical le plan $y = 0$; représenter la surface ; déterminer son intersection avec un cylindre de révolution qui a pour axe Ox.

9580. — On donne deux droites D et D′ et on considère le milieu I de leur perpendiculaire commune. Du point I on abaisse une perpendiculaire IM sur une droite quelconque Δ rencontrant D et D′. Lieu du point M. Etude géométrique et analytique.

9581. — Démontrer que l'intersection de la surface $y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2xyz = 0$ et de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ se compose de quatre cercles.

9582. — Calculer le volume limité par la surface $(x^2 + y^2 + z^2 - ax)^2 = 0$.

9583. — On donne trois axes rectangulaires, un cercle de centre O dans le plan des yz de rayon R et un point A sur Ox d'abscisse a. On considère un point M variable sur le cercle, et la sphère de diamètre AM. Trouver l'enveloppe de cette sphère. Montrer que cette enveloppe est la transformée par inversion d'un cône, le pôle d'inversion étant l'origine.

9584. — Étudier la surface $z = a\dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 - 3xy^2}$. — En donner une génération géométrique. Faire l'épure en prenant Ox pour ligne de terre.

9585. — On donne deux points A, B et une droite D perpendiculaire à la droite AB et non située dans le même plan. On considère toutes les sphères passant par les points A, B et tangentes à la droite D. Trouver le lieu des centres. Les droites conjuguées de AB sont dans un même plan ; trouver leur enveloppe.

9586. — Mener par un point des normales à la surface $x = u\cos\dfrac{v}{2}$, $y = u\sin\dfrac{v}{2}$, $z = k\sin v$.

9587. — Sur chacun des rayons vecteurs de la courbe $\rho = a(1 + \cos\omega)$, on construit le cercle ayant ce rayon comme diamètre et situé dans un plan perpendiculaire au plan de la courbe. Trouver le volume de la surface ainsi engendrée.

9588. — Étant donnée la courbe $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$. Déterminer la normale principale.

9589. — Étudier la surface $x - 3t = z - 2t^3$, $y = 3t^2$. Montrer que c'est un cylindre. Trouver la section droite.

9590. — On considère une courbe dont les tangentes touchent une sphère donnée. Rectifier cette courbe.

9591. — On considère la courbe $y = f(x)$, $z = ax + bf(x) + c$, où l'on suppose $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Trouver le rayon de courbure pour $x = 0$.

9592. — Trouver sur la surface $x^2 - 2py = 0$ les courbes dont les tangentes font avec la droite $y = 0$, $z = 2x$ un angle α défini par l'égalité $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

9593. — Mener par le point $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ une droite rencontrant la courbe $y = x^2$, $z = x^3$ en deux points.

9594. — On considère la surface définie par les équations paramétriques

$$x = \frac{f(u, v)}{\varphi(u, v)}, \qquad y = \frac{g(u, v)}{\varphi(u, v)}, \qquad z = \frac{h(u, v)}{\varphi(u, v)},$$

les polynomes f, g, h, φ étant du deuxième degré. Quel est en général le degré de la surface ? Cas particulier :

$$x = \frac{a(u - 1)}{uv + 1}, \qquad y = \frac{b(v^2 - 1)}{uv + 1}, \qquad z = \frac{c(u + v)}{uv + 1}.$$

Étudier cette surface.

9595. — On considère la surface $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v(\cos u + \sin u) + a^2$. Trouver les courbes de cette surface telles que le plan osculateur en chaque point soit tangent à la surface.

9596. — On considère une hélice circulaire ayant pour axe Oz. Que deviennent les équations de cette hélice si l'on prend comme nouveaux axes de coordonnées la tangente, la normale principale et la binormale en un point de la courbe ?

9597. — Trouver la perspective de la courbe gauche $y = x^2$, $z = x^3$ sur le plan yOz, en prenant pour point de vue le point $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$.

9598. — Trouver sur une sphère une courbe telle que la tangente en chaque point limitée au point de contact et à un plan diamétral fixe ait une longueur constante.

9599. — On considère la surface $(y - 2z)(x^2 + y^2) = (x^2 - z^2)y + 2axz$; montrer qu'elle est engendrée par des droites rencontrant l'axe des z.

9600. — On donne deux cercles quelconques dans l'espace et une droite variable les rencontrant en A et B. Lieu du milieu de AB. Montrer que la surface lieu est susceptible d'une double génération circulaire. Faire l'épure, en supposant l'un des cercles dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical.

9601. — Étudier la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer une parabole et la normale au plan de la courbe passant par le foyer, en faisant avec celle-ci un angle de 45°.

9602. — Chercher les courbes gauches de la famille $mx = az^m$, $py = bz^p$ qui sont des hélices.

9603. — Étudier les quadriques définies par les équations

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 2x - 1 = 0, \qquad x^2 - 2xy - y^2 - 2x + 2z = 0 \quad \text{axe},$$

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + x - y + 2 = 0 \quad \text{(sections circulaires)}, \qquad x^2 + 2xyz = 0 \quad \text{(sections circulaires)},$$

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + x = 0, \qquad (x - y)^2 + (y - z)^2 - (z - x)^2 + x + y + z = 0 \quad \text{(sommet)},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z + y = 0, \quad x^2 + xz - y + 1 = 0 \quad \text{(génératrices)}, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 1 \quad \text{(génératrices)},$$

$$yz + zx + xy = 1, \qquad x^2 + y^2 - 1 + 2xz - 4yx + y^2 = 0, \qquad x^2 - 2y^2 - 6xy + 2x - 4z = 0,$$

$$x^2 - y^2 + 2yz + 2xz + 2x - 1 = 0 \quad \text{génératrices}, \qquad x^2 - xy - xz + yz - x = 0,$$

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2yz - 2zx - 2xy + x + y = 0, \qquad yx + z \quad x - y - z = 0 \quad \text{axes d'une section droite},$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2zx + 2xy + 2x - 2y = 0 \quad \text{(elle est de révolution)}.$$

9604. — On donne un point A sur Ox, un point B sur Oy et un point C sur Oz. Former l'équation générale des quadriques passant par les droites OA, OB, AC, BC. Lieu de leurs centres.

9605. — Former l'équation générale des quadriques passant par les droites Ox, Oy et $y = 0$, $x = a$. Lieu des centres de ces quadriques.

9606. — Cône asymptote d'une quadrique.

9607. — Étudier la conique définie par les équations $y^2 - xz = 0$, $x + z - 2y = 0$. Montrer que cette conique est une parabole et trouver les coordonnées du sommet.

9608. — Trouver toutes les quadriques passant par la courbe $x = \cos\theta$, $y = 1 + \sin\theta$, $z = \operatorname{tg}\theta$. Montrer que le paraboloïde $y = 1 + xz$ contient cette courbe. Trouver le sommet de ce paraboloïde.

9609. — On donne trois axes rectangulaires, et une droite OA passant par l'origine, ayant pour équation $x = y = 2z$. Cette droite est le grand axe d'une ellipse qui a pour centre l'origine et pour demi-longueur d'axes 2 et 1. Former l'équation de la surface engendrée par cette ellipse tournant autour de son grand axe.

9610. — On donne un cercle, un point C et un point A. Existe-t-il une quadrique passant par le cercle, par le point A, et ayant pour centre le point C ? Déterminer le plan tangent au point A. Construire le cône asymptote et les axes de la quadrique.

9611. — On considère la surface $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - \frac{z}{c}$. Quelle est sa nature ? Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les génératrices.

9612. — On donne un plan P et un cercle C non situé dans ce plan. Soit S un point de l'espace qui se projette en O sur le plan P. Quel lieu doit décrire le point S pour que le cône qui a pour sommet ce point et pour base le cercle C soit coupé par le plan P suivant une conique ayant pour centre le point O ? Solutions analytique et géométrique.

9613. — Déterminer la quadrique qui passe par les droites $(y = z + 1,\ x = 0)$, $(z = x + 1,\ y = 0)$, $(x = y - 1,\ z = 0)$.

9614. — Equation générale des quadriques passant par l'axe des z et par le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z = 0$. Lieu des centres.

9615. — On considère l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et l'une des génératrices passant par le point $(a \cos \varphi,\ b \sin \varphi,\ 0)$. Chercher sur cette génératrice le point où le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote.

9616. — Dans un hyperboloïde de révolution à une nappe on donne un plan méridien et une génératrice. L'hyperboloïde est-il défini ? On donne une autre génératrice rencontrant la première. Construire l'axe.

9617. — Dans un paraboloïde on donne un plan directeur et deux génératrices qui se coupent. Le paraboloïde est-il défini ?

9618. — On donne une quadrique passant par les axes Ox, Oy et un point A dans le plan des xy. Par le point A on mène une droite rencontrant Ox en P et Oy en Q. Par le point P passe une génératrice G autre que Ox et par Q une génératrice G′ autre que Oy. Lieu du point de rencontre de G et G′.

9619. — Trouver l'équation générale des quadriques passant par Ox, Oy et admettant comme plans asymptotes relatifs à ces génératrices les plans zOx et zOy.

9620. — Dans un cylindre parabolique, on donne un plan diamétral et la direction des génératrices. Ajouter le nombre de points nécessaires pour déterminer le cylindre, puis le construire.

9621. — On définit un hyperboloïde par trois génératrices. Reconnaître s'il est de révolution.

9622. — Etant donné un ellipsoïde, on considère les cordes telles que les normales aux extrémités soient dans un même plan. Démontrer qu'elles forment l'ensemble des normales aux quadriques homofocales à l'ellipsoïde donné.

9623. — Etant donnée la quadrique $x^2 - y^2 - 2az = 0$, trouver le lieu des points par où passent deux génératrices faisant l'angle $\frac{\pi}{3}$.

9624. — Dans une quadrique, on donne le centre, une section plane et un plan tangent. La surface est-elle déterminée ? Solution analytique.

9625. — On considère les paraboloïdes passant par une droite D, dont l'axe est parallèle à une direction donnée Δ et dont les plans directeurs sont rectangulaires. Combien de paramètres renferme l'équation générale ? Lieu des sommets.

9626. — Lieu des centres des quadriques passant par la courbe $y = x^2$, $z = x^3$.

9627. — Etudier les droites qui rencontrent une quadrique en deux points à l'infini.

9628. — Soient d, d', d'' les distances du centre d'un ellipsoïde aux plans tangents aux extrémités de trois diamètres conjugués. Démontrer que $\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} + \frac{1}{d''^2}$ est constant.

9629. — Dans un hyperboloïde de révolution à une nappe on donne une hyperbole et une génératrice. La surface est-elle déterminée ? La construire. On prendra l'hyperbole donnée dans le plan horizontal de projection.

9630. — On considère un cylindre de révolution tangent à un plan donné en un point donné et tangent à une droite donnée. Le cylindre est-il déterminé ? Trouver le lieu des axes de ces cylindres. Cas où la droite est perpendiculaire au plan.

9631. — On donne un ellipsoïde et on considère les droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires à la surface. Etudier celles de ces droites qui passent par un point donné ou qui sont parallèles à une droite donnée.

9632. — Lieu des points équidistants d'un plan fixe et d'une droite fixe.

9633. — Quelle est la nature de la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 1 = 0$? Former les équations des génératrices. Lieu des projections du centre sur les génératrices.

9634. — On donne un ellipsoïde et un point. Trouver les droites qui passent par le point et qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à l'ellipsoïde. Montrer que ces droites forment un cône.

9635. — Etant donnée la surface $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$, déterminer les points où les génératrices font un angle donné θ.

9636. — Couper une quadrique par un plan de façon que le plan soit normal en tous les points de rencontre.

9637. — On considère les deux paraboloïdes $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$, $2z = -\frac{x^2}{p'} + \frac{y^2}{q'}$ dont la courbe intersection passe par l'origine. Trouver le rayon de courbure à l'origine.

9638. — Dans un paraboloïde, on donne la direction de l'axe, un plan tangent et le point de contact, et une génératrice. Le paraboloïde est-il défini ? Construire ses éléments. On ne donne plus le point de contact, trouver le lieu des sommets.

9639. — Etant donnée la surface $yz + zx + xy + 1 = 0$, exprimer les coordonnées d'un point en fonction des paramètres relatifs aux génératrices passant par ce point.

9640. — Étant donnés un plan et une ellipse, déterminer un point de vue de manière que la projection de l'ellipse sur le plan ait pour foyer la projection d'un des foyers de l'ellipse donnée.

9641. — Déterminer la droite conjuguée de la droite $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ par rapport à la quadrique $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

V. — Géométrie descriptive.

9642. — Construire la perpendiculaire commune à une droite du plan horizontal et à une droite du plan vertical.

9643. — On donne un quadrilatère gauche défini par les projections de ses sommets. Couper ce quadrilatère par un plan de façon que la section obtenue soit un parallélogramme.

9644. — Un trièdre trirectangle a une arête de bout, une autre verticale et la troisième parallèle à la ligne de terre. Couper ce trièdre par un plan de façon que la section soit un triangle donné.

9645. — On donne une droite et un point par leurs projections. On fait tourner le point d'un angle donné autour de la droite. Trouver les projections du point après la rotation.

9646. — On donne les projections d'une droite (D) et d'un point F. Construire un point de la parabole ayant pour foyer F et pour directrice D. Tangente en ce point.

9647. — Perpendiculaire commune à une droite et à la ligne de terre.

9648. — Symétrique d'une droite par rapport au deuxième bissecteur.

9649. — Faire tourner une droite autour d'une verticale de manière que ses projections deviennent rectangulaires.

9650. — Construire le moment d'un vecteur par rapport à un point.

9651. — On donne un plan par ses traces et dans ce plan un cercle défini par son rabattement. Déterminer un point du cercle tel que le rapport de la cote à l'éloignement soit égal à $\frac{1}{2}$.

9652. — Construire les projections d'un pentagone gauche connaissant les projections des milieux des côtés.

9653. — Construire un cube dont la diagonale est verticale.

9654. — Construire un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par trois points donnés.

9655. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent au point (o, o'). Ce point est le centre d'un cercle situé dans le plan et de rayon donné. Mener à ce cercle une tangente dont la projection horizontale fasse avec la ligne de terre un angle donné.

9656. — Trouver sur une droite D un point équidistant de deux droites qui se coupent A et B.

9657. — On donne un plan défini par ses traces, et dans ce plan un cercle déterminé par son centre et son rayon. Trouver les contours apparents d'un cylindre ayant pour base ce cercle et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée.

9658. — On donne un plan défini par ses traces et dans ce plan un cercle défini par son rabattement sur le plan horizontal autour de la trace horizontale. Trouver les contours apparents d'un cône ayant pour base ce cercle et pour sommet un point donné.

9659. — Mener une normale commune à deux cônes qui ont pour bases des cercles dans un même plan horizontal.

9660. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent et dans ce plan un cercle déterminé par son centre et son rayon. Ce cercle est la base d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Mener à ce cylindre un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal.

9661. — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal ; on coupe ce cône par un plan défini par ses traces et on prend la section du cône comme base d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Trouver les contours apparents du cylindre.

9662. — On donne un plan défini par deux droites qui se coupent et dans ce plan un cercle défini par son centre et son rayon. Ce cercle est la base commune à deux cônes ayant pour sommets les points S et T. Mener une normale commune à ces deux cônes.

9663. — Trouver les contours apparents du cône supplémentaire d'un cône donné.

9664. — On donne deux cônes de révolution dont l'un a son axe vertical et l'autre a son axe de bout. Mener par un point donné une tangente commune à ces deux cônes.

9665. — Normales communes à deux cylindres de révolution dont les axes sont l'un vertical et l'autre horizontal.

9666. — On donne un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal ; on suppose que la surface du cône est un miroir, sur lequel tombe un rayon lumineux. Construire le rayon réfléchi.

9667. — On donne un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal. On le coupe par un plan de profil, et on prend la section comme base d'un autre cône de sommet donné. Trouver les contours apparents du deuxième cône. Intersection des deux cônes.

9668. — Mener une normale commune à un cône de révolution à axe vertical et à une droite.

9669. — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal, et une droite située dans le plan horizontal. Mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une parabole. Sommet de cette parabole. Sommet de la projection horizontale et de la projection verticale.

9670. — On donne un plan défini par ses traces, et dans ce plan un cercle défini par son rabattement sur le plan horizontal. Ce cercle est la base d'un cône de sommet donné. Trouver les sections circulaires de ce cône.

9671 — On donne un point (m, m') et par ce point on mène une droite variable D, D' dont les projections sont perpendiculaires. Trouver le lieu de la trace horizontale de cette droite.

9672. — Déterminer un cylindre connaissant un cercle et deux points.

9673. — Déterminer un cône connaissant un cercle et trois points.

9674 — On donne en géométrie cotée un cône ayant pour base une conique située dans un plan défini par son échelle de pente et déterminée par sa projection horizontale qui est un cercle. Construire la trace horizontale de ce cône. Mener à cette trace une tangente par un point du plan horizontal.

9675. — On coupe un cône à base circulaire horizontale par un plan de bout parallèle à une génératrice de contour apparent vertical. La section est une parabole. Trouver le sommet de la projection horizontale.

9676. — On donne un point S et un segment de bout AB. Déterminer un cercle de diamètre AB de façon que le cône ayant pour base ce cercle et pour sommet S soit coupé par le plan horizontal suivant une parabole. Déterminer le sommet de cette parabole.

9677. — Etudier l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes se rencontrent; le sommet de chaque cône est situé sur l'autre cône, et l'un des axes est vertical.

9678. — Intersection d'un cône ayant pour base un cercle horizontal et d'un cylindre ayant pour base un cercle de front. Les génératrices du cylindre sont horizontales.

9679. — Intersection d'un cône et d'un cylindre dont les bases sont deux cercles tangents dans le plan horizontal. Le sommet du cône est sur la génératrice du cylindre qui passe par le point de contact des deux cercles.

9680. — On donne dans le plan horizontal deux cercles tangents extérieurement O_1 et O_2. Sur la verticale du point de contact on prend deux points S_1 et S_2 qui sont les sommets de deux cônes ayant respectivement pour bases les cercles O_1 et O_2. Etudier l'intersection des deux cônes.

9681. — On donne un cône de révolution à axe vertical limité à son sommet et au plan horizontal. Sur une génératrice de ce cône dont la projection horizontale fait 45° sur la ligne de terre on prend un point au milieu de la génératrice. Ce point est le sommet d'un cône de révolution à axe vertical, de base égale à celle du premier. Intersection des deux cônes.

9682. — Intersection d'un cône et d'un cylindre de révolution tangents au plan horizontal.

9683. — Construire une sphère inscrite dans un tétraèdre dont l'une des bases est horizontale.

9684. — On donne une sphère et un point. Mener par ce point une tangente à la sphère, connaissant la projection horizontale de cette tangente.

9685. — On donne en géométrie cotée une sphère et une droite graduée. Trouver la droite conjuguée de la droite donnée par rapport à la sphère.

9686. — On donne un triangle équilatéral ABC et son centre D ; ces points ont respectivement pour cotes 1, 2, 3, 4. Construire la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

9687. — On donne une sphère dont le centre est dans le plan horizontal. Mener à cette sphère une corde de longueur donnée, parallèle à une ligne de front donnée et dont une extrémité soit dans le plan horizontal.

9688. — Mener à une sphère un plan tangent faisant des angles donnés avec les plans de projection.

9689. — Déterminer une sphère tangente à la ligne de terre et qui passe par un cercle donné dans un plan par son centre et son rayon. Même question en remplaçant la ligne de terre par une droite de profil.

9690. — Construire une sphère passant par trois points et tangente au plan horizontal.

9691 — Construire une sphère de rayon donné tangente aux plans de projection et à un plan donné par ses traces.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2217. — Intégrer les équations différentielles

$$y + y'' + y^{\text{IV}} = 0, \qquad y + y' + y'' - y''' - y^{\text{IV}} - y^{\text{V}} = 0.$$

Jean Mourret.

2218. — Dans un plan, on donne un cercle fixe de rayon R et une courbe C. Une droite passant par le centre du cercle rencontre celui-ci en un point A et la courbe C en un point M. Déterminer cette courbe de façon que la tangente au cercle au point A et la tangente à la courbe au point M se coupent sur une droite donnée Δ.

Etudier les différentes formes des courbes C suivant que varient la distance du centre du cercle à la droite Δ et la constante d'intégration.

J. Fitie.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2109. — *Soient* M *un point variable d'une ellipse fixe,* C *le centre de courbure de* M, N *le symétrique de* M *par rapport à* C. *Le lieu du point* N *est une sextique unicursale. Montrer que l'aire algébrique totale de cette courbe est égale à l'aire de l'ellipse.*

Prenons pour axes de coordonnées les axes principaux de l'ellipse et représentons-la par l'équation habituelle

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

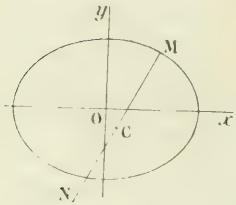


Fig. 1.

Nous choisissons pour paramètre variable l'anomalie excentrique du point M, le nombre φ. Les coordonnées du point M sont

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

Le moyen le plus court de calculer les coordonnées du point C consiste à regarder ce point comme étant le point de contact de la normale avec son enveloppe, le point caractéristique de la normale. Soient X et Y les nombres ainsi obtenus et x', y' les coordonnées du point N. Nous avons

$$x' + x = 2X, \qquad y' + y = 2Y.$$

D'où les coordonnées du point N, x' et y'. Or nous savons que la normale a pour équation

$$(X - x)\frac{dx}{d\varphi} + (Y - y)\frac{dy}{d\varphi} = 0,$$

ou

$$-(X - a\cos\varphi)a\sin\varphi + (Y - b\sin\varphi)b\cos\varphi = 0,$$

ou enfin

$$aX\sin\varphi - bY\cos\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Prenons maintenant la dérivée par rapport à φ; nous aurons

$$aX\cos\varphi + bY\sin\varphi - c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à résoudre ces deux équations par rapport à X et Y pour avoir les coordonnées du point C. Cette opération se fait en multipliant les deux équations par $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ et ajoutant puis, ensuite, par $-\cos\varphi$ et $+\sin\varphi$ et ajoutant encore, ce qui donne

$$X = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi \qquad \text{et} \qquad Y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

Par conséquent, les coordonnées du point N sont, en supprimant l'accent qui ne sert plus à rien,

$$x = \frac{2c^2}{a}\cos^3\varphi - a\cos\varphi, \qquad y = -\frac{2c^2}{b}\sin^3\varphi - b\sin\varphi,$$

ou enfin, toutes réductions faites,

$$x = \frac{\cos\varphi}{a}(2c^2\cos^2\varphi - a^2) \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{\sin\varphi}{b}(2c^2\sin^2\varphi + b^2).$$

Construction de cette courbe. — Les deux fonctions x et y sont périodiques et ont pour période 2π. Donc il suffira de faire varier φ dans un intervalle d'étendue 2π de α à $\alpha + 2\pi$, α étant un nombre quelconque. Mais nous remarquons que le changement de φ en $-\varphi$ laisse x invariable et change y en $-y$; ceci indique une symétrie par rapport à Ox et permet de restreindre de moitié l'intervalle de variation de φ : en effet, prenons pour intervalle total $(-\pi, +\pi)$. Nous voyons que, quand φ parcourt la moitié $(0, \pi)$ de cet intervalle, l'angle $-\varphi$ parcourt l'autre moitié. D'autre part, le point

qui correspond à l'angle $-\varphi$ est symétrique de celui qui correspond à l'angle φ; donc, il suffira de construire la portion de courbe qui correspond à l'intervalle $(0, \pi)$ et de prendre ensuite la symétrique par rapport à Ox. Il est facile de voir que l'on peut aussi réduire le nouvel intervalle; changeons, en effet, φ en $\pi - \varphi$, y ne change pas, x se change en $-x$; par conséquent les deux points correspondants sont symétriques par rapport à Oy, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffira de faire varier le premier nombre φ dans la première moitié de l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nous aurons ainsi un quart de la courbe.

Quand φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, y reste toujours négatif, x part de $\frac{2c^2 - a^2}{a}$ pour arriver à 0.

Précisons ces résultats à l'aide des dérivées.

La dérivée de x, $\frac{dx}{d\varphi}$, est égale à

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-6c^2 \cos^2\varphi \sin\varphi + a^2 \sin\varphi}{a}.$$

De même
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{-6c^2 \sin^2\varphi \cos\varphi - b^2 \cos\varphi}{b}.$$

Nous apercevons de suite que $\frac{dy}{d\varphi}$ est toujours négatif, donc la fonction y est constamment décroissante.

Quant à la fonction $\frac{dx}{d\varphi}$, elle s'annule pour $\cos^2\varphi = \frac{a^2}{6c^2}$ ou $\cos\varphi = \frac{a}{c\sqrt{6}}$.

Nous avons donc à distinguer deux cas : $a^2 < 6c^2$ ou $a^2 > 6c^2$.

$a^2 < 6c^2$ donne $5a^2 > 6b^2$. Comme a^2 est plus grand que b^2, cette inégalité est facile à réaliser. Dans ce cas, $\frac{dx}{d\varphi}$ est négatif au départ, s'annule pour $\cos\varphi = \frac{a}{c\sqrt{6}}$ et est positif ensuite; la fonction x est donc d'abord décroissante, puis croissante; elle passe par un minimum pour $\cos\varphi = \frac{a}{c\sqrt{6}}$.

Voyons ses signes. Au départ, elle est égale à $\frac{2c^2 - a^2}{a}$. Elle est positive si $2c^2 > a^2$, ce qui donne $a^2 > 2b^2$; cette inégalité est plus difficile à réaliser que la précédente. Si elle a lieu, la première aura lieu aussi, mais la réciproque n'est pas vraie. Plaçons-nous dans ce cas.

Alors la fonction x est d'abord positive; elle décroît et s'annule pour $\cos\varphi = \frac{a}{c\sqrt{2}}$; la valeur de φ correspondante se présente avant l'autre; la fonction x devient négative et continue à décroître. Elle atteint un minimum quand $\cos\varphi = \frac{a}{c\sqrt{6}}$; elle croît ensuite jusqu'à 0.

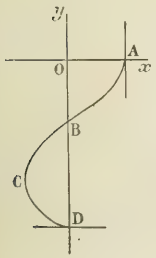


Fig. 2.

Si nous rapprochons tous ces résultats, si nous remarquons qu'au départ $\frac{dx}{d\varphi}$ est nul, par suite, la tangente est verticale, qu'à l'arrivée $\frac{dy}{d\varphi}$ est nul, par suite, la tangente horizontale, nous aurons l'arc de courbe ABCD, sur lequel sont marqués les points principaux.

En tenant compte maintenant des deux symétries qui ont été signalées on peut achever facilement la courbe et on a la ligne indiquée dans la figure 3.

Supposons maintenant $a^2 = 2b^2$ $a = b\sqrt{2}$.

Alors les points A et B se confondent tous les deux avec le point O, la première tangente continue

à être verticale : la courbe totale ne se compose plus que de deux boucles et a la forme marquée dans la figure 4.

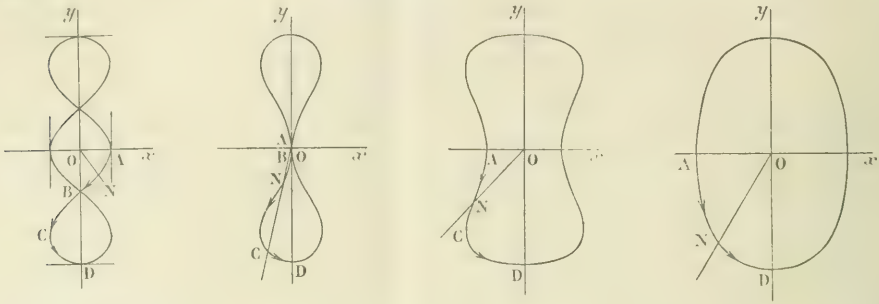


Fig. 3. Fig. 4 Fig. 5. Fig. 6

Supposons maintenant $\frac{6b^2}{5} < a^2 < 2b^2$. Alors x ne s'annule plus ; la première valeur de x est négative ; il y a encore un minimum et on a la courbe indiquée dans la figure 5. Enfin, si a^2 tombe au-dessous de $\frac{6b^2}{5}$ le minimum de x disparaît, le point C disparaît et la courbe entière devient un ovale (fig. 6).

Calcul de l'aire. — Considérons le rayon vecteur ON : quand le point N se meut dans le sens indiqué, le rayon ON balaye le quart de l'aire algébrique comprise à l'intérieur de la courbe : cette aire est évaluée positivement dans les trois derniers cas, c'est-à-dire quand la boucle intérieure a disparu. Dans le cas où la boucle intérieure existe, on trouve les aires des boucles extérieures avec le signe + et l'aire de la boucle intérieure avec le signe —, résultat conforme aux conventions de signes faites sur les aires.

J'ai donc à évaluer

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,dy - y\,dx)$$

et à multiplier le résultat par 4.

L'aire totale est ainsi

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,dy - y\,dx).$$

Calculons $x\,dy - y\,dx$.

Nous avons

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left[-6c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi(2c^2 - b^2 - a^2) + 2c^2(c^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi - a^2b^2)\right],$$

ou

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left[-6c^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2c^2(c^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi - a^2b^2)\right].$$

Exprimons les lignes trigonométriques qui figurent là en fonction de celles de l'arc double. Nous obtiendrons

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left[-6c^4\frac{\sin^2 2\varphi}{4} + 2c^2\left(c^2\frac{1-\cos 2\varphi}{2} - 2b^2c^2\frac{1+\cos 2\varphi}{4} - a^2b^2\right)\right],$$

ou encore

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left[-\frac{3c^4}{2}\sin^2 2\varphi + \frac{c^4}{2} - \frac{c^4}{2}\cos^2 2\varphi - c^2a^2 - b^2c^2\cos 2\varphi - a^2b^2\right].$$

Exprimons de même $\sin^2 2\varphi$ et $\cos^2 2\varphi$ à l'aide de l'arc double. Nous aurons

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left[-\frac{3c^4}{2}\,\frac{1-\cos 4\varphi}{2} + \frac{c^4}{2}\,\frac{1+\cos 4\varphi}{2} + \frac{c^4}{2} - (c^2(a^2+b^2)\cos^2\varphi + a^2b^2\right].$$

ou enfin

$$x\,dy - y\,dx = \frac{d\varphi}{ab}\left(c^4\cos 4\varphi - (c^2(a^2+b^2)\cos 2\varphi + a^2b^2\right).$$

Il n'y a plus qu'à intégrer et nous trouvons ainsi

$$\int (x\,dy - y\,dx) = -\frac{c^4\,\dfrac{\sin 4\varphi}{4} - (c^2(a^2+b^2)\,\dfrac{\sin 2\varphi}{2} + a^2b^2\varphi}{ab}.$$

Si nous prenons cette intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la somme des variations de cette fonction entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, nous voyons que les deux sinus sont nuls aux deux bornes, et il reste $ab\,\frac{\pi}{2}$.

En multipliant par 2, nous avons finalement

$$A = \pi ab,$$

ce qui est bien la valeur de l'aire de l'ellipse.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Ch. Schmidt, à Château-Thierry ; L. Simon, à Fourmies ; L. Naucelle, à La Châtre ; M. Roi ; A. Le Marchand, à Paris.

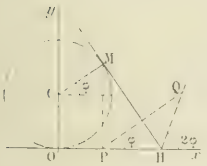
Assez bonnes solutions : MM. Vivin Pol, lycée de Nancy ; R. Dufour, à Nancy ; M. Roux, Le Creusot ; G. Bétier, à Poitiers ; G. Lach, à Denain ; A. Beulande.

2110. — *On considère un cercle* (C) *et une tangente fixe* T *à ce cercle. Soit* P *la projection sur* T *d'un point quelconque* M *de* C. *L'enveloppe du cercle de centre* M *et de rayon* MP *se compose de la droite* T *et d'une sextique unicursale fermée, à deux points de rebroussement. Montrer que :*

1° *l'aire de cette courbe est équivalente à cinq fois l'aire du cercle ;*

2° *la différence des arcs de la sextique compris entre les points de rebroussement est égale à deux fois le périmètre du cercle.*

Prenons comme axe des x la tangente T et comme axe des y le diamètre perpendiculaire ; nous désignerons par R le rayon du cercle et par φ l'angle de CM avec Ox.



Le cercle (M) de centre M et de rayon MP touche son enveloppe d'abord au point P, puis au point Q, symétrique de P par rapport à la tangente MH ; car cette droite PQ est la limite de la corde commune au cercle (M) et au cercle infiniment voisin ; de plus, la tangente en Q au cercle (M), et par suite à l'enveloppe, est la droite QH qui fait avec Ox l'angle 2φ.

On trouve aisément que les coordonnées du point Q sont

$$(1)\quad x = R\cos\varphi(1 + 2\sin\varphi + 2\sin^2\varphi), \qquad y = 2R\sin^2\varphi(1 + \sin\varphi).$$

Ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe. Si l'on y remplace $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, on reconnaît que la courbe est unicursale et du sixième degré. Pour la construire nous utiliserons les formules (1).

On voit sans peine que la courbe est symétrique par rapport à Oy ; on en construira la moitié en faisant varier φ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et on repliera la courbe obtenue autour de Oy.

Les dérivés de x et y par rapport à φ sont

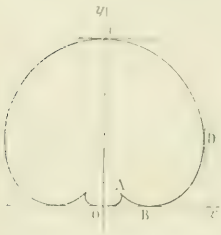
$$\frac{dx}{d\varphi} = R\cos 2\varphi(3\sin\varphi + 2), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = R\sin 2\varphi(3\sin\varphi + 2).$$

et par suite la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 2\varphi$, comme nous l'avions prévu.

On en déduit les variations suivantes de x et y : α désigne l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 qui a pour sinus $\frac{2}{3}$.

φ	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		α		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	0	↗	$R(\sqrt{2}-1)$ (max.)	↘	$\frac{5\sqrt{5}}{27}R$ (min.)	↘	R	↗	$R(\sqrt{2}+1)$ (max.)	↘	0
y	0	↗	$\frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{8R}{27}$ (max.)	↘	0 (min.)	↗	$\frac{R(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$	↘	4R
$\operatorname{tg} 2\varphi$	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↘	$-4\sqrt{5}$	↘	0	↘	$+\infty$ | $-\infty$	↘	0

On peut alors construire la branche de courbe OABDE, qui présente un point de rebroussement A, correspondant à la valeur α, qui touche Ox au point B, d'abscisse R, et qui rencontre Oy a angle droit au point E, d'ordonnée 4R ; on prend ensuite le symétrique de cette courbe par rapport à Oy.



L'aire totale limitée par cette courbe est

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\,dy - y\,dx).$$

On peut écrire

$$x\,dy - y\,dx = 2R^2 \sin\varphi \cos^2\varphi (3\sin\varphi + 2)(1 + 2\sin\varphi + 2\sin^2\varphi)$$
$$- 2R^2(1 + \sin\varphi)\sin^2\varphi\cos^2\varphi(3\sin\varphi + 2)\,d\varphi$$

ou

$$x\,dy - y\,dx = 2R^2 \sin\varphi(3\sin\varphi + 2)(1 + \sin\varphi)(1 + 2\sin\varphi + 2\sin^2\varphi) - \sin\varphi(1 + 2\sin^2\varphi)]\,d\varphi,$$

et la quantité entre crochets se réduit à 1.

Donc
$$x\,dy - y\,dx = 2R^2(3\sin^3\varphi + 5\sin^2\varphi + 2\sin\varphi)\,d\varphi.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$\int (x\,dy - y\,dx) = R^2(\cos^3\varphi - 10\cos\varphi - 5\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi).$$

et par suite
$$A = 5\pi R^2.$$

Nous avons
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2(3\sin\varphi + 2)^2 d\varphi^2$$

et
$$ds = \pm R(3\sin\varphi + 2)d\varphi.$$

Si φ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et α, $3\sin\varphi + 2$ est négatif et l'on a

$$ds = -R(3\sin\varphi + 2)d\varphi,$$

et par suite

$$\text{arc OA} = s_1 = -R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (3\sin\varphi + 2)d\varphi.$$

Lorsque φ est supérieur à α, $3\sin\varphi + 2$ est positif, on a alors

$$ds = R(3\sin\varphi + 2)d\varphi,$$

et
$$\text{arc ABDE} = s_2 = R\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin\varphi + 2)d\varphi.$$

On en déduit
$$s_2 - s_1 = R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin\varphi + 2)d\varphi = 2\pi R,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

M. ROUX, au Creusot.

Bonnes solutions par MM. Gaston Bétier, 20e d'artillerie, à Poitiers ; G. Esteben ; R. Dufour, école normale de Nancy ; G. Lach, à Douai ; A. Le Marchand, à Paris ; Marescalchi ; L. Naucelle, à La Châtre ; E. Rême, Conducteur des ponts et chaussées, à Batna ; Maurice Roi ; C. S. à Château-Thierry ; A. Roussiau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies.

2111. — *Discuter la surface*
$$(a^2z - y^2)^2 = 4a^3x \qquad (a = \textit{constante}).$$

On voit immédiatement sur l'équation donnée que la surface est symétrique par rapport au plan xOz et qu'elle est située tout entière du côté des x positifs par rapport au plan des yz. Ce plan lui est tangent en tous les points de la parabole P définie par les équations $x = 0$, $y^2 - a^2z = 0$.

Le plan des zx coupe la surface suivant la parabole Q, $y = 0$, $z^2 - 4x = 0$, et le plan tangent en chaque point de cette parabole est perpendiculaire au plan des zx.

Cette surface est susceptible de deux modes de génération fort simples.

1° Un plan parallèle au plan yOz, $x = \lambda^2$, coupe la surface suivant deux paraboles P_1, P_2 ayant pour équations $y^2 - a^2(z \pm 2\lambda) = 0$. On voit sans peine que ces deux courbes ont leurs sommets sur la parabole Q, et qu'on peut les faire coïncider avec P par un déplacement de translation.

Il en résulte qu'on peut engendrer la surface en imprimant à la parabole P un mouvement de translation tel que son sommet décrive la parabole Q.

2° Un plan parallèle au plan zOx, $y = k$, coupe la surface suivant la parabole Q_1,
$$(a^2z - k^2)^2 - 4a^3x = 0.$$
Cette parabole a son sommet sur P, et on peut la faire coïncider avec Q par un déplacement de translation.

On peut donc engendrer la surface en imprimant à Q un mouvement de translation tel que son sommet décrive P.

Remarquons en terminant que tout plan parallèle au plan des xy, $z = h$, coupe la surface suivant une courbe du quatrième degré, $x = \dfrac{(y^2 - a^2h)^2}{4a^4}$, qu'on discute aisément en prenant y comme variable indépendante, et qui est bitangente au plan des yz, les points de contact étant situés sur la parabole P.

C. S. à Château-Thierry.

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Douai et L. Simon, à Fourmies.

ÉCOLE CENTRALE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

Géométrie, Géométrie cotée et Géométrie descriptive (M. Malloizel.)

Géométrie.

9540. — Lieu du point M, tel que le rapport de ses distances à deux droites données, concourantes, soit égal à un rapport donné.

9541. — Qu'appelle-t-on rapport anharmonique de quatre points sur une droite ?

9542. — On donne deux points A et B sur une droite. Trouver deux points C et D sur cette droite, conjugués par rapport à A et B, et tels que CD soit égale à une longueur donnée.

9543. — On donne trois points A, B, ω sur une droite. Trouver sur cette droite deux autres points C et D, conjugués l'un de l'autre par rapport à A et à B, et tels que ω soit le milieu de CD.

9544. — Etant donnés quatre points, A, B, C, D sur une droite, trouver sur cette droite un point O, tel que $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \overline{OC}\cdot\overline{OD}$. Trouver deux points U et V, conjugués l'un de l'autre, à la fois par rapport à A et B, à C et D.

9545. — Une droite se déplaçant parallèlement à elle-même rencontre deux courbes A et B en des points α et β. On considère le point M, milieu de αβ. Trouver la tangente en M à la courbe décrite par ce point.

9546. — Construire un cercle orthogonal à trois cercles donnés.

9547. — Tracer un cercle tangent à trois cercles passant par un même point.

9548. — Angle d'une droite avec une courbe. Que peut on dire des droites qui coupent deux cercles donnés sous le même angle ? Mener par deux points A et B, un cercle coupant deux cercles donnés sous le même angle.

9549. — Trouver un cercle de rayon donné tangent à deux cercles donnés. Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés. Points à l'infini du lieu.

9550. — Tracer un cercle de rayon donné qui en coupe deux autres sous des angles donnés

9551. — Deux figures F, F′ sont inverses l'une de l'autre par rapport à un point O ; on prend les inverses de F et de F′ par rapport à ce même point O. Montrer que les nouvelles figures F, F′, sont elles-mêmes inverses l'une de l'autre par rapport au point O.

9552. — Soit P la projection d'un point M sur une droite AB. Lieu du point M lorsque $\dfrac{\overline{MP}^2}{\overline{AP}\cdot\overline{PB}}$ Cte.

9553. — Plan polaire d'un point par rapport à deux plans.

9554. — Résoudre un trièdre connaissant les trois faces.

9555. — Mener par un point un plan faisant des angles donnés avec deux plans donnés. Faire l'épure.

9556. — Lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une sphère et dont le plan reste parallèle à un plan fixe

9557. — Lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères. Lieu des centres des sphères orthogonales à deux sphères données.

9558. — Axe radical de trois sphères.

9559. — Construire une sphère passant par trois points et tangente à une droite D. Faire l'épure en prenant D pour ligne de terre.

9560. — Construire un tétraèdre ABCD, connaissant une face ABC, et la sphère inscrite au tétraèdre. Construire un tétraèdre ABCD dont on connaît une face et sachant que les trois autres faces sont tangentes à une sphère donnée. Combien y a-t-il de solutions ? Faire l'épure.

9561. — On donne deux droites D et Δ et une sphère. Construire un tétraèdre dont les plans de deux faces passent par D et Δ et admettant la sphère comme sphère inscrite.

9562. — Faire passer un cône de révolution par trois droites données concourantes.

9563. — On donne l'axe, un sommet A et deux points B et C d'une ellipse. Trouver l'autre sommet A′.

9564. — Sommet d'une parabole dont on connaît l'axe et deux points.

9565. — Lieu des projections des foyers sur les tangentes à une ellipse.

9566. — On donne un cercle O et un point P (intérieur) ; on joint ce point P à un point M du cercle et on mène en M la perpendiculaire MD à la droite PM. Enveloppe de cette droite D quand M décrit le cercle.

9567. — Etant données deux droites et un point sur chaque droite, trouver le lieu des centres des coniques tangentes en A à la première droite et en B à la seconde.

9568. — On donne une hyperbole par ses asymptotes et un point. Tangente en ce point. Intersection de l'hyperbole avec une droite.

9569. — Déterminer les éléments principaux d'une conique donnée par un foyer et trois tangentes.

9570. — Construire une conique connaissant un foyer et trois points.

9571. — Construire une conique passant par trois points donnés *a*, *b*, *c* et homothétique à une ellipse donnée.

9572. — Trouver les foyers d'une section plane d'un cylindre de révolution.

9573. — Plan tangent en M à la surface du second degré définie par le point M et le quadrilatère gauche ABCD.

9574. — Surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites données. Plan tangent en un point. Etant donnée la projection verticale *m′* d'un point de la surface, trouver la projection horizontale *m*.

9575. — On donne deux droites concourantes en O ; lieu des droites issues de O et faisant le même angle avec les deux droites données. Lieu des droites rencontrant deux droites données de l'espace et faisant le même angle avec ces deux droites.

9576. — Mener par une droite donnée un plan coupant deux plans donnés suivant deux droites rectangulaires. Mener par une droite un plan coupant un paraboloïde hyperbolique suivant une hyperbole équilatère. Epure.

9577. — Mener par un point un plan coupant deux paraboloïdes hyperboliques suivant deux hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles.

9578. — On donne un paraboloïde hyperbolique par un plan directeur P et deux génératrices A et B, non parallèles à P. Un second paraboloïde est défini de la même manière. Mener par un point donné un plan coupant les deux paraboloïdes suivant des paraboles.

Géométrie cotée.

9579. — Mener par une droite graduée sa un plan de pente donnée.

9580. — Angle de deux plans donnés par leurs lignes de pente.

9581. — Mener par un point un plan perpendiculaire à deux plans donnés par leurs échelles de pente.

9582. — Perpendiculaire commune à deux droites. Perpendiculaire commune à deux droites dont l'une est horizontale. Perpendiculaire commune à deux droites graduées dont les projections sont parallèles.

9583. — On donne quatre points a, b, c, d et leurs cotes. Ce sont les sommets d'un tétraèdre ; établir la ponctuation.

9584. — Projeter un triangle $a(5)$, $b(7)$, $c(3)$ sur un plan donné par son échelle de pente. Construire la projection du tronc de prisme ayant pour bases ces deux triangles.

9585. — On donne trois points a, b, c, de cotes connues. Par ces trois points passe un cercle, base d'un cône de révolution de hauteur donnée. Projection du cône.

9586. — Sphère circonscrite à un tétraèdre dont une face abc repose sur le plan horizontal. Sphère passant par les quatre points $a(0)$, $b(0)$, $c(2)$, $d(6)$. Sphère passant par les quatre points $a(0)$, $b(2)$, $c(4)$, $d(6)$.

9587. — Sphère circonscrite à un tétraèdre reposant sur le plan horizontal. Intersection de cette sphère avec le plan d'une face.

9588. — Intersection de deux sphères. Points communs à trois sphères.

9589. — Trace du cône circonscrit à une sphère tangente au plan horizontal, de sommet un point s dont la cote est double de celle du centre de la sphère.

9590. — On donne une sphère de centre $c(3)$, tangente au plan horizontal, et on considère le cône de sommet $s(6)$ circonscrit à la sphère. Section de ce cône par un plan vertical P.

9591. — Intersection d'un cône de sommet $s(4)$, dont la base dans le plan de cote 0 est un limaçon de Pascal, avec un plan donné par son échelle de pente.

9592. — Dans le plan de cote 0, se trouve une hyperbole. C'est la base d'un cône de sommet $s(4)$. a étant un point de l'hyperbole, trouver la section du cône par le plan perpendiculaire à sa, en son milieu m.

9593. — Un tétraèdre repose par sa base abc dans le plan horizontal ; le sommet d est le sommet d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base est le cercle inscrit au triangle abc. Un cylindre dont les génératrices sont parallèles à db a pour base une ellipse inscrite dans le triangle atc. Intersection des deux surfaces ; plans limites.

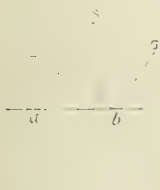
9594. — Un tétraèdre $abcd$ repose par sa face bcd sur le plan horizontal de cote 0 ; b est le sommet d'un cône dont la base est une courbe du plan acd projetée suivant une conique tangente aux côtés du triangle acd ; c est le sommet d'un autre cône dont la base dans le plan bad est une courbe projetée suivant une conique inscrite dans le triangle bad. Intersection de ces deux cônes.

9595. — Dans le plan horizontal, on donne un cercle et une ellipse de centres o et ω ; ce sont les bases de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles aux droites oa, ωa (a de cote α). Intersection. Ligne des points doubles en projection.

9596. — Intersection de deux cônes ayant pour bases dans le plan de cote 0 deux paraboles, et pour sommets deux points s, s', de même cote.

9597. — Dans le plan horizontal de cote 0, on donne une hyperbole et un cercle dont a est un point d'intersection. Un cône de sommet s (de cote α) a pour base le cercle ; un cylindre de génératrices sa a pour base l'hyperbole. Intersection ; point et tangente ; points remarquables.

9598. — On donne dans le plan de cote 0, une hyperbole et un cercle; soient o le centre de l'hyperbole, a l'un des points de rencontre du cercle avec l'une des asymptotes de l'hyperbole, z un point donné. L'hyperbole est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à zo, le cercle est la base d'un second cylindre dont za est une génératrice. Intersection ; points à l'infini.



9599. — Dans le plan horizontal de cote 0, on donne deux cercles, bases de deux cônes de sommets s et σ; les génératrices sa et σb sont parallèles. Intersection des deux cônes.

9600. — Intersection de deux cylindres qui ont comme base commune un cercle du plan horizontal.

9601. — Surfaces topographiques. Représenter un col, un sommet. Intersection d'une surface topographique avec un plan, avec une droite.

Géométrie descriptive.

9602. — On donne trois droites (a, a'), (b, b'), (c, c'), qui sont les lignes de pente de trois plans ; intersection de ces trois plans.

9603. — Abaisser d'un point (a, a') la perpendiculaire sur une droite (d, d'). Abaisser d'un point la perpendiculaire sur une droite de profil.

9604. — On donne deux segments $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ et une direction (δ, δ'). Projeter le premier segment sur le plan mené par le second parallèlement à (δ, δ').

9605. — Projeter un segment $(ab, a'b')$ sur une droite quelconque. Soient (c, c'), (d, d') les projections obtenues. Etablir la ponctuation du tétraèdre ABCD.

9606. — Trouver la projection verticale $c'd'$ d'une droite dont on connaît la projection horizontale cd, sachant qu'elle

passe par un point (c, c'), et qu'elle est rectangulaire avec une droite $(ab, a'b')$. Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites. Cas où la droite $(ab, a'b')$ serait de profil.

9607. — Mener la perpendiculaire commune à deux droites quelconques.

9608. — Une droite horizontale s'appuie sur deux droites données ; trouver la position pour laquelle le segment intercepté a une longueur donnée.

9609. — On donne les projections d'un triangle ABC; trouver le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

9610. — On donne une droite $(ab, a'b')$ et la projection verticale $a'd'$ d'une autre droite. Sachant que l'angle DAB est droit, construire dans son plan un carré s'appuyant sur DA et AB.

9611. — Par une droite horizontale $(ab, a'b')$, mener un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal. Soit (ω, ω') un point de ce plan, défini par sa projection horizontale ω ; c'est le centre d'un hexagone régulier dont un côté est sur $(ab, a'b')$. Construire les projections de cet hexagone.

9612. — On donne un plan par deux droites qui se coupent en un point (o, o'). Dans ce plan se trouve un cercle de rayon donné et de centre (o, o'). Mener une normale à ce cercle par un point de la ligne de terre.

9613. — On donne deux triangles $(abc, a'b'c')$; $(\alpha\beta\gamma, \alpha'\beta'\gamma')$. Ce sont deux équerres opaques. Représenter l'ensemble.

9614. — On donne un prisme par sa base qui est un pentagone dans le plan horizontal et par la direction de ses arêtes. Section droite de ce prisme par un plan passant par un point de la ligne de terre.

9615. — On donne une pyramide triangulaire reposant sur le plan horizontal. Elle est traversée par une règle comprise entre deux droites parallèles. On demande l'ensemble de la pyramide et de la règle.

9616. — Intersection de deux pyramides.

9617. — Intersection de deux prismes dont les génératrices sont horizontales et les bases sont deux triangles $a'b'c'$, $\alpha'\beta'\gamma'$ situés dans le plan vertical.

9618. — Intersection de deux prismes : l'un a pour base un pentagone dans le plan horizontal et ses génératrices sont de front ; l'autre a pour base un quadrilatère dans le plan vertical et ses génératrices sont de bout.

9619. — On donne quatre points $(abcd, a'b'c'd')$. Ce sont les sommets d'un tétraèdre ; lignes vues et cachées ; sphère circonscrite à ce tétraèdre.

9620. — Dans un plan donné par ses traces, se trouve un quadrilatère dont on donne la projection horizontale. C'est la base d'une pyramide dont le sommet est sur la ligne de terre. Volume de cette pyramide.

9621. — On donne trois points (a, a'), (b, b'), (c, c') ; le triangle ABC est la base d'un tétraèdre de hauteur donnée dont le pied de la hauteur est au centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Construire le tétraèdre.

9622. — Construire une pyramide dont la base est un quadrilatère ABCD reposant dans le plan horizontal ; on connaît les quatre côtés et l'angle A de la base, les dièdres AB et CD, et la longueur de l'arête SA.

9623. — Construire un tétraèdre DABC reposant par sa face ABC sur le plan horizontal. On connaît ABC, le dièdre BC, la longueur de l'arête AD et on sait que les arêtes AB et CD sont rectangulaires.

9624. — Construire un tétraèdre régulier connaissant un sommet et sachant qu'une arête se trouve sur une droite, (d, d').

9625. — Un cube a un sommet en A et une arête suivant la droite D. Construire ce cube.

9626. — Construire un cube connaissant un sommet et sachant qu'une diagonale est dirigée suivant une droite donnée.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2219. Montrer que si $a > b$, l'équation

$$(x^2 - h^2)(ax + b\sqrt{a^2 - b^2})^2 - b^2x^2 = 0$$

n'a jamais que deux racines réelles.

E. N. Barisien.

2220. — On considère un cercle fixe de centre O et deux diamètres fixes et rectangulaires de ce cercle, Ox et Oy. Par le point A, où Ox coupe le cercle, on mène une tangente fixe Δ, et on considère une tangente mobile qui rencontre Δ en M et Oy en N. On demande :

1° Le lieu de l'orthocentre du triangle OMN et l'enveloppe de la hauteur issue du point N ;

2° Le lieu du point de concours des diagonales du trapèze formé par les deux tangentes et par les axes. Construire ce lieu et trouver l'aire comprise entre cette courbe et l'asymptote.

R. Manes, à Albi.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Février 1914. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2128. — 1° *Intégrer à l'aide des séries l'équation différentielle*

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x.$$

L'intégrer aussi en partant de ce fait que l'équation sans second membre admet la solution $y = x^2$.

2° *Déterminer celles des intégrales dont la dérivée première se réduit à* 0, *et la dérivée seconde à* -2, *pour* $x = 0$. *Construire la courbe représentative de cette fonction, et vérifier qu'elle ne rencontre pas l'axe des* x.

3° *En appelant* y *cette intégrale particulière, montrer que la fonction* $f(x) = \frac{y'}{y} - \frac{2}{x+1}$ *est continue de* 0 *à* $+\infty$ *et a une infinité de racines dans cet intervalle. Donner approximativement ces racines, ainsi que la forme de la courbe* $y = f(x)$, *et en déduire l'explication de ce fait que l'aire de la courbe* $y = f(x)$, $\int_0^x f(x)dx$, *est toujours négative et nulle un nombre infini de fois.*

1. Pour intégrer l'équation différentielle par une série, nous allons déterminer les coefficients d'une série y :

$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

qui vérifie identiquement l'équation. Pour cela, nous formons la série y, la série dérivée

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

et la série dérivée de celle-ci :

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

Cela fait, nous portons ces expressions dans le premier membre de l'équation, $x^2y'' - 2xy' + 2y$, et nous avons la série suivante :

$$2a_0 + 2a_2x^2 + \cdots + (n^2 - 3n + 2)a_nx^n + \cdots$$

Or $n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$; donc le premier membre fournit le développement suivant :

$$2a_0 + 2a_2x^2 + \cdots + (n-1)(n-2)a_nx^n + \cdots$$

Développons maintenant le second membre ; c'est $2 + 2x^3 \sin x$; par conséquent, il donne de suite

$$2 + 2x^3\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

ou enfin

$$2 + \frac{2x^4}{1!} - \frac{2x^6}{3!} + \frac{2x^8}{5!} + \cdots + (-1)^n 2\frac{x^{2n+4}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Nous devons alors égaler les deux membres terme à terme ; ceci nous donne d'abord $a_0 = 1$; ensuite nous voyons que a_1 et a_2 sont totalement indéterminés, que a_3 est nul, ainsi que les coefficients d'indices impairs, puisqu'il n'y a aucune puissance impaire de x au second membre.

Egalons maintenant les termes en x^{2n} ; nous aurons

$$(2n-1)(2n-2)a_{2n} = (-1)^n \frac{2}{(2n-3)!}.$$

ce qui nous donne $$a_{2n} = (-1)^n \frac{2}{(2n-1)!}.$$

Par conséquent, nous trouvons pour y le développement en série que voici :

$$y = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots 2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots\right).$$

Mettons x en facteur dans la série entre parenthèses, nous trouverons les termes du développement de $x - \sin x$ $$\frac{x}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \cdots$$

Nous savons que cette série est convergente ; il n'y a donc pas à s'occuper de cette question. L'intégrale générale est alors

$$y = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + 2x(x - \sin x).$$

Réunissons les termes en x^2 et changeons les noms des constantes ; la solution générale sera :

$$y = 1 + \lambda x + \mu x^2 - 2x \sin x.$$

Nous pouvons intégrer l'équation à l'aide de l'indication fournie par l'énoncé. La fonction $y = x^2$ est solution, ceci est immédiat. Posons alors : $y = x^2 z$; nous en déduirons

$$y' = x^2 z' + 2xz \qquad \text{et} \qquad y'' = x^2 z'' + 4xz' + 2z.$$

En portant dans l'équation, nous obtiendrons

$$x^4 z'' + 2x^3 z' = 2 + 2x^3 \sin x.$$

Telle est la nouvelle équation à intégrer ; elle est du premier ordre et linéaire ; le calcul est facilité par la remarque suivante : si on divise par x^2, on a

$$x^2 z'' + 2xz' = \frac{2}{x^2} + 2x \sin x.$$

Le premier membre est visiblement la dérivée de $x^2 z'$.

Donc, en intégrant,

$$x^2 z' = -\frac{2}{x} + 2\int x \sin x dx.$$

Nous allons calculer $\int x \sin x dx$ et nous aurons z' par une quadrature :

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Par conséquent, $$x^2 z' = -\frac{2}{x} - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$$

Divisons maintenant par x^2 et intégrons ; nous aurons d'abord

$$z' = -\frac{2}{x} + 2\frac{\sin x - x \cos x}{x^2} + \frac{C}{x^2};$$

chacun des termes de cette somme est intégrable à vue : le premier est la dérivée de $\frac{1}{x^2}$, le deuxième de $-2\frac{\sin x}{x}$ et le troisième de $-\frac{C}{x}$. Par conséquent, nous avons

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x} - \frac{C}{x} + C'.$$

Tout est fini maintenant ; nous avons

$$y = 1 - Cx + C'x^2 - 2x \sin x.$$

On peut intégrer cette équation de bien d'autres façons. On aperçoit de suite la solution $y = x$: on pourrait donc faire le changement de variable $y = xz$. Mais on peut intégrer par la méthode de variation des constantes en posant : $y = ux + vx^2$ et cherchant à déterminer u et v par les procédés habituels.

2. Considérons l'intégrale générale $y = 1 + \lambda x + \mu x^2 - 2x \sin x$. La dérivée première est $y' = \lambda + 2\mu x - 2 \sin x - 2x \cos x$. Pour $x = 0$ elle se réduit à λ, donc $\lambda = 0$. La dérivée seconde est $y'' = 2\mu - 2 \cos x - 2 \cos x + 2x \sin x$. Pour $x = 0$, elle se réduit à $2\mu - 4$; devant prendre la valeur -2, il faut que $\mu = 1$.

La fonction à étudier est $y = 1 + x^2 - 2x \sin x$.

Je remarque d'abord qu'en changeant x en $-x$, y ne change pas; par conséquent la courbe représentative est symétrique par rapport à Oy et il suffira de faire varier x de 0 à $+\infty$, dans le champ des valeurs positives.

Le sinus oscille entre -1 et $+1$, par conséquent la courbe représentative oscillera entre les deux paraboles égales $y_1 = 1 + x^2 + 2x$ et $y_2 = 1 + x^2 - 2x$. L'une touche Ox au point $x = -1$ et l'autre au point $x = 1$. Considérons aussi la parabole $y_3 = 1 + x^2$. La courbe que nous voulons représenter oscillera autour de cette parabole; quand $\sin x$ sera positif elle sera au-dessous.

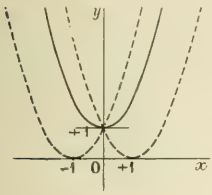


Fig. 1.

La parabole y_3 est donc une sorte de courbe médiane que la courbe traverse un nombre infini de fois en montant et en descendant. Les deux autres paraboles $y_1 = (1 + x)^2$ et $y_2 = (1 - x)^2$ sont orientées de la même façon. Les oscillations de la courbe proposée seront limitées par ces deux paraboles et la courbe viendra les toucher un nombre infini de fois, la première quand $\sin x = -1$, et la seconde quand $\sin x = +1$. Si nous considérons les valeurs $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, celles de rangs impairs donnent les points de contact avec la parabole inférieure. Voyons maintenant les variations de la fonction.

La dérivée est $y' = 2x - 2 \sin x - 2x \cos x$.

Elle s'écrit
$$y' = 2x(1 - \cos x) - 2 \sin x,$$
ou, en mettant en facteur $\sin \frac{x}{2}$,
$$y' = 4 \sin \frac{x}{2} \left[x \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right].$$

Cette dérivée admet donc les racines des deux facteurs : les racines de $\sin \frac{x}{2} = 0$, soit $x = 2K\pi$; et les racines du second facteur. Pour les calculer, nous écrivons l'équation sous la forme $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{x}$ et nous allons construire les deux courbes correspondantes. La courbe $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ se construit en portant sur Ox les valeurs π, 2π, 3π, et est bien connue; quant à la courbe $y = \frac{1}{x}$, c'est une hyperbole équilatère; on voit que les points de rencontre, en nombre infini, se rapprochent des points $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ On peut donc représenter les racines par α_1, $2\pi + \alpha_2$, $4\pi + \alpha_3$, etc., α_1 étant compris entre 0 et π et les nombres α_2, α_3 etc. devenant de plus en plus petits; alors, si on classe toutes les valeurs de x trouvées, on a

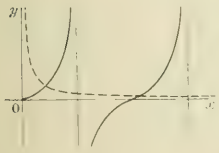


Fig. 2

$$0, \quad \alpha_1, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad 2\pi + \alpha_2, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}, \quad 4\pi, \quad 4\pi + \alpha_3, \quad \ldots$$

Les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$ donnent les points de contact avec les paraboles limites; les autres valeurs sont les racines de la dérivée. Pour être sûr du classement, il faut vérifier que α_1 est compris

entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En effet, pour x infiniment petit $y' < 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$ $y' > 0$; donc α_1 est entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Si nous portons sur Ox toutes les valeurs ainsi trouvées, nous apercevrons de suite que la première oscillation part de A, où la tangente est horizontale, descend jusqu'à la valeur α_1 et, pour $\frac{\pi}{2}$, touche la parabole inférieure. A partir de α_1 cette valeur croît, la branche monte, traverse la parabole médiane pour $x = \pi$, touche la parabole supérieure pour $x = \frac{3\pi}{2}$ et enfin, pour $x = 2\pi$, elle traverse la parabole médiane en passant par un maximum.

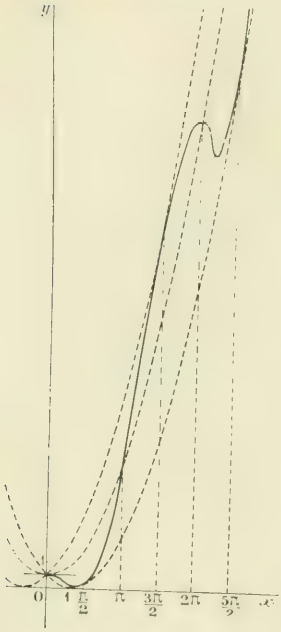


Fig. 3.

Elle redescend ensuite pendant peu de temps, passe par un minimum pour $x = 2\pi + \alpha_2$ et revient toucher la parabole inférieure pour $x = \frac{5\pi}{2}$. Elle remonte enfin, traverse la parabole médiane pour $x = 3\pi$, touche la parabole supérieure pour $x = 7\frac{\pi}{2}$, etc.

En résumé, nous voyons que chaque maximum est suivi d'un minimum, après quoi la courbe remonte, touche la parabole inférieure, traverse la parabole médiane, touche la parabole supérieure et atteint plus tard son maximum suivant.

La figure montre aussi de façon évidente que la courbe ne coupe pas Ox, mais ceci se voit bien plus simplement en remarquant que $1 + x^2 - 2x \sin x > 1 + x^2 - 2x = (1 - x)^2$. Il n'y a de doute que pour $x = 1$ et on trouve alors $y = 2 - 2 \sin 1$, qui est positif.

3. La fonction $f(x) = \frac{y'}{y} - \frac{2}{x+1}$ est évidemment continue dans le champ des valeurs positives, puisque y ne s'annule jamais. Elle a la valeur

$$f(x) = 2\,\frac{(x+1)(x - \sin x - x\cos x) - 1 - x^2 + 2x\sin x}{y(x+1)}.$$

Nous avons à reconnaître les racines et changements de signe du numérateur. Nous obtenons

$$f(x) = 2\,\frac{x - 1 + (x-1)\sin x - x\cos x(x+1)}{y(x+1)}.$$

Il s'agit de trouver les racines du numérateur ; pour cela nous allons le mettre sous la forme

$$(x-1)(1 + \sin x) - x(x+1)\cos x,$$

puis,

$$x - 1)\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 - x(x+1)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Mettons en facteur $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$:

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\left[(x-1)\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) - x(x+1)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\right].$$

Le premier facteur s'écrit $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$, c'est-à-dire $\frac{x}{2} = 3\frac{\pi}{4} + K\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Les racines du premier facteur sont donc $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 4\pi$, etc. Le second facteur s'écrit

$$\sin\frac{x}{2}(x^2 + 2x - 1) - (x^2 + 1)\cos\frac{x}{2}.$$

Nous en aurons les racines en le mettant sous la forme

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1}.$$

Nous aurons à construire les deux courbes $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $y = \frac{x^2+1}{x^2+2x-1}$, et à prendre leur intersection.

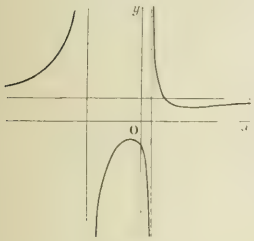


Fig. 4.

La première courbe a déjà été construite. La seconde admet pour asymptotes les droites $y = 1$ et $x = -1 \pm \sqrt{2}$; elle est très facile à construire et a la forme de la figure 4. Il est visible alors qu'elle coupe la courbe $y = \operatorname{tg} x$, en une infinité de points, et, qu'en se bornant aux valeurs positives de x, il y en a une comprise entre 0 et π, et que les autres sont au voisinage de $2K\pi + \frac{\pi}{2}$, un peu avant. Les racines de ce second facteur sont donc

$$\alpha_1, \qquad 2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \qquad 4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha_3, \qquad \ldots,$$

α_2, α_3, ... diminuant très rapidement et devenant vite très petits.

Les racines de $f(x)$ sont donc

$$\alpha_1, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \quad 2\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad 4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha_3, \quad 4\pi + \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots$$

La courbe $y = f(x)$ traverse l'axe des x en tous ces points; elle est d'abord au-dessous de Ox, puis au-dessus, etc. (*fig.* 5). L'aire $\int_0^x f(x)dx$ est d'abord négative, s'annule au point $\frac{3\pi}{2}$, redevient négative, s'annule de nouveau pour $2\pi + \frac{3\pi}{2}$, et ainsi de suite.

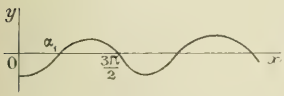


Fig. 5.

Tout ceci est évident sur la formule

$$\int_0^x f(x)dx = L\frac{x^2 + 1 - 2x\sin x}{(x+1)^2}.$$

Toutes les arches situées au-dessus et au-dessous de Ox ont des aires égales deux à deux : la première a même aire que la seconde; la troisième, que la quatrième, etc.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppe; A. Ourbach.
Assez bonnes solutions : MM. J. Dodier et M. Ullmann, à Héricourt; Gaston Roy.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

9692. — Construire une sphère passant par deux points et tangente aux plans de projection.

9693. — On donne une sphère dont le centre est dans le deuxième bissecteur et une droite située dans ce plan. Intersection de la droite et de la sphère.

9694. — On donne une sphère tangente au plan horizontal et une droite ab, $a'b'$ dans ce plan. Trouver un point lumineux tel que l'ombre portée sur le plan horizontal soit une parabole tangente en a, a') à la droite donnée.

9695. — Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde d'axe vertical.

9696. — Cône circonscrit à un tore ayant un axe vertical. Étudier en particulier le cas où le sommet (s, s') se projette horizontalement sur le grand cercle de contour apparent horizontal, la ligne de rappel étant tangente au petit cercle de contour apparent vertical.

9697. — Ombre au flambeau d'un tore dont l'axe est de front.

9698. — Trouver le contour apparent horizontal d'un tore dont l'axe est une droite graduée. Le cercle générateur est défini par son centre et son rayon.

9699. — Section plane d'un tore à collier nul et à axe vertical par un plan passant par le centre et parallèle au deuxième bissecteur. Étude analytique.

9700. — On donne dans le plan horizontal une ellipse E dont le grand axe est parallèle à la ligne de terre. C'est la projection horizontale d'une ellipse E située dans un plan de bout. On fait tourner cette ellipse E autour d'un axe vertical passant par l'un des foyers de E_1. Construire la méridienne principale de la surface de révolution ainsi engendrée. Vérification analytique.

9701. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est de front, une droite D et un point S sur cette droite. Construire un cône de révolution tangent au cylindre ayant pour sommet le point S et pour axe la droite D.

9702. — Construire un cylindre de révolution connaissant trois points et la direction de l'axe. Faire l'épure en géométrie cotée. Trouver la cote d'un point du cylindre connaissant sa projection.

9703. — Mener par un point une droite qui soit à des distances données d'un point donné et d'une horizontale donnée.

9704. — Intersection d'un cylindre de révolution à axe vertical et d'un plan parallèle au deuxième bissecteur.

9705. — Intersection d'un cylindre de révolution quelconque avec la ligne de terre.

9706. — On donne en géométrie cotée un cône de révolution défini par son sommet et une sphère inscrite. Déterminer l'intersection du cône et d'un plan défini par son échelle de pente.

9707. — Mener par un point de la ligne de terre une droite faisant un angle α avec la ligne de terre et ayant ses projections perpendiculaires.

9708. — On donne un cône de révolution défini par son sommet et une sphère inscrite. On donne la projection horizontale d'un point du cône; trouver la projection verticale et le plan tangent.

9709. — Par la trace horizontale d'une droite de front, mener une droite faisant un angle donné avec la frontale et telle que le segment intercepté sur cette droite par les plans de projection ait une longueur donnée.

9710. — Un cône de révolution a pour base dans un plan défini par ses traces un cercle de centre et de rayon donnés. On connaît en outre la hauteur du cône. Trouver les contours apparents.

9711. — Construire un cône de révolution connaissant le sommet, l'axe et sachant que le cône est tangent à une sphère donnée.

9712. — On donne un paraboloïde de révolution dont l'axe est de front, et on considère un parallèle de cette surface. Mener au paraboloïde un plan tangent dont le point de contact soit sur le parallèle et qui fasse un angle donné avec le plan horizontal.

9713. — Un segment ab donné dans le plan horizontal est le grand axe d'une ellipse, section par le plan horizontal d'un cône de révolution. Connaissant le sommet de ce cône, trouver le petit axe de l'ellipse.

9714. — On donne une sphère tangente au plan horizontal, et un point S dont la cote est égale au diamètre de la sphère. Trace horizontale du cône circonscrit à la sphère ayant pour sommet le point S.

9715. — Déterminer un cône de révolution connaissant son contour apparent vertical et une génératrice de contour apparent horizontal.

9716. — Mener à une surface gauche de révolution un plan tangent parallèle à un plan donné. Discussion.

9717. — On donne une surface gauche définie par un axe vertical et une frontale D. Construire par rapport à cette surface la droite conjuguée d'une droite donnée Δ, dont la projection horizontale est parallèle à celle de D.

9718. — On donne une surface gauche de révolution et une génératrice de front. Mener par une droite donnée un plan coupant la surface suivant une parabole. Déterminer les éléments de cette parabole.

9719. — Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle à la ligne de terre.

9720. — Cône circonscrit à une surface gauche de révolution.

9721. — On considère une surface gauche de révolution engendrée par une frontale tournant autour d'un axe de front. Inscrire dans cette surface une sphère passant par un point donné.

9722. — On fait tourner une droite autour d'un axe vertical et autour d'un axe de bout. Déterminer les plans tangents communs aux deux surfaces.

9723. — On donne deux droites par leurs projections graduées. Déterminer le contour apparent horizontal de la surface engendrée par l'une d'elles tournant autour de l'autre.

9724. — Trouver la droite conjuguée de la ligne de terre par rapport à une surface gauche dont l'axe est vertical.

9725. — On coupe une surface gauche de révolution par deux plans parallèles au cercle de gorge et équidistants du plan de ce cercle. On éclaire le solide ainsi formé par des rayons à 45°. Déterminer l'ombre propre et les ombres portées sur les plans de projection.

9726. — On coupe une surface gauche à axe vertical par un plan de bout, et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné. Trouver les contours apparents du cône.

9727. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par son sommet (s, s'), par ses plans directeurs de bout et inclinés à 45° sur le plan horizontal, et par un point (a, a'). Montrer que le paraboloïde est bien déterminé. Prendre son intersection avec une droite. Plan tangent au sommet.

9728. — Etant donnés un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, et une droite passant par un point donné sur la surface, construire le deuxième point de rencontre de la droite et de la surface.

9729. — D'un point A on abaisse des perpendiculaires sur les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Lieu des pieds. Montrer que ce lieu est une surface et construire le plan tangent.

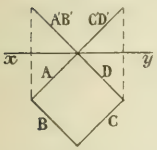
9730. — On considère un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices non parallèles à ce plan. Intersection avec une droite. Sommet.

9731. — On considère un paraboloïde hyperbolique admettant comme plan directeur un plan bissecteur des plans de projection. Comment peut on le définir? Déterminer le sommet.

9732. — On donne en géométrie cotée quatre points a, b, c, d, de cotes respectives 1, 2, 3, 4 et formant en projection un parallélogramme. Montrer que par les droites ab, bc, cd, da on peut faire passer un paraboloïde hyperbolique, et trouver l'axe de ce paraboloïde. Soit s le point de cote zéro projeté au centre du parallélogramme; trouver la courbe de contact du cône circonscrit ayant pour sommet le point s.

9733. — Mener à un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal un plan tangent parallèle à un plan donné.

9734. — On donne le paraboloïde hyperbolique déterminé par le quadrilatère gauche ayant pour côtés les droites (A, A'), (B, B'), (C, C') et (D, D'). La projection horizontale est un carré dont une diagonale est parallèle à la ligne de terre, et la projection verticale se compose de deux droites inclinées à 45° sur xy. Construire des génératrices. Déterminer le point brillant pour des rayons lumineux à 45°.



9735 — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et d'un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal.

9736. — On donne un hémisphère limité par un plan horizontal supérieur, et un point lumineux. Trouver l'ombre à l'intérieur.

9737. — Intersection d'un tore à axe vertical et d'une sphère dont le centre est dans le plan de front de l'axe du tore.

9738. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre vertical dont la base est un cercle horizontal ayant pour diamètre un rayon horizontal de la sphère.

9739. — Intersection d'une surface gauche à axe vertical, définie par une génératrice de front G et d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à G et dont la base est un cercle horizontal.

9740. — On donne trois droites quelconques dans l'espace, et on demande de déterminer les plans passant par un point donné sur lesquels les droites se projettent orthogonalement suivant des droites concourantes.

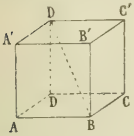
9741. — On donne un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal défini par une verticale et une frontale. Etudier l'intersection de ce paraboloïde et d'un cylindre de révolution passant par la verticale donnée.

9742. — On donne deux frontales qui ne se rencontrent pas et d'un point fixe O on abaisse des perpendiculaires sur les horizontales rencontrant les deux frontales. Construire le lieu du pied. Tangente en un point. Directions asymptotiques. Traiter la question par le calcul

9743. — On donne une sphère tangente au plan horizontal et un cercle dans le plan horizontal. Ce cercle est la base d'un cône dont le sommet est sur la verticale du centre de la sphère. Intersection des deux surfaces.

9744. — On donne un hémisphère dont la base est horizontale et qui tourne sa concavité vers le haut. Le point le plus haut est le centre d'un disque horizontal ayant même rayon que l'hémisphère. On demande l'ombre portée par le disque sur l'hémisphère.

9745. — On donne un cube ABCDA'B'C'D' dont la face ABCD est horizontale, et on considère l'hyperboloïde défini par les trois génératrices AD, A'B' et CC', puis le paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal et qui admet pour génératrices CC' et la diagonale BD'. Déterminer l'intersection des deux surfaces.



9746. — Représentation topographique d'un paraboloïde elliptique dont le point le plus haut est un ombilic.

9747. — On donne un tore ayant un axe de front. Trouver la section de ce tore et du plan parallèle au deuxième bissecteur et passant par le centre du tore.

9748. — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical définie par une génératrice de front G. On demande l'intersection de cette surface et du cylindre engendré par la droite G tournant autour d'un axe parallèle à G et passant par le centre de l'hyperboloïde.

9749. — On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical, ouvert vers le haut, et un cône de révolution ayant son sommet au sommet du paraboloïde. L'une des génératrices du cône est verticale et son axe passe par un des points où le plan focal rencontre la méridienne. Intersection des deux surfaces. Etudier la question analytiquement.

9750. — On donne un cône dont la base est un cercle dans le plan horizontal, et une sphère qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan horizontal. Etudier l'intersection des deux surfaces.

9751. — On donne une sphère dont le centre est dans le plan horizontal et deux points. Déterminer l'intersection des cônes circonscrits à la sphère ayant pour sommets ces deux points.

9752. — On donne un hyperboloïde à une nappe défini par trois génératrices. Mener à cette surface un plan tangent parallèle à un plan donné.

9753. — On donne deux cylindres de révolution ayant un même axe vertical placés l'un au-dessus de l'autre, le cylindre supérieur étant de rayon plus grand. On éclaire l'ensemble par des rayons lumineux à 45°. Etudier l'ombre propre et l'ombre portée.

9754. — On donne un cône de révolution d'axe vertical, le sommet étant vers le bas ; il est limité à un parallèle et creux à l'intérieur. On éclaire par des rayons à 45° ; ombre à l'intérieur.

9755. — On coupe un tore à axe vertical par un plan de bout passant par le centre, tangent au parallèle le plus haut. La section est la directrice d'un cône dont le sommet est sur l'axe. Déterminer l'intersection du tore et du cône. Montrer qu'on peut faire passer une sphère par cette intersection.

9756. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre et une droite quelconque (D). D'un point A de la droite (D) on mène une normale AM au cylindre. Étudier le lieu du point M. Construire la tangente à la courbe lieu du point M.

9757. — On donne un hyperboloïde à une nappe défini par trois droites. Construire un point de cette surface, et le plan tangent en ce point. Examiner le cas particulier où l'une des droites est verticale, une autre de bout et la troisième parallèle à la ligne de terre. Étant donnée une génératrice, déterminer le point où le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote.

9758. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et d'une sphère.

9759. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un paraboloïde hyperbolique ayant pour sommet le sommet du cône, passant par les génératrices de contour apparent vertical du cône et par un autre point de ce cône, les plans directeurs étant de bout.

9760. — On considère un paraboloïde de révolution d'axe vertical et limité à un parallèle et à son sommet. On éclaire ce paraboloïde par un point lumineux. Trouver l'ombre propre et l'ombre portée.

9761 — On donne un cylindre de révolution ayant pour axe la ligne de terre et une surface gauche de révolution dont le cercle de gorge, situé dans le plan horizontal, est tangent aux génératrices de contour apparent horizontal du cylindre. Les génératrices de la surface font 45° avec l'axe. Intersection de la surface et du cylindre.

9762. — Ombre de la niche formée par un demi-cylindre de révolution surmonté d'un quart de sphère. Déterminer le point de l'ombre situé sur le cercle de raccordement.

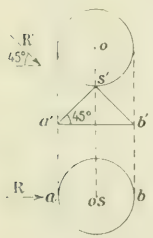
9763. — Ombre à l'intérieur d'une écuelle parabolique, l'axe étant vertical.

9764. — Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan de front du centre de la sphère.

9765. — Un paraboloïde de révolution à axe vertical est éclairé par des rayons lumineux à 45°. Déterminer le point brillant.

9766. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre. On le limite à deux plans de profil, et on conserve seulement la partie située au-dessous du plan horizontal de l'axe. On éclaire par des rayons à 45°. Ombre à l'intérieur.

9767. — On donne une sphère (o, o') et un cône de révolution d'axe vertical, ayant son sommet (s, s') au point le plus bas de la sphère et limité à un cercle horizontal dont le rayon égale celui de la sphère. Ombre propre du système éclairé par des rayons parallèles (R, R') de front et faisant 45° avec le plan horizontal.



9768 — On donne un cône de révolution à axe vertical, limité à son sommet, S, et à une section horizontale au dessous du sommet. Par un point situé sur la verticale du point S on mène une horizontale, qu'on prend comme axe d'un cylindre de révolution passant par le point S. On éclaire le système par des rayons parallèles. Ombres.

9769. — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe défini par son axe vertical et une génératrice de front (A, A') et un cylindre dont la base est un cercle horizontal et dont les génératrices sont parallèles à (A, A'). Trouver les plans tangents communs à ces deux surfaces.

9770. — On donne en géométrie cotée un hyperboloïde de révolution à une nappe défini par son cercle de gorge horizontal (cote zéro) et par la projection graduée d'une génératrice G. Trouver l'intersection de cet hyperboloïde et du paraboloïde hyperbolique qui a pour plan directeur le plan horizontal et qui passe par l'axe de l'hyperboloïde et par la droite G.

VI. Cinématique.

9771. — Un point décrit la courbe $x = \cos\theta$, $y = 1 + \sin\theta$, $z = \operatorname{tg}\theta$ de façon que son accélération totale rencontre l'axe des x. Étudier le mouvement.

9772. — Un point se meut sur une ellipse avec une vitesse aréolaire constante par rapport au foyer F. Comment varie sa vitesse angulaire par rapport à l'autre foyer F' ?

9773. — Construire la courbe $x = 2t + 1$, $y = t^2$, $z = 3t - 2t + 1$. Étudier l'hodographe du mouvement.

9774. — Un point se déplace dans un plan de façon que les composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur soient respectivement $\sin t$ et $1 - \cos t$, t désignant le temps. Déterminer la trajectoire. Rayon de courbure.

9775. — Déterminer une courbe plane telle que le rayon vecteur joignant le pôle à un point de la courbe tourne avec une vitesse angulaire double de celle de la tangente en ce point.

9776. — Étudier le mouvement défini par les équations $x = at^2 + bt + c$, $y = a't^2 + b't + c'$, $z = a''t^2 + b''t + c''$.

9777. — Un point se déplace dans un plan de telle façon que $y = kx$ et $v = hy_n$, h et k étant des constantes. Comment varie l'angle de la vitesse avec Ox ?

9778. — Un point se déplace dans un plan de telle manière que l'accélération totale soit constante et fasse un angle constant avec la vitesse. Déterminer la trajectoire.

9779. — Un point M se déplace dans un plan de façon que les projections de sa vitesse sur les axes de coordonnées soient proportionnelles aux distances MP et MQ de ce point à deux droites rectangulaires données, $v_x = k.\mathrm{MP}$, $v_y = k.\mathrm{MQ}$. Déterminer la trajectoire.

9780. — Étudier le mouvement $x = \frac{1}{3}(1 + \sin \omega t - \sqrt{3} \cos \omega t)$, $y = \frac{1}{3}(1 + \sin \omega t + \sqrt{3} \cos \omega t)$, $z = \frac{1}{3}(1 + 2 \sin \omega t)$. Nature de la trajectoire.

9781. — Un point décrit la courbe $ax^2 = y^3$ de façon que la composante de l'accélération totale suivant Oy soit constante. Déterminer l'hodographe, la vitesse à l'origine étant nulle.

9782. — Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires et une demi-droite OA passant par le point O et faisant les angles α, β, γ avec les axes de coordonnées. Un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tourne autour de la droite OA d'un mouvement uniforme de vitesse v. Trouver ses coordonnées au bout du temps t.

9783. — Un point se déplace sur une parabole de façon que la vitesse soit proportionnelle au rayon vecteur issu du foyer. Etudier le mouvement

9784. — Un point décrit une circonférence de telle façon que son accélération passe toujours par un point de cette circonférence. Calculer la vitesse et l'accélération du point.

9785. — Un point M décrit une ellipse (de centre O et de foyers F et F') de telle manière que $\mathrm{MF} - \mathrm{MF'} = 2c \sin \omega t$. Calculer l'accélération en fonction de $\mathrm{OM} = r$.

9786. — Une parabole P roule sans glisser sur une parabole fixe égale Q, la vitesse angulaire étant $\frac{-2}{1+t^2}$. Au temps $t = 0$ les sommets coïncident. Étudier le mouvement du foyer de la parabole P.

9787. — Un point se déplace dans un plan de façon que l'accélération tangentielle soit constante et que le rapport de l'accélération normale au rayon de courbure soit constant. Trouver la trajectoire et l'hodographe.

9788. — Le mouvement d'un point M est tel que son hodographe par rapport à un point O est une droite D ne passant pas par le point O, et décrite d'un mouvement uniforme. Etudier le mouvement du point M. Examiner aussi le cas où le point correspondant de l'hodographe décrit la droite D avec une vitesse angulaire constante par rapport au point O.

9789. — Trouver l'enveloppe du vecteur accélération dans un mouvement circulaire où l'accélération totale est proportionnelle au cube de la vitesse.

9790. — L'hodographe du mouvement d'un point M par rapport à un point O est un cercle de centre O, et le point m qui décrit l'hodographe se meut de façon que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{\cos \theta}$, θ étant l'angle de Om et d'une droite fixe. Trouver la trajectoire de M.

9791. — Un point M se déplace sur un cercle de centre O de façon que l'angle θ de OM avec Ox soit donné par l'équation $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \sin^2 \theta (1 + \sin^2 \theta)$. Étudier le mouvement.

9792. — Étudier le mouvement $x = a \cos (t + \alpha)$, $y = b \cos (t + \beta)$, $z = c \cos (t + \gamma)$. Déterminer l'aire de l'ellipse trajectoire. Hodographe du mouvement.

9793. — Étudier le mouvement plan où l'accélération est proportionnelle et perpendiculaire à la vitesse.

VII. Dynamique.

9794. — Un point mobile parcourt la courbe $\rho = a \cos^2 \frac{\omega}{2}$ sous l'action d'une force passant par le pôle. Trouver l'expression de la force en fonction du rayon vecteur.

9795. — Un point est assujetti à décrire une ellipse sous l'action d'une force passant par le centre et proportionnelle à la distance. On le lance d'un des sommets avec une certaine vitesse. Etudier la variation de la réaction de la courbe.

9796. — Un point pesant est assujetti à se mouvoir avec frottement sur une droite horizontale ; ce point est attiré par un centre fixe situé dans le plan vertical de la droite, proportionnellement à la distance. Etudier le mouvement du point.

9797. — On considère le champ de force $X = y$, $Y = z$, $Z = x$. Déterminer le travail total quand le point d'application décrit un cercle ayant pour centre l'origine et perpendiculaire à l'un des plans de projection.

9798. — Un point matériel décrit la courbe $r^n = a^n \cos n\theta$ sous l'action d'une force centrale $f(r)$. Calculer cette force.

9799. — Un point se déplace sur la courbe $\rho = \frac{a \sin^2 \omega}{\cos \omega}$ sous l'action d'une force centrale passant par le pôle ; trouver la force.

9800. — On donne une parabole dont l'axe est vertical et dont la concavité est dirigée vers le bas. Un point matériel est assujetti à la décrire sans frottement. Ce point est lancé du sommet avec une vitesse v_0. Étudier le mouvement, et calculer la réaction.

9801. — On donne dans un plan vertical une horizontale D et un point fixe A au-dessus. Un point M pesant se déplace sur une droite AB (rencontrant D au point B) et faisant l'angle α avec D. Ce point est repoussé par A par une force constante $F = k \cdot \overline{AB}^3$. Quelle valeur faut-il donner à α pour que le temps mis par le mobile M pour descendre jusqu'en B soit minimum ?

9802. — On donne un point fixe O et un point M soumis à l'action d'une force F constamment perpendiculaire à OM

et fonction de la distance $OM = r$, $F = f(r)$. Déterminer la fonction $f(r)$ de façon que l'équation de la trajectoire soit $r = a$.

9803. — Un point M mobile sur une droite est attiré par un point O de cette droite par une force égale à 2OM, et il subit une résistance en sens contraire de la vitesse égale à $3v$. Étudier le mouvement. On suppose la masse égale à l'unité.

9804. — Mouvement des projectiles dans le vide. Soit M un point de la trajectoire. Mm sa distance à la directrice de la parabole trajectoire ; montrer que l'on a $v^2 = 2g.Mm$. On mène par le foyer de la parabole une corde quelconque qui la coupe en M_1 et M_2. Soient v_1 la vitesse en M_1, v_2 la vitesse en M_2, w la vitesse au sommet. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{w^2}.$$

9805. — Un point pesant se meut avec frottement sur une droite horizontale ; il est repoussé par un centre fixe situé sur la droite proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement. On suppose que la force est donnée par $F = 2mfgx$, f étant le coefficient de frottement, m la masse du point.

9806. — Soit F le foyer de la parabole décrite par un point pesant M. Démontrer que la vitesse angulaire du point M par rapport au point F est inversement proportionnelle à FM.

9807. — Un mobile décrit la courbe $x^3 + y^3 - a(x^2 + y^2) = 0$ avec une vitesse constante. Déterminer la force qui produit le mouvement.

9808. — On considère dans le plan des xy le champ de forces $X = 2x$, $Y = y^2$. Trouver les lignes de niveau, les lignes de force. Étudier le mouvement d'un point soumis à la force et abandonné sans vitesse initiale. Quel est le travail total lorsque le champ agit sur un point de masse 1 décrivant le cercle de centre (2,0) et de rayon 1.

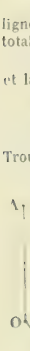
9809. — Un point parcourt la courbe $\rho = a\cos\omega$ sous l'action d'une force passant par le pôle. Déterminer la force et la loi du mouvement.

9810. — Un point se déplace dans le plan des xy sous l'action de la force

$$X = k^2\left(\frac{a^2x}{x^2 + y^2} - x\right), \qquad Y = k^2\left(\frac{a^2y}{x^2 + y^2} - y\right).$$

Trouver la trajectoire.

9811. — On donne un fil élastique fixé en un point A et dont la longueur naturelle est AO. On tire ce fil, on le fait passer dans un anneau fixe O, on attache à son extrémité un point matériel pesant M, que l'on abandonne sans vitesse initiale en une position quelconque. On demande le mouvement du point M. On admet que la tension du fil est proportionnelle à l'allongement.



9812. — D'un point O on veut arroser une colonne verticale, la vitesse du point étant donnée. Déterminer la partie de la colonne qui pourra être arrosée.

9813. — Un point M de masse 1 est soumis : 1° à une force passant par le point O, attractive et proportionnelle à la distance ; 2° à une force dont les projections sur les axes Ox, Oy sont $X = 2\cos t$, $Y = 2\sin t$. Étudier le mouvement du point M.

9814. — Un point décrit la courbe $\rho^2 = a^2\cos 2\omega$ suivant la loi des aires. Calculer la force qui sollicite le point en fonction de ρ.

9815. — Un point matériel se meut sous l'action d'une force centrale inversement proportionnelle au carré de la distance. Déterminer quelles doivent être les conditions initiales pour que la trajectoire soit une parabole, une hyperbole équilatère ou un cercle.

9816. — Un point $M(x, y, z)$ est soumis à l'action de la force $X = \frac{a^2x}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{a^2y}{x^2 + y^2}$, $Z = 0$. Y a-t-il une fonction des forces? Surfaces de niveau. Lignes de force.

9817. — Un point M se déplace sur une ellipse sous l'action d'une force passant par le centre. Déterminer cette force.

9818. — Étudier le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance. La trajectoire peut-elle être un cercle ?

9819. — Un point mobile se déplace sur une courbe sous l'action d'une force centrale. Déterminer cette force sachant que la vitesse est inversement proportionnelle à la distance. Étudier le mouvement.

9820. — On donne dans un plan vertical une courbe et un point O situé au-dessus. On joint le point O à un point M de la courbe. Calculer le temps que met un point pesant pour descendre le long de la droite OM. Maximum de ce temps, quand le point M décrit la courbe. Cas où la courbe est une droite ou un cercle.

9821. — Étudier le champ de forces $X = y + z$, $Y = z + x$, $Z = x + y$. Surfaces de niveau. Montrer que les lignes de force sont des courbes planes et algébriques.

9822. — Étudier le mouvement d'un point pesant soumis de la part de l'air à une résistance proportionnelle à la vitesse.

9823. — On considère le champ de forces $X = \frac{x - y}{x^2 - y^2}$, $Y = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$, $Z = 3z$. Y a-t-il une fonction des forces ?

9824. — Trouver le mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

9825. — On lance un point dans le vide sous un angle α ; au bout de combien de temps la vitesse est-elle devenue perpendiculaire à la vitesse initiale ?

9826. — On donne un triangle équilatéral ABC, aux sommets duquel on abandonne sans vitesse initiale des points matériels s'attirant suivant la loi de Newton. Déterminer les trajectoires. Calculer le temps mis par les mobiles pour atteindre le centre O du triangle.

9827. — Un point M décrit une parabole sous l'action d'une force newtonienne. Démontrer que la projection m du point M sur la directrice se meut comme si elle était attirée en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

9828. — On considère le champ de force $X = \sin y + y \sin x$, $Y = -\cos x + x \cos y$. Y a-t-il une fonction des forces ?

9829. — On lance un projectile dans le vide à partir d'un point O, avec une vitesse v_0 faisant l'angle α avec l'horizontale Ox. Au point A où le projectile rencontre Ox on supprime la pesanteur ; le mobile décrit alors une droite. Trouver l'enveloppe de cette droite quand α varie.

9830. — Soient une ellipse et un point M sur cette ellipse ; on désigne par r et r_1 les rayons vecteurs du point M relatifs aux foyers F et F$_1$. On suppose que le point M décrit l'ellipse sous l'action de deux forces f et f_1 passant respectivement par F et F$_1$. Démontrer que si l'une des forces est de la forme $f = k^2 r$, l'autre est $f_1 = k^2 r_1 + \frac{h}{r_1^2}$.

9831. — On considère un mouvement plan sous l'action de la force $X = -y$, $Y = x$. La trajectoire peut-elle être circulaire ?

9832. — Etudier le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force centrale répulsive inversement proportionnelle au carré de la distance. On suppose la vitesse initiale passant par le centre.

9833. — Un point M décrit une parabole sous l'action de deux forces dont l'une passe par le foyer F et proportionnelle à FM. L'autre est parallèle à l'axe. Déterminer la grandeur de cette seconde force.

9834. — Un point matériel pesant est assujetti à décrire une courbe C située dans un plan vertical. Déterminer la courbe C de telle manière que la composante verticale de la vitesse soit constante.

9835. — Un point mobile décrit une développante de cercle sous l'action d'une force centrale fonction de la distance, le centre des forces étant le centre du cercle. Calculer la force.

9836. — Un point matériel est soumis à l'action d'une force centrale répulsive proportionnelle à la distance ; on le lance dans un plan donné avec une vitesse initiale donnée en grandeur. Enveloppe des trajectoires quand la direction de cette vitesse varie.

9837. — On lance dans le vide et d'un point donné un premier projectile avec une vitesse initiale v_0 suivant la verticale ascendante, un deuxième projectile avec une vitesse initiale v_0 inclinée à 30° sur l'horizontale, un troisième projectile avec une vitesse initiale $v_0\sqrt{3}$ dirigée suivant l'horizontale. Les trois vitesses initiales sont dans un même plan. Démontrer qu'à chaque instant les trois projectiles sont en ligne droite, et trouver l'enveloppe de cette droite.

9838. — Soit dans un plan vertical une circonférence dont le point O est le point le plus haut. On trace une corde quelconque OM et on abandonne en O un point pesant qui descend suivant la corde OM. Arrivé en M, il s'échappe librement et décrit une parabole. Lieu du foyer de cette parabole lorsque la corde OM varie.

9839. — D'un point O on lance un projectile avec une vitesse initiale donnée contre un mur vertical. On demande sous quel angle il faut le lancer pour que $v^2 \cos \alpha$ soit maximum, v étant la vitesse du projectile au moment où il atteint le mur, α l'angle de cette vitesse et de la normale au mur.

9840. — On donne le champ de forces $X = x^2$, $Y = y^2 - 2xy$, $Z = 0$. Construire les lignes de force

9841. — Un point décrit une parabole sous l'action d'une force perpendiculaire à l'axe. Déterminer la loi de la force Puis, étudier le mouvement du point soumis à l'action de cette force, les conditions initiales étant quelconques

9842 — Les projections d'une force sont $X = x/y$, $Y = \lambda(y/x, y)$. Déterminer λ, y_0 et $f(x, y)$ de façon qu'il y ait une fonction des forces. Quelle est cette fonction des forces ?

9843. — Deux points se meuvent dans un plan, soumis uniquement à leur attraction mutuelle. Leurs coordonnées sont de la forme $x = a(\varphi - 2 \sin \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$ et $x_1 = a\varphi$, $y_1 = a(1 - \cos \varphi)$. Démontrer que ces points s'attirent en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

9844. — Un point M est mobile sur une hyperbole équilatère ; sa vitesse est constante Etudier la force qui produit le mouvement.

9845. — Etudier le mouvement d'un point M assujetti à décrire un cercle sous l'action d'une force attractive émanée d'un point fixe O du cercle et égale à $\overline{OM}^2$. A l'instant initial, le point M est en O et a une vitesse v_0.

9846. — Deux points matériels M et M' assujettis à se déplacer respectivement sur deux droites rectangulaires non situées dans le même plan s'attirent proportionnellement à la distance. Etudier le mouvement de ces points.

9847. — Un point décrit une cycloïde sous l'action d'une force constamment dirigée vers le centre du cercle générateur. Trouver la loi de la force.

9848. — Etudier le mouvement sur une droite d'un point soumis à l'action de la force $X = -xv - v^2$.

VIII. Statique.

9849. — On donne un système de forces et un plan P. Déterminer une droite D du plan tel que si l'on fait la réduction pour un point M de cette droite, le moment résultant soit situé sur la droite D. Montrer que toutes les droites D enveloppent une parabole. Déterminer le foyer de cette parabole, et faire la réduction pour ce point.

9850. — Un point M est attiré par tous les éléments d'une droite D proportionnellement aux longueurs de ces éléments et en raison inverse du carré de leur distance au point M. Déterminer la résultante.

9851. — Il est possible de réduire un système de forces à deux forces rectangulaires dont l'une est appliquée en un point donné A. La réduction est possible d'une infinité de manières.

9852. — On donne un système de forces et un plan P. Montrer qu'il existe un point M du plan P tel que le moment

résultant du système par rapport au point M soit perpendiculaire au plan P. Lieu du point M quand le plan P se déplace parallèlement à lui-même ou tourne autour d'une droite.

9853. — On donne deux axes orientés dans l'espace et un point M. Démontrer que tous les vecteurs qui ont pour origine le point M et qui sont tels que le rapport de leurs moments par rapport aux deux axes soit constant sont dans un même plan.

9854. — Que deviennent les conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide lorsque le système admet un centre de symétrie, ou un axe, ou un plan de symétrie ?

9855. — On donne un triangle ABC et sur chaque côté une force d'intensité et de sens donnés. Ces trois forces ont une résultante qui rencontre les côtés BC, CA, AB du triangle respectivement aux points A', B', C'. Calculer le rapport $\frac{\overline{AB'}}{\overline{A'C}}$.

9856. — On donne deux triangles ABC, A'B'C' dans un même plan. Sur les côtés du triangle ABC on applique des forces représentées par les vecteurs BC, CA, AB. On demande d'appliquer sur les côtés du triangle A'B'C' des forces telles que le système des six forces soit en équilibre.

9857. — Déterminer trois forces parallèles appliquées aux sommets d'un triangle ABC telles que la résultante de ces trois forces passe par le point de concours des hauteurs, ou par le centre du cercle inscrit.

9858. — Soit G le centre de gravité du volume d'un tétraèdre ABCD. Démontrer que les quatre forces GA, GB, GC, GD se font équilibre.

9859. — On considère un système de trois forces dont les lignes d'actions sont $x = 0$, $y - z = a$; $y = 0$, $z - x = a$; $z = 0$, $x - y = a$. Démontrer que ce système ne peut se réduire à un couple unique. Dans le cas où il peut se réduire à une force unique, déterminer le lieu de la ligne d'action de cette force.

9860. — Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC on prend respectivement les points A', B', C' tels que l'on ait $\frac{\overline{AB'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{C'B}} = k$, k étant un nombre donné. Trouver le centre de gravité du triangle A'B'C'. Lieu de ce point quand k varie.

9861. — Par le foyer d'une parabole on mène une corde faisant 45° avec l'axe ; déterminer le centre de gravité de l'aire du segment de parabole ainsi défini.

9862. — Aux trois sommets d'un triangle ABC on applique les forces parallèles $F_1 = \operatorname{tg} A + \lambda a$, $F_2 = \operatorname{tg} B + 2\lambda b$, $F_3 = \operatorname{tg} C + 3\lambda c$. Déterminer la résultante et le lieu du point d'application quand λ varie.

9863. — D'un point $M(\alpha, \beta)$ on peut mener trois normales MA, MB, MC à la parabole $y^2 - 2px = 0$. Déterminer la résultante des vecteurs MA, MB, MC.

9864. — Aux trois sommets d'un triangle on applique des forces parallèles ayant pour intensités tg A, tg B, tg C. Déterminer le point d'application de la résultante. Même question pour les forces

$$\frac{\sin A}{\cos B \cos C}, \quad \frac{\sin B}{\cos C \cos A}, \quad \frac{\sin C}{\cos A \cos B}.$$

9865. — Trouver le centre de gravité de l'arc de la cycloïde $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et π.

9866. — Centre de gravité de la surface d'un tétraèdre.

9867. — Centre de gravité de la surface de la zone.

9868. — Trouver le centre de gravité de l'aire limitée par une parabole, sa directrice, son axe et une parallèle à l'axe.

9869. — Equilibre d'un point soumis à l'action de la force $X = yz$, $Y = zx$, $Z = xy$, et assujetti à se déplacer sur la droite $x = az + p$, $y = az + p$.

9870. — Par les sommets d'un tétraèdre on mène des forces perpendiculaires aux faces opposées et proportionnelles aux aires de ces faces, ces forces étant dirigées vers l'extérieur. Montrer qu'elles se font équilibre.

9871. — On donne un cercle dans un plan vertical et un point M pesant assujetti à rester sur le cercle. Il est attiré par le point A le plus haut du cercle par une force égale à kgMH, MH étant la distance du point M au diamètre vertical. Trouver la position d'équilibre du point M.

9872. — Etudier la position d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur une ellipse dont le petit axe est vertical. Ce point est en outre attiré par le centre de l'ellipse proportionnellement à la distance.

9873. — Position d'équilibre d'un cerceau rugueux, homogène, pesant, reposant sur un clou planté dans un mur vertical. Au moyen d'un fil fixé au cerceau on fait agir sur lui et tangentiellement un poids P.

9874. — On donne dans un plan vertical un cercle assujetti à demeurer tangent à une horizontale H. Une tige pesante tourne autour d'un point O de cette horizontale et s'appuie sur le cercle. Etudier l'équilibre du système. Il y a frottement du cercle sur H, et de la tige sur le cercle, les coefficients de frottement étant différents.

9875. — Un point matériel pesant est assujetti à se déplacer sur la surface $xy = az$, Oz étant vertical. Ce point est repoussé par l'axe des z proportionnellement à la distance. Il y a frottement. Trouver les zones d'équilibre.

9876. — Condition d'équilibre d'une boule reposant sur un sol rugueux ; la boule est soumise à son poids et à une pression exercée en un point de la boule.

9877. — Position d'équilibre d'une barre pesante dont les extrémités reposent sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale.

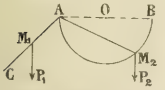
9878. — On donne deux disques situés dans un même plan vertical et tangents à une même horizontale. Sur ces disques repose une tige rectiligne homogène. Position d'équilibre avec frottement.

9879. — Etudier l'équilibre d'un point pesant sur la surface $z = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$.

9880. — Trouver la position d'équilibre d'un point attiré par plusieurs centres fixes proportionnellement à la distance.

9881. — Posi tiond'équilibre d'une barre pesante s'appuyant sur un hémisphère et sur le bord supposé horizontal

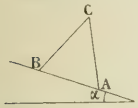
9882. — On donne un demi-cercle dans un plan vertical, la concavité dirigée vers le haut, le diamètre AB étant horizontal. Par le point A on mène une droite AC vers l'extérieur, dirigée vers le bas et faisant 45° avec l'horizontale. Sur AC se déplace un point pesant M_1, de poids P_1, relié à un fil. Ce fil passe en A sur une poulie infiniment petite et porte à son autre extrémité un point pesant M_2, de poids P_2, assujetti à se déplacer sur le demi-cercle. Position d'équilibre.



9883. — On donne trois axes rectangulaires, un point A_1 sur Ox, un point A_2 sur Oy et un point A_3 sur Oz. Un point M de l'espace est soumis à l'action de trois forces dirigées suivant MA_1, MA_2, MA_3 et ayant pour intensités $MA_1 \cdot A_2A_3$, $MA_2 \cdot A_3A_1$, $MA_3 \cdot A_1A_2$. Trouver la position d'équilibre du point M.

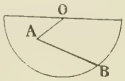
9884. — Un point pesant se meut avec frottement sur une circonférence placée d'une manière quelconque. Trouver les positions d'équilibre du point.

9885. — On considère une échelle double CA, CB dont les pieds A, B reposent sur un plan incliné faisant l'angle α avec le plan horizontal, le plan ABC de l'échelle est vertical. On suppose qu'il y a frottement en A et B, et que la liaison en C des deux montants est réalisée sans frottement. Équilibre de l'échelle.



9886. — On donne un paraboloïde elliptique dont l'axe est vertical et dont la concavité est dirigée vers le haut. Un point matériel pesant est situé à l'intérieur de ce paraboloïde. On demande les positions d'équilibre de ce point avec frottement.

9887. — On donne un hémisphère creux dont le plan de base est horizontal. Une barre AB de longueur $2a$ a l'une de ses extrémités B reposant sans frottement sur l'hémisphère et l'autre A reliée au point O par un fil de longueur a. Equilibre de la barre supposée pesante.



9888. — Déterminer la position d'équilibre d'une barre pesante qui est assujettie à s'appuyer à la fois sur une parabole d'axe horizontal et sur la tangente au sommet supposée verticale.

9889. — On donne une tige horizontale OD dans un plan vertical. Dans ce même plan on donne une tige OA pesante pouvant tourner autour du point O et une tige AB sans poids, articulée en A avec OA, et dont l'extrémité B se déplace avec frottement sur OD. Position d'équilibre du système.

9890. — Trouver la position d'équilibre d'un point M pesant, assujetti à se déplacer sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, Oz étant vertical; ce point est en outre attiré par le sommet $(0, b, 0)$ par une force proportionnelle à la distance.

QUESTIONS PROPOSÉES

2221. — On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 11y = e^{3x}(\sin 2x + x^2 + 1)$$

et on demande :

1° de trouver l'intégrale générale ;

2° de trouver l'intégrale particulière qui représente par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires l'équation d'une courbe C passant par l'origine et admettant comme tangente en ce point la bissectrice des axes $y - x = 0$;

3° de construire la portion de cette courbe comprise entre l'origine et le point où elle coupe la droite

$$x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, la portion de courbe précédemment construite, et la droite

$$x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(Certificat de Mathématiques générales, Grenoble, 1942.)

2222. — Calculer les intégrales

$$\int_0^x \frac{x\,\mathrm{L}x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad \int_0^x \frac{x^2+3x+3}{(x^2+1)^3}\,e^{-x}\sin x\,dx.$$

(Faculté des Sciences de Paris.)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1912.

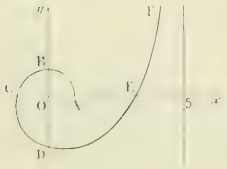
Mathématiques.

2114. — *Construire la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation* $r = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{5}}$.

On déterminera les asymptotes, les points d'intersection avec l'axe polaire et avec la perpendiculaire à l'axe polaire passant par le pôle, et les tangentes en ces points. On déterminera, en fonction de l'infiniment petit $d\theta$, *la valeur principale de la distance entre les points de la courbe correspondant aux angles polaires* θ *et* $\theta + d\theta$, *et la valeur principale de l'angle des tangentes en ces deux points. On en déduira l'expression du rayon de courbure en un point quelconque de la courbe et sa valeur aux points remarquables.*

La fonction $r = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{5}}$ est périodique : elle admet pour période 10π ; il faudra donc faire varier θ dans un intervalle d'étendue 10π. Or, si nous changeons θ en $-\theta$, la fonction r ne change pas ; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffira de faire varier θ de 0 à 5π. Changeons maintenant θ en $5\pi - \theta$, r se change en $-r$, et la même symétrie se reproduit. Cela tient à ce que la courbe est décrite deux fois quand θ parcourt un intervalle d'étendue 10π : ce fait se manifeste d'une façon évidente quand on change θ en $5\pi + \theta$; car alors r se change en $-r$. Nous voyons donc en définitive qu'il suffit de faire varier θ de 0 à $\dfrac{5\pi}{2}$.

Dans cet intervalle, $\dfrac{\theta}{5}$ croît de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{\theta}{5}$ décroît de 1 à 0 et x croît de 1 à l'infini. L'arc de courbe ainsi obtenu a la forme ci-contre, ABCDEF. Il reste à trouver l'asymptote, c'est-à-dire la limite de $y \sin\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right) - \dfrac{\sin\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right)}{\cos\dfrac{\theta}{5}}$, quand θ tend vers $\dfrac{5\pi}{2}$. Appliquons la règle de L'Hopital ; nous aurons à prendre la limite du quotient $\dfrac{\cos\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right)}{-\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{\theta}{5}}$; cette limite est -5. L'asymptote se place alors immédiatement et la courbe s'achève par symétrie. Il est nécessaire toutefois de vérifier la position de la courbe par rapport à l'asymptote. Pour cela il faut étudier $z = d$ ou $\dfrac{\sin\left(\theta - \dfrac{5\pi}{2}\right)}{\cos\dfrac{\theta}{5}} + 5$, au voisinage de $\theta = \dfrac{5\pi}{2}$ pour $\theta = \dfrac{5\pi}{2} \pm$. Faisons cette substitution : nous aurons



$$\delta - d = 5 - \frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{\varepsilon}{5}} = 5 - \frac{\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6}}{\frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon^3}{6.5^2}}$$

et nous voyons de suite que la partie principale de $\delta - d$ est positive, ce qui justifie la forme que nous avons adoptée.

L'asymptote est déterminée ; les points d'intersection avec Ox et Oy le sont aussi : $OA = 1$, $OB = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{10}}$, $OC = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}$, $OD = \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{10}}$, $OE = \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}$. Il reste à trouver les tangentes en ces points, c'est-à-dire les valeurs de $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$. Or nous avons de suite

$$r = \frac{1}{5}\frac{\sin\frac{\theta}{5}}{\cos_2\frac{\theta}{5}}, \qquad \text{et} \qquad \frac{r}{r'} = 5\cot\frac{\theta}{5};$$

les valeurs de tg V et par suite de V s'obtiennent alors aisément.

On sait que ds^2 est égal à $(r^2 + r'^2)d\theta^2$. La géométrie le montre d'ailleurs aisément. Donc

$$ds^2 = \frac{\sin^2\frac{\theta}{5} + 25\cos^2\frac{\theta}{5}}{25\cos^4\frac{\theta}{5}}\,d\theta^2.$$

D'autre part, si nous appelons α l'angle de la tangente avec Ox, nous avons $\alpha = \theta + V$ et $d\alpha = d\theta + dV$; c'est justement la valeur principale de l'angle de deux tangentes infiniment voisines.

Or $\operatorname{tg} V = 5\cot\frac{\theta}{5}$. $\frac{dV}{\cos^2 V} = -\frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{5}}$, $dV(1 + \operatorname{tg}^2 V) = -\frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{5}}$.

Ceci nous donne de suite

$$dV = \frac{-d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{5} + 25\cos^2\frac{\theta}{5}}, \qquad \text{puis} \qquad d\alpha = \frac{24\cos^2\frac{\theta}{5}\,d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{5} + 25\cos^2\frac{\theta}{5}}.$$

Nous avons maintenant

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\left[\sin^2\frac{\theta}{5} + 25\cos^2\frac{\theta}{5}\right]^{\frac{3}{2}}}{120\cos^4\frac{\theta}{5}}.$$

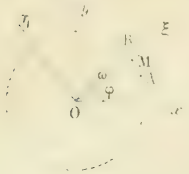
Les valeurs de ρ aux points A, B, C, D, E se trouvent immédiatement : en particulier, au point A,

$$\rho = \frac{125}{120} = \frac{25}{24}.$$

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; A. Le Marchand, à Paris ; M. Mazer, à Bougie ; G. Lach, à Denain ; Berlande.

2115. — *On considère un cercle* C, *de centre* O *et de rayon* R, *et deux couples de deux diamètres rectangulaires*, Ox *et* Oy *d'une part*, $O\xi$ *et* $O\eta$ *d'autre part, qui définiront deux systèmes de coordonnées.*

La position relative des deux systèmes d'axes sera définie par l'angle φ dont il faut faire tourner Ox *pour l'amener sur* Oξ.



On enroule sur le cercle C *un fil* AMB *de longueur* $2R\omega$, *ayant pour milieu le point* M *du cercle situé sur la partie positive de* Oξ. *Chaque élément* ds *du fil a une masse* $kyds$, *proportionnelle à sa longueur et à sa distance à* Ox.

1° *Déterminer le centre de gravité* G *du fil. On calculera ses coordonnées* a, b *par rapport aux axes* Ox *et* Oy, *et ses coordonnées* α, β *par rapport aux axes* Oξ, Oη. *On montrera que le point* G *décrit une droite lorsqu'on fait tourner l'axe* Ox, *en laissant l'axe* Oξ *fixe et la longueur du fil constante.*

2° *On cherchera le lieu du point* G *lorsque, inversement, on fait tourner l'axe* Oξ *en laissant* Ox *fixe et la longueur du fil constante. On étudiera les différentes formes de la courbe* Γ *obtenue, lorsqu'on donne à* ω *toutes les valeurs de* 0 *à* ∞.

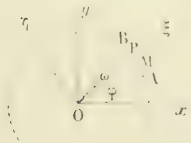
On déterminera en particulier ses asymptotes, ses points d'intersection avec Oy *et, en chacun de ces points, la tangente et le sens de la concavité, les points où la tangente est parallèle à* Ox *et les points d'intersection avec le cercle* C. *On déterminera la position limite de la courbe* Γ *quand* ω *tend vers* 0, *et la position limite de ses points d'intersection avec le cercle* C.

3° *La droite* AB *joignant les extrémités du fil coupe en* D *le diamètre* Ox *et en* E *la tangente en* G *à la courbe* Γ.

On déterminera la position du point E. *Pour cela on considérera une position* A′M′B′ *du fil très voisine de* AMB, *et on démontrera que* E *est le centre de gravité de l'ensemble des fils* AMB *et* A′M′B′, *chaque élément du premier ayant pour masse* $kyds$ *et chaque élément du second* $-kyds$.

On calculera les coordonnées cartésiennes de E, *et celles du milieu* H *de* DE, *puis les coordonnées polaires de* H, *puis de* E, *et enfin l'équation en coordonnées polaires du lieu de* E *quand* G *décrit la courbe* Γ.

1. Pour obtenir le centre de gravité G, nous appliquerons le théorème des moments. Nous calculerons d'abord la masse, $M = \int_{AB} dm$ puis les quantités $\int_{AB} xdm$ et $\int_{AB} ydm$, qui sont les sommes des moments des divers éléments du fil par rapport aux plans perpendiculaires au plan du tableau et passant par Oy et par Ox.



Soit t l'angle du rayon OP avec Oξ, de sorte que les coordonnées de P soient

$$x = R\cos(\varphi + t), \qquad y = R\sin(\varphi + t).$$

Nous aurons d'abord $ds = Rdt$; puis

$$dm = kyds = kR^2\sin(\varphi + t)dt.$$

Nous en déduisons de suite

$$M = \int_{-\omega}^{+\omega} kR^2\sin(\varphi + t)dt = kR^2[\cos(\varphi - \omega) - \cos(\varphi + \omega)], \qquad M = 2kR^2\sin\varphi\sin\omega.$$

Calculons maintenant $\int xdm$ et $\int ydm$; nous obtenons

$$\int xdm = kR^2\int_{-\omega}^{+\omega}\cos(\varphi + t)\sin(\varphi + t)dt.$$

$$\int xdm = \frac{kR}{4}[\cos(2\varphi - 2\omega) - \cos(2\varphi + 2\omega)], \qquad \int ydm = \frac{kR}{2}\sin 2\varphi\sin 2\omega.$$

D'autre part, le théorème des moments, appliqué à la masse tout entière, transportée au centre de gravité, nous donne

$$Ma = \int xdm.$$

Nous obtenons, après réductions simples,

$$a = R \cos\omega \cos\varphi.$$

Nous trouverons de même

$$b = R \frac{2\omega - \sin 2\omega \cos 2\varphi}{4 \sin\omega \sin\varphi};$$

donc les deux coordonnées du point G dans le système Oxy sont données par les formules (1) :

$$(1) \qquad a = R \cos\omega \cos\varphi. \qquad b = R \frac{2\omega - \sin 2\omega \cos 2\varphi}{4 \sin\varphi \sin\omega}.$$

Nous aurons les coordonnées α, β du même point dans le nouveau système $O\xi$, $O\eta$, en appliquant les formules inverses de transformation.

$$\alpha = a \cos\varphi + b \sin\varphi, \qquad \beta = -a \sin\varphi + b \cos\varphi.$$

Ce calcule facile nous donne les formules (2) :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{R}{2} \dfrac{2\omega + \sin 2\omega}{\sin\omega}, \\ \beta = \dfrac{R \cos\varphi}{4 \sin\varphi \sin\omega} (2\omega - \sin 2\omega). \end{cases}$$

Nous apercevons de suite que α est indépendant de φ ; α reste constant quand φ varie ; si on fait tourner les axes Ox et Oy autour du point O, de façon que $O\xi$ et $O\eta$ restent fixes, le lieu de G est une droite parallèle à $O\eta$, droite qui a pour équation $\alpha = C^{te}$.

2. Le lieu du point G, quand Ox et Oy restent fixes et que φ varie seul, est la courbe dont les équations paramétriques sont données par les équations (1) :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = R \cos\omega \cos\varphi, \\ y = \dfrac{R(2\omega - \sin 2\omega \cos 2\varphi)}{4 \sin\omega \sin\varphi}. \end{cases}$$

Cette courbe est unicursale ; il est facile de trouver son équation cartésienne, il suffit de tirer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ de ces deux équations :

$$\cos\varphi = \frac{x}{R \cos\omega}.$$

$$\cos 2\varphi = \frac{2x^2}{R^2 \cos^2\omega} - 1,$$

$$4y \sin\omega \sin\varphi = 2\omega R + \sin 2\omega - \frac{2 \sin 2\omega\, x^2}{R^2 \cos^2\omega}.$$

Cette expression nous donne $\sin\varphi$, et, en portant $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dans l'équation

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

nous obtenons l'équation cartésienne ; nous voyons de suite que c'est une quartique symétrique par rapport aux deux axes.

Construisons et étudions cette courbe à l'aide de ses équations paramétriques.

Les deux fonctions x et y sont deux fonctions périodiques de φ qui ont chacune pour période le nombre 2π ; donc il suffira de faire varier φ dans un intervalle d'amplitude 2π. Mais nous remarquons que le changement de φ en $-\varphi$ n'altère pas la valeur de x et change y en $-y$; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox et si nous prenons pour intervalle total de variation $(-\pi, +\pi)$, nous pourrons ne garder que la partie $(0, \pi)$.

Changeons φ en $\pi - \varphi$, x se change en $-x$ et y ne change pas ; par conséquent la courbe est symétrique par rapport à Oy et, en tenant compte de cette seconde symétrie, il suffira de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. En définitive, il suffira de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Comme nous devons faire croître la constante ω de 0 à π, nous supposerons d'abord ω petit et nous construirons la courbe dans cette hypothèse, et nous verrons ensuite les principales valeurs de ω qui sont à considérer.

La fonction x est toujours décroissante, elle part de $R\cos\omega$ et décroît jusqu'à zéro ; la fonction y est d'abord infinie et positive ; elle reste toujours positive car 2ω est plus grand que $\sin 2\omega$. Enfin pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ elle prend la valeur

$$\frac{R(2\omega + \sin 2\omega)}{4\sin\omega}.$$

Cette valeur est évidemment un maximum ou un minimum. Nous allons voir lequel en étudiant la dérivée de y.

La dérivée y' est égale à

$$y' = \frac{R\cos\varphi(2\sin 2\omega\sin^2\varphi - 2\omega + \sin 2\omega}{4\sin\omega\sin^2\varphi}.$$

Cette quantité s'annule toujours pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, comme nous l'avions prévu ; pour qu'elle s'annule encore il faut que l'on puisse avoir

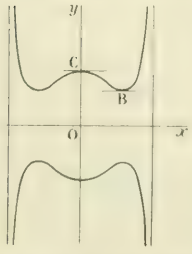
$$\sin^2\varphi = \frac{2\omega - \sin 2\omega}{2\sin 2\omega}.$$

Il faut que le second membre soit positif et plus petit que 1. Le numérateur est toujours positif ; il faut donc que $\sin 2\omega$ soit positif, ce qui est réalisé car ω est supposé petit. Ecrivons que le second membre est plus petit que 1 ; nous aurons

$$2\omega < 3\sin 2\omega, \qquad \text{ou} \qquad 2\omega - 3\sin 2\omega < 0.$$

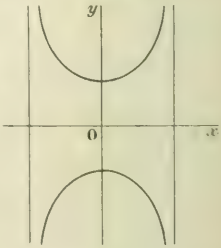
Il est facile de voir que l'équation $2\omega - 3\sin 2\omega = 0$ n'a qu'une racine positive et que cette racine est comprise entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$: pour $\omega = \frac{\pi}{3}$ le premier membre est négatif, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ il est évidemment positif. Appelons α cette racine.

Tant que ω est plus petit que α, la dérivée s'annule pour une valeur de φ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



Elle est d'abord négative, puis positive ; donc y passe par un minimum. Soit B ce minimum ; le point qu'elle a sur Oy, C, correspond à un maximum. Il n'y a plus qu'à compléter par symétrie, pour avoir la courbe tout entière.

Dès que ω dépasse α, quand ω est compris entre α et $\frac{\pi}{2}$, ce minimum disparaît, le point de rencontre de la courbe avec Oy correspond à un minimum ; on a une deuxième forme de courbe, facile à construire.



Il est à remarquer d'ailleurs que, à mesure que ω croît, les asymptotes se rapprochent l'une de l'autre, la courbe se resserre de plus en plus ; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, les deux asymptotes sont confondues avec l'axe des y, et la courbe elle-même vient s'aplatir sur Oy. Quand ω est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, la dérivée de y ne peut plus s'annuler avant la valeur $\frac{\pi}{2}$, la courbe a toujours la deuxième forme ; seulement, quand φ augmente, x augmente et la courbe est décrite en sens contraire de tout à l'heure.

Proposons-nous d'étudier le minimum ou le maximum correspondant au point C, sur Oy.

$$Y = R\frac{2\omega + \sin 2\omega}{4 \sin \omega}.$$

Nous avons de suite

$$Y' = \frac{R \cos \omega (\sin 2\omega - 2\omega)}{4 \sin^2 \omega}.$$

Cette quantité est toujours négative, quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$; par conséquent dans tout l'intervalle que nous avons étudié, OC décroît toujours. Voyons ses valeurs principales : pour $\omega = 0$, nous avons $Y = R$; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, nous avons $Y = \frac{R\pi}{4}$, quantité un peu plus grande que $\frac{3R}{4}$ et, par conséquent, voisine de la précédente. Ceci nous montre en particulier que dans tout cet intervalle la courbe entre dans le cercle; nous devons donc nous attendre à ce qu'il y ait des points de rencontre réels avec le cercle.

Au delà de $\frac{\pi}{2}$, $\cos \omega$ reste négatif pendant un certain temps depuis $\omega = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\omega = \frac{3\pi}{2}$. Dans cet intervalle Y' est positif, la fonction Y est croissante, elle part de $\frac{R\pi}{4}$ pour devenir infinie au voisinage de $\omega = \pi$, puis Y changerait de signe, etc. Nous devons donc nous attendre à ce que, entre 0 et π, la courbe ne pénètre plus dans le cercle.

Cherchons maintenant les points de rencontre de la courbe avec le cercle; écrivons pour cela que $x^2 + y^2 = R^2$; nous aurons

$$16 \sin^2 \omega \sin^2 \varphi = 16 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (2\omega - \sin 2\omega \cos 2\varphi)^2;$$

or ceci s'écrit

$$16 \sin^2 \omega \sin^2 \varphi = \sin^2 2\omega + 4\omega^2 - 4\omega \sin 2\omega \cos 2\varphi$$

ou enfin, en exprimant tout en fonction de $\sin^2 \varphi$, et en calculant $\sin^2 \varphi$,

$$\sin^2 \varphi = \frac{(2\omega - \sin 2\omega)^2}{16 \sin^2 \omega - 8\omega \sin 2\omega}.$$

Si le second membre est positif et plus petit que 1, on tire de là une valeur positive de $\sin \varphi$, à laquelle correspond une valeur de φ du premier quadrant, c'est-à-dire un point de rencontre de la courbe avec le cercle dans le premier quadrant; mais, comme le numérateur est positif, il suffira d'exprimer que le numérateur est plus petit que le dénominateur :

$$16 \sin^2 \omega - 8\omega \sin 2\omega > (2\omega - \sin 2\omega)^2$$

ou encore

$$16 \sin^2 \omega - (2\omega + \sin 2\omega)^2 > 0.$$

Le premier membre se décompose en un produit de deux facteurs :

$$(4 \sin \omega + 2\omega + \sin 2\omega)(4 \sin \omega - 2\omega - \sin 2\omega) > 0:$$

le premier facteur est toujours positif, le deuxième facteur, $4 \sin \omega - 2\omega - \sin 2\omega$, est nul au départ, pour $\omega = 0$, puis, positif. La dérivée de ce facteur est

$$4 \cos \omega - 4 \cos^2 \omega,$$

positive de 0 à $\frac{\pi}{2}$; donc le deuxième facteur est une fonction croissante et toujours positive de 0 à $\frac{\pi}{2}$; pour $\frac{\pi}{2}$ sa valeur est $4 - \pi$; au delà de $\frac{\pi}{2}$, la dérivée est négative, par conséquent ce facteur décroît et il est visible que pour $\omega = \pi$ il est négatif; par conséquent, il existe une valeur β de ω, comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, pour laquelle ce facteur cesse d'être positif.

Concluons : quand ω varie de 0 à β les points de rencontre avec le cercle sont réels; ensuite, ils sont imaginaires. Quant au sens de la concavité au point C, il est évident d'après la discussion.

Cherchons enfin ce que devient la courbe quand ω tend vers zéro. Il nous suffit pour cela de chercher les limites vers lesquelles tendent x et y. Nous avons visiblement $x = R\cos\varphi$, puis en prenant les limites des deux rapports qui se trouvent dans y,

$$y = \frac{R}{2\sin\varphi} - \frac{R\cos 2\varphi}{2\sin\varphi}, \qquad \text{ou bien} \qquad y = \frac{R(1-\cos 2\varphi)}{2\sin\varphi} = R\sin\varphi.$$

La courbe admet pour limite le cercle proposé. Ceci était évident *a priori*, car lorsque l'arc AMB est infiniment petit, son centre de gravité est confondu avec le point M et décrit par conséquent le cercle proposé.

Pour apercevoir les points limites des points d'intersection de la courbe avec le cercle, cherchons la limite de

$$\sin^2\varphi = \frac{(2\omega - \sin 2\omega)^2}{16\sin^2\omega - 8\omega\sin 2\omega}.$$

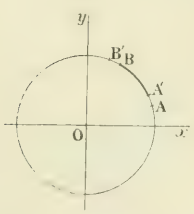
Développons en série ; la partie principale du numérateur est $\left(\frac{8\omega^3}{6}\right)^2$; celle du dénominateur

est $$16\left(\omega - \frac{\omega^3}{6}\right)^2 - 8\omega\left(2\omega - \frac{8\omega^3}{6}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{32\omega^4}{6};$$

la partie principale de $\sin^2\varphi$ est $$\frac{\frac{64\omega^6}{36}}{\frac{32\omega^4}{6}} = \frac{\omega^2}{3}.$$

Les points de rencontre tendent vers les points du cercle situés sur Ox.

3. Soient AB et A'B' deux arcs infiniment voisins et égaux tous deux à $2R\omega$. Si les masses des éléments de l'arc A'B' sont égales à $-kyds$, le centre de gravité de l'arc A'B' coïncide avec le point G', qui correspond aux masses égales à $kyds$ et le centre de gravité de l'ensemble des deux arcs AB et A'B' est sur la droite GG', à la limite sur la tangente en G à la courbe Γ. Il est aussi au centre de gravité des deux arcs infiniment petits AA' et BB', puisque les masses des deux arcs superposés en AB se détruisent ; il est donc sur la droite AB. Le point E, de concours de la droite AB et de la tangente en G, est donc le centre de gravité des arcs infiniment petits AA' et BB', qui ont respectivement pour masses $kR^2\sin(\varphi-\omega)d\varphi$ et $-kR^2\sin(\varphi+\omega)d\varphi$.



Les coordonnées des points A et B sont respectivement

$$R\cos(\varphi-\omega), \qquad R\sin(\varphi-\omega) \qquad \text{et} \qquad R\cos(\varphi+\omega), \qquad R\sin(\varphi+\omega).$$

L'x du centre de gravité est donc donné par

$$kR^2[\sin(\varphi-\omega) - \sin(\varphi+\omega)]x = kR^2\sin(\varphi-\omega)\cos(\varphi-\omega) - kR^2\sin(\varphi+\omega)\cos(\varphi+\omega),$$

ou $$4x\sin\omega\cos\varphi = 2R\sin 2\omega\cos 2\varphi,$$

$$x = \frac{R\cos\omega\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

L'y est donné de même par

$$kR^2[\sin(\varphi-\omega) - \sin(\varphi+\omega)]y = kR^2[\sin^2(\varphi-\omega) - \sin^2(\varphi+\omega)],$$

ou $$y = 2R\sin\varphi\cos\omega.$$

D'autre part, la droite AB a pour équation

$$\frac{x - R\cos(\varphi-\omega)}{\cos(\varphi+\omega) - \cos(\varphi-\omega)} = \frac{y - R\sin(\varphi-\omega)}{\sin(\varphi+\omega) - \sin(\varphi-\omega)},$$

$$\frac{x - R\cos(\varphi-\omega)}{-\sin\varphi} = \frac{y - R\sin(\varphi-\omega)}{\cos\varphi}.$$

Le point de rencontre D avec Ox a pour abscisse

$$x = \frac{R\cos\omega}{\cos\varphi}.$$

Le milieu H des deux points que nous venons de calculer a pour coordonnées

$$x = R\cos\omega\cos\varphi, \qquad y = R\cos\omega\sin\varphi.$$

Le lieu de ce point est le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2\omega.$$

Il nous reste à trouver l'équation du lieu du point E en coordonnées polaires. Rappelons que les coordonnées cartésiennes de ce point, en fonction du paramètre φ, sont

$$x = \frac{R\cos\omega\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad y = 2R\cos\omega\sin\varphi.$$

Si donc nous désignons par r et α les coordonnées polaires de ce point, nous aurons

$$r\cos\alpha = \frac{R\cos\omega\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad r\sin\alpha = 2R\cos\omega\sin\varphi = R\cos\omega\frac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi}$$

Nous voyons donc que $\alpha = 2\varphi$ et $r = \dfrac{R\cos\omega}{\cos\varphi}$. L'équation en coordonnées polaires est alors

$$r = \frac{R\cos\omega}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{K}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},$$

K étant la constante $R\cos\omega$.

Bonnes solutions : MM. Betbezé-Cuel-Octave, lycée de Toulouse : G. Lach, à Denain.

ÉCOLE CENTRALE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Suite.*)

Géométrie, Géométrie cotée et Géométrie descriptive (M. Malloizel).

Géométrie descriptive (suite).

9627. — Construire un octaèdre, connaissant un sommet et sachant qu'une arête est placée suivant une droite donnée.

9628. — On donne un segment de droite $(ab, a'b')$. C'est la ligne de pente d'un plan. On demande les projections du carré construit dans ce plan ayant $(ab, a'b')$ comme diagonale. Construire l'octaèdre régulier admettant ce plan comme plan diagonal.

9629. — Angle de deux plans donnés par leurs traces. Angle d'un plan donné par ses traces avec le deuxième plan bissecteur.

9630. — Trouver le plan bissecteur du dièdre formé par un plan vertical et un plan de bout.

9631. — Angle d'une droite donnée par ses deux projections avec le premier bissecteur ; avec le second bissecteur.

9632 — Faire tourner un point (a, a') d'un certain angle autour d'une droite (D, D').

9633. — Mener par un point une droite faisant avec les plans de projection deux angles donnés.

9634. — Mener par un point un plan faisant avec un plan de bout et avec un plan vertical des angles donnés.

9635. — Mener par une droite un plan faisant un angle donné avec un plan donné.

9636. — Mener par la ligne de terre un plan faisant un angle donné avec un plan donné par ses traces.

9637. — Mener par une droite de profil un plan faisant un angle donné avec un plan donné par ses traces.

9638. — Mener par une droite de profil un plan faisant un angle donné avec le deuxième bissecteur.

9639. — Construire un trièdre connaissant une face et les deux dièdres adjacents.

9640. — Une circonférence est tangente à une droite (d, d') et passe par un point (a, a') ; elle passe aussi par un point (b, b') dont on ne connaît que la projection horizontale b. Projections de cette circonférence.

9641. — Une parabole a pour sommet le point (a, a'), pour axe la droite $(ad, a'd')$: elle passe par un point (m, m'). Construire les projections de la parabole.

9642. — Un cylindre limité par le plan horizontal et un plan parallèle H' a pour base un cercle (o, o') dans le plan horizontal. Ombre du cylindre, les rayons lumineux étant parallèles à une direction donnée.

9643. — On donne un segment $(ab, a'b')$. Un carré a pour côté $(ab, a'b')$ et tourne autour de ce côté. Projections du cylindre engendré.

9644. — Un triangle équilatéral tourne autour d'un de ses côtés. Contours apparents du double cône engendré.

9645. — Contours apparents d'un cylindre, dont on donne la direction des génératrices $(oy, o'y')$: la base est une ellipse dont on donne l'un des demi-axes $(oa, o'a')$ ainsi que la projection horizontale ob du second.

9646. — Dans un plan donné par ses traces P×Q', se trouve un cercle de rayon donné et de centre z : c'est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à la ligne de terre. Mener à ce cylindre un plan tangent parallèle à une direction donnée (d, d').

9647. — Dans un plan donné par une horizontale et une frontale, se trouve un cercle de centre (o, o'). C'est la base d'un cône de sommet (s, s'). Mener à ce cône un plan tangent faisant avec le plan donné un angle donné.

9648. — On donne trois points (a, a'), (b, b'), (c, c'). Par ces trois points passe une circonférence, section droite d'un cylindre de révolution. Trouver l'intersection du cylindre avec une droite donnée.

9649. — Intersection de la droite (δ, δ') avec un cône de sommet (s, s'), dont la base est un cercle passant par un point (a, a') et tangent à une droite donnée en un point (b, b').

9650. — Un segment de droite $(ab, a'b')$ est l'axe d'une ellipse qui passe par un point (m, m'). Cette ellipse est la base d'un cône de sommet (s, s'). Intersection du cône et d'une droite donnée.

9651. — Normale commune au cône de sommet (s, s'), ayant pour base un cercle (o, o') dans le plan horizontal, et à un cylindre dont la base est un cercle (ω, ω') dans le plan vertical, de génératrices parallèles à $(\omega a, \omega' a')$.

9652. — Mener par un point (m, m') une droite tangente à un cône de révolution à axe vertical et à un cylindre de révolution d'axe (d, d') et de rayon R.

9653. — Construire un cône de révolution circonscrit à une sphère, passant par un point et tangent à deux droites données.

9654. — Construire un cône de révolution tangent à trois plans, l'un est vertical, l'autre de bout, le troisième est quelconque.

9655. — On donne deux droites $(sa, s'a')$, $(sb, s'b')$. Ce sont les axes de deux cônes de révolution de même sommet. Mener un plan tangent commun à ces deux cônes.

9656. — Mener par un point donné (a, a') un plan tangent au cône circonscrit à une sphère donnée ayant pour sommet un point (s, s').

9657. — Mener par une droite un plan tangent à une sphère.

9658. — Plans tangents communs à trois sphères.

9659. — Construire une droite tangente à deux sphères et parallèle à une direction donnée.

9660. — Intersection d'une droite et d'un cône de sommet donné circonscrit à une sphère.

9661. — Section plane d'une sphère.

9662. — Pôle d'un plan donné par ses traces, par rapport à une sphère.

9663. — Trouver les points communs à trois sphères.

9664. — Ombre propre et ombres portées par une sphère, sur les plans de projection, parallèlement au rayon lumineux (d, d').

9665. — Une courbe (c, c') dont la projection horizontale c est une droite, et la projection verticale c' un cercle, tourne autour de l'axe vertical (z, z'). Trouver la méridienne de la surface ainsi engendrée.

9666. — Mener à un ellipsoïde de révolution à axe vertical un plan tangent parallèle à un plan donné.

9667. — Cône circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical, de sommet (s, s'). Trace horizontale du cône : point et tangente.

9668. — Courbe de contact d'un cône circonscrit à un paraboloïde de révolution à axe vertical. Trace horizontale du cône.

9669. — Un point (s, s') est le sommet d'un cône circonscrit à un tore d'axe vertical. — Trouver un point de la courbe de contact.

9670. — Courbe de contact d'un cylindre de génératrices parallèles à une direction donnée, circonscrit à un tore d'axe vertical.

9671. — Par une droite, rencontrant l'axe d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical, mener un plan tangent à cette surface. Trouver l'angle des deux plans tangents.

9672. — Par une droite de front, — par une droite quelconque, — mener un plan tangent à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

9673. — Un conoïde est engendré par une droite horizontale tangente à une sphère et rencontrant un axe vertical (z, z'). Etudier la courbe de contact en projection.

9674. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et une droite verticale, dans le plan de front de l'axe. Une droite reste horizontale, touche l'ellipsoïde et rencontre la droite verticale. Trouver la courbe de contact.

9675. — Mener un plan tangent parallèle à un plan donné par deux droites qui se coupent, à un hyperboloïde de révolution, engendré par rotation d'une droite quelconque, D, autour d'un axe vertical (z, z').

9676. — On considère un cône de révolution à axe vertical. C'est le cône asymptote d'un hyperboloïde dont on donne un point (m, m'). Trouver les génératrices de la surface qui passent par le point (m, m').

9677. — Une ellipse située dans un plan de front est la méridienne d'une surface de révolution. Trouver le contour apparent de cette surface. Étant donnée la projection verticale d'un point, trouver la projection horizontale.

9678. — Trouver le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde de révolution, défini par son axe, qui est le segment de front $(ab, a'b')$, et connaissant la projection horizontale d'un point de l'équateur.

9679. — Contour apparent d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'un cercle situé dans le plan vertical, autour d'un axe de front.

9680. — Une droite (g, g') parallèle à la ligne de terre, tourne autour de la droite de front (d, d'). Étant donnée la projection verticale m' d'un point de la surface, trouver la projection horizontale.

9681. — Contour apparent horizontal de la surface engendrée par la rotation d'une droite quelconque autour d'une droite horizontale.

9682. — Trouver le centre de la surface engendrée par une droite verticale tournant autour d'une droite quelconque. Cône asymptote de la surface.

9683. — Une droite horizontale (H, H') tourne autour d'une droite quelconque (A, A'). Déterminer le centre et le cône asymptote de la surface engendrée.

9684. — Une surface de révolution est engendrée par la rotation d'un cercle de front autour d'une droite quelconque. Déterminer un point de la surface.

9685. — Contours apparents d'une surface de révolution engendrée par un cercle donné dans un plan horizontal, tournant autour d'une droite (D, D').

9686. — Un cercle horizontal se déplace en rencontrant trois droites données. Connaissant la projection verticale m' d'un point de la surface, trouver la projection horizontale m.

9687. — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur un plan quelconque $P\alpha Q'$, une génératrice verticale (a, a') et une autre génératrice de bout (b, b'). Tracer une génératrice de la surface. Connaissant la projection horizontale d'un point, trouver la projection verticale. Plan tangent en ce point.

9688. — Tracer une génératrice du paraboloïde hyperbolique défini par le quadrilatère gauche ABCD. Quelle est la direction des diamètres ?

9689. — Un paraboloïde hyperbolique est défini par les deux droites (d, d'), (δ, δ') et un plan directeur horizontal. Courbe de contact du cône circonscrit de sommet (s, s') ; point et tangente.

9690. — On donne un paraboloïde hyperbolique par un plan directeur (le plan horizontal) et deux génératrices. On considère le cylindre circonscrit parallèlement à une direction (δ, δ'). Construire un point de la courbe de contact du cylindre, et le point correspondant de sa trace sur le plan horizontal.

9691. — Une droite s'appuie sur trois droites dont les projections verticales sont parallèles. On donne la projection verticale m' d'un point de la surface engendrée ; trouver m.

9692. — On donne un cylindre dont la base dans le plan horizontal est le cercle (o, o') ; (a, a') étant un point de la génératrice (l, l'), section droite du cylindre passant par le point (a, a'). Point de la section et tangente en ce point. Trouver une tangente de front.

9693. — Un cône a pour sommet le point (s, s') et pour base le cercle (o, o') dans le plan horizontal. Soit (a, a') le point le plus à droite de ce cercle ; on prend un point (m, m') sur la génératrice $(sa, s'a')$. Section du cône par le plan perpendiculaire à $(sa, s'a')$ mené par le point (m, m').

9694. — On donne un cône de sommet (s, s') dont la base est un cercle dans le plan horizontal et une droite (d, d'). Mener par cette droite un plan coupant le cône suivant une parabole.

9695. — Un prisme dont les génératrices sont horizontales a pour base dans le plan vertical un quadrilatère. Un cylindre dont les génératrices sont horizontales également a pour base dans le plan vertical une ellipse. Intersection des deux surfaces.

9696. — On donne un cylindre et deux droites parallèles D, Δ. Ces deux droites sont les arêtes d'une règle traversant le cylindre. Représenter l'ensemble du cylindre supposé opaque et de la règle.

9697. — On donne les projections d'un triangle $(abc, a'b'c')$ et un point (s, s'). C'est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle ABC. Couper ce cône par un plan passant par un point donné et parallèle au plan SAB.

9698. — Un cône de sommet (s, s') a pour base dans le plan $(abc, a'b'c')$ une courbe se projetant horizontalement suivant le cercle abc. Section plane de ce cône par un plan passant par un point (m, m') et parallèle au plan $(sab, s'a'b')$.

9699. — Dans un plan donné par ses traces se trouve un point, centre d'un cercle de rayon donné ; c'est la base d'un cône de sommet (s, s'). Trouver les directions de plans coupant le cône suivant un cercle.

9700 — Un cylindre de révolution de rayon donné a pour axe la droite (d, d'). Intersection de ce cylindre par un plan donné par ses traces.

9701. — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un plan donné par ses traces. Trouver un point et la tangente en ce point. Développement du cône et de la section.

9702. — Un cône de révolution à axe vertical est coupé par un plan de bout. Foyers de la section. Projection horizontale de la section.

9703. — Mener par une droite un plan qui coupe un cône de révolution d'axe vertical suivant une parabole. Projections de cette parabole.

9704. — On donne une ellipse dans le premier plan bissecteur ; c'est la section d'un cylindre de révolution que l'on demande de déterminer.

9705. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical par un plan donné par ses traces. Mener d'un point du plan des tangentes à la section.

9706. — Intersection d'un paraboloïde dont l'axe est vertical avec un plan quelconque.

9707. — Trouver les sommets de la section d'un tore à axe vertical par un plan donné par ses traces.

9708. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution d'axe de front avec un plan vertical.

9709. — Section par un plan vertical P de la surface engendrée par un cercle (c, c') (dans un plan horizontal), autour d'une droite de front $(ad, a'd')$.

9710. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

9711. — Section plane d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical.

9712. — Un hyperboloïde de révolution est donné par son axe vertical et une génératrice quelconque. Couper cet hyperboloïde par un plan passant par un point de la génératrice et perpendiculaire à cette droite. Nature de la section.

9713. — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est engendré par une droite de front (d, d') tournant autour de l'axe. Section de l'hyperboloïde par un plan défini par la droite (d, d') et un point donné (c, c').

9714. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical. Intersection par un plan passant par un point donné et parallèle à deux génératrices de la surface.

9715. — Section plane d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, donné par deux génératrices.

9716. — Intersection d'un plan de bout avec un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan horizontal et pour génératrices deux droites D et Δ.

9717. — On donne une droite verticale et une droite D quelconque. Ces droites définissent un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan horizontal. Par la droite D, on mène un plan faisant un angle donné avec le plan horizontal. Section de la surface par ce plan.

9718. — On donne deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur commun, et une droite (d, d'). Faire passer par (d, d') un plan coupant les deux surfaces suivant deux hyperboles ayant les mêmes directions asymptotiques.

9719. — Intersection d'une droite quelconque et du paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal, donné par deux génératrices de front.

9720. — Intersection d'un cylindre à génératrices de front ayant pour base un cercle dans le plan horizontal avec un cylindre droit ayant pour base une ellipse donnée dans le plan horizontal.

9721. — Un cône oblique, à base circulaire située dans le plan horizontal, est coupé par un cylindre de bout dont la base dans le plan vertical est un cercle tangent aux génératrices de contour apparent du cône. Intersection.

9722. — Intersection de deux cylindres horizontaux : l'un a pour base dans le plan vertical P une courbe se projetant verticalement suivant une ellipse donnée, l'autre dans le plan vertical Q une courbe projetée verticalement suivant un cercle.

9723. — On donne un cône de sommet (s, s') ayant pour base une hyperbole dans le plan horizontal. Soient $(sa, s'a')$, $sb, s'b')$ les génératrices de contour apparent horizontal de ce cône. Un cylindre de bout a pour trace verticale un cercle $o, o')$ tangent à $s'a'$ et $s'b'$. Intersection des deux surfaces.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2223. — On considère la fonction

$$y = x^{-1}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right).$$

1° Trouver les valeurs principales de la fonction ; calculer ses diverses dérivées. Expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$. Variation de cette fonction et courbe représentative.

2° Trouver l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x, l'ordonnée d'abscisse 1 et celle d'abscisse x. Montrer que cette fonction s'annule pour une valeur de x plus grande que 1.

3° Former le polynome du 4e degré qui prend, ainsi que ses dérivées, les mêmes valeurs respectivement que la fonction y et ses quatre premières dérivées, pour $x = 1$. E. H.

2224. — On considère l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

La polaire d'un point M rencontre les axes en P et Q et la perpendiculaire abaissée de M sur PQ, en P' et Q'.

1° Si M décrit la parabole $y^2 = 2px + q$,

la droite PQ enveloppe une conique.

2° Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de la droite P'Q'; construire cette enveloppe en supposant $q > 0$, puis $q < 0$. Dans quel cas a-t-on une conique ?

L. Naquelle, à La Châtre.

Erratum. — La quatrième partie de la question 2151 n'a aucun sens et doit être supprimée.

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Mars 1914. N° 6.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES EN SÉRIE ENTIÈRE

par M. **V. Jamet.**

1. Plusieurs questions intéressant les candidats à nos grandes écoles se rattachent à la proposition suivante : *Soit $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ une suite indéfinie de nombres tels que chacun dépende de son rang et aussi d'une même variable h qui tend vers une limite λ, finie, nulle ou infinie. Si, supposant n fini, on a constaté que v_n tend vers une limite u_n, et si l'on a démontré la convergence de la série Σu_n, peut-on conclure que la somme $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$ a pour limite Σu_n ?*

Je dis que la réponse est affirmative chaque fois que l'on peut trouver un nombre n assez grand pour que le module de la somme

$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \cdots$$

soit plus petit qu'un nombre donné à l'avance, aussi petit qu'on voudra, pour une certaine valeur de h et pour toute valeur de cette variable encore plus proche de sa limite.

En effet, étant donné un nombre ε aussi petit qu'on veut, on peut, d'après nos hypothèses, choisir un nombre n assez grand pour que, si l'on pose

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \theta \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots = \theta' \frac{\varepsilon}{3},$$

θ et θ' soient compris l'un et l'autre entre -1 et $+1$ lorsque h varie à partir d'une certaine valeur initiale et tend vers la limite qui lui est assignée.

Soient

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = V_n ;$$

soient aussi S la somme de la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

et V la somme

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots ;$$

on trouvera

$$S = S_n + \theta \frac{\varepsilon}{3},$$

$$V = V_n + \theta' \frac{\varepsilon}{3},$$

$$S - V = S_n - V_n + (\theta - \theta') \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais le nombre n étant désormais invariable, et les sommes S_n et V_n ayant chacune un nombre fini de termes, l'hypothèse

$$\lim. v_n = u_n$$

montre que l'on a

$$\lim. V_n = S_n,$$

c'est-à-dire qu'on peut assigner à h une valeur h_n telle que, si la variable h, partant de h_n, se rapproche de sa limite, on ait sans cesse

$$S_n - V_n = \theta \frac{\varepsilon}{3},$$

θ étant compris entre -1 et $+1$.

On en conclut

$$S - V = \theta_1 + \theta - \theta' \cdot \frac{\varepsilon}{3},$$

ou

$$|S - V| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition

2. Les questions auxquelles nous avons fait allusion au début de cet article sont les suivantes :

a. Limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, quand m augmente au-delà de toute limite.

b) Dérivée de la somme d'une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes d'une variable x.

c) Limite de la somme d'une telle série, quand celle-ci reste convergente aux limites ou à l'une des limites de son domaine de convergence.

De ces trois questions, les deux premières peuvent être traitées entièrement par l'application du principe précédent ; la troisième peut être résolue dans divers cas d'application fréquente.

a) On suppose, bien entendu, m entier positif (la variable h est ici remplacée par m), et l'on constate que, si le module de x est désigné par ρ, la somme des termes qui, dans le développement de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, suivent le $(n+1)^{\text{me}}$ a un module moindre que

$$\frac{\rho^{n+1}}{\overline{n+1}\,!} + \frac{\rho^{n+2}}{\overline{n+2}\,!} + \cdots :$$

puis on observe qu'il est possible de choisir n assez grand pour que cette dernière somme soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

On constate encore que, si p est invariable, le $(p+1)^{\text{me}}$ terme du développement considéré, savoir :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p\,!} \cdot \frac{x^p}{m^p},$$

a pour limite

$$\frac{x^p}{p\,!},$$

et l'on en conclut :

$$\lim. \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^p}{p} + \cdots$$

au moins quand on fait varier m comme il a été dit ci-dessus.

Chercher ce qui arrive quand on assigne à la variable m une toute autre loi de croissance serait refaire une fois de plus la théorie du nombre e, ce qui est inutile ici

On remarquera cependant que, si l'on veut prendre pour base de la théorie le théorème sur la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, on peut adopter la démonstration précédente, en faisant $x = 1$.

b) Soit une série entière

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Ayant démontré que cette série est convergente, ainsi que la série formée par les dérivées de ses termes, pour toute valeur de x dont le module est moindre qu'un certain nombre a (rayon de convergence); désignant en outre par $f(x)$ la somme de la série proposée, on veut démontrer que le quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a pour limite la somme de la série

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$$

quand h tend vers zéro. A cet effet, on constate que l'accroissement de la fonction $f(x)$ peut être développé en une série de termes de la forme

$$a_n[(x+h)^n - x^n]$$

ou $$na_n(x+\theta_n h)^{n-1} \times h, \qquad (\theta_n \text{ étant compris entre zéro et } 1)$$

de sorte que le quotient ci-dessus est égal à la somme d'une série ayant pour terme général

$$na_n(x+\theta_n h)^{n-1}.$$

Si on laisse n invariable, ce terme a pour limite

$$na_n x^{n-1}.$$

Il suffit donc de démontrer la possibilité de choisir un nombre n assez grand pour que l'on ait

$$\left| \sum_{p=1}^{p=\infty} (n+p) a_{n+p} x^{n+p-1} \right| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné à l'avance, aussi petit qu'on voudra. Soit donc

$$|a_k| = \alpha_k$$

et soit ρ le plus grand des deux nombres $|x|$, $|x+h|$. La somme ci-dessus a un module plus petit que

$$\left| \sum_{p=1}^{p=\infty} (n+p) \alpha_{n+p} \rho^{n+p-1} \right|$$

et il est possible de choisir n assez grand pour que cette dernière somme soit inférieure à ε, puisque la série

$$\sum n a_n x^{n-1}$$

est absolument convergente pour $x = \pm\rho$.

c) Soit a le rayon de convergence de la série entière

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

et soit $f(x)$ la valeur que prend la somme de cette série pour toute valeur de x comprise entre $-a$ et $+a$. Soit encore

$$(1) \qquad S = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots;$$

cette dernière série étant supposée convergente, la question est de savoir si $f(x)$ tend vers S quand x tend vers a. J'examinerai d'abord le cas particulier, assez fréquent, où la série (1) est alternée. Si dans la série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

on suppose x infiniment voisin de a, on trouve encore une série alternée, par suite une série dans laquelle la somme des termes qui suivent le $(n+1)^{me}$ a un module moindre que celui de a_nx^n, par suite moindre que celui de a_na^n, et celui-ci tend vers zéro quand n est de plus en plus grand.

Un cas aussi fréquent et tout aussi simple est celui où, à partir d'un certain rang, les termes de la série (1) ont tous le même signe; auquel cas le module de

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} a_{n+p} x^{n+p}$$

est moindre que celui de

$$\sum_{p=1}^{p=r} a_{n+p} a^{n+p}$$

et cette dernière somme tend vers zéro quand n est de plus en plus grand.

NOTE SUR UN PROCÉDÉ DE CALCUL DES INTÉGRALES DE LA FORME

$$\int f(x)\sin ax\,dx \qquad \text{et} \qquad \int f(x)\cos ax\,dx$$

par M. **Georges Morel**, élève à l'école des Anglais, Lyon.

Je vais montrer que l'on saura calculer ces intégrales toutes les fois que l'on connaîtra une solution particulière d'une équation différentielle du second ordre dont le second membre est $f(x)$.

Soit une fonction v définie en fonction de z et de x par l'égalité

$$v = z\cos ax + \lambda\frac{dz}{dx}\sin ax\,;$$

λ est une constante. La dérivée est

$$v' = \frac{dz}{dx}\cos ax - az\sin ax + \lambda\frac{d^2z}{dx^2}\sin ax + a\lambda\frac{dz}{dx}\cos ax.$$

Si l'on prend
$$\lambda = -\frac{1}{a},$$

la dérivée se réduit à
$$v' = -\left(az + \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\sin ax.$$

Il suffit de prendre
$$az + \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dx^2} = -f(x).$$

Toutes les fois que l'on saura intégrer cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants, on aura

$$\int f(x)\sin ax\,dx = v + C = z\cos ax - \frac{1}{a}\frac{dz}{dx}\sin ax + C.$$

Il suffit d'ailleurs que, dans cette formule, z soit une quelconque des solutions particulières de l'équation différentielle ci-dessus.

De même, si l'on considère la fonction

$$v = z\sin ax + \frac{1}{a}\frac{dz}{dx}\cos ax,$$

la dérivée s'écrit
$$v' = \left(az + \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dx^2}\right)\cos ax.$$

On est ainsi amené à intégrer l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$az + \frac{1}{a}\frac{d^2z}{dx^2} = f(x).$$

Si l'on en connaît une solution particulière, on a immédiatement

$$\int f(x)\cos ax\,dx = z\sin ax + \frac{1}{a}\frac{dz}{dx}\cos ax + C.$$

Soit, par exemple, à calculer l'intégrale $\int x^2 e^x \sin^2 x\,dx$. En remarquant que $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$,

l'intégrale proposée se décompose en une différence de deux autres :

$$\int x^2 e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx - \frac{1}{2}\int x^2 e^x \cos 2x dx.$$

La première se calcule aisément :

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2).$$

Reste à calculer l'intégrale $\int x^2 e^x \cos 2x dx$.

Elle est de la forme $\int f(x) \cos ax dx$ $(a = 2)$.

La théorie précédente amène à poser

$$x^2 e^x = 2z + \frac{z''}{2}. \tag{1}$$

L'intégrale considérée est alors

$$\int x^2 e^x \cos 2x dx = z \sin 2x + \frac{z'}{2} \cos 2x + C.$$

Si l'on prend $z = \varphi(x) e^x$ [$\varphi(x)$ étant un polynome entier], en dérivant, on obtient successivement

$$z' = e^x[\varphi(x) + \varphi'(x)],$$

$$z'' = e^x[\varphi(x) + 2\varphi'(x) + \varphi''(x)],$$

et, en formant la combinaison indiquée par l'équation (1),

$$x^2 = \frac{5}{2}\varphi(x) + \varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x).$$

Ainsi, on voit que l'on peut prendre pour $\varphi(x)$ un polynome du second degré. En prenant

$$\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

par identification on obtient

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{-8}{25}, \qquad C = \frac{-4}{125}.$$

Donc

$$z = \frac{2e}{5}\left[x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}\right],$$

$$z' = \frac{2e^x}{5}\left[x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{22}{25}\right],$$

et

$$\int x^2 e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x}{5}\left[\left(x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}\right)\sin 2x + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{22}{25}\right)\cos 2x\right] + C.$$

Finalement,

$$\int x^2 e^x \sin^2 x dx = \frac{e^x}{2}\left[(x^2 - 2x + 2) - \frac{2}{5}\left(x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}\right)\sin 2x - \frac{1}{5}\left(x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{22}{25}\right)\cos 2x\right] + C.$$

ALGÈBRE

2134. — *Reconnaître la convergence ou la divergence de la série*

$$\frac{x}{3!} + \frac{x(1-x)}{4!} + \frac{x(1-x)(2-x)}{5!} + \frac{x(1-x)(2-x)(3-x)}{6!} + \cdots$$

et, dans le cas où elle est convergente, démontrer que la somme a pour valeur $\frac{x}{2(x+2)}$; *on suppose que, si x est positif, x n'est pas un nombre entier.*

1. Pour reconnaître la convergence ou la divergence de la série

$$\frac{x}{3!} + \frac{x(1-x)}{4!} + \frac{x(1-x)(2-x)}{5!} + \cdots$$
$$+ \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)}{(n+2)!} + \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)(n-x)}{(n+3)!} + \cdots,$$

formons le rapport d'un terme au précédent. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-x}{n+3} = \frac{1-\dfrac{x}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}$$

et ce rapport tend vers 1 si n croît indéfiniment. Il y a donc doute : cependant si on a $x < -3$, le rapport tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 ; la série est donc divergente pour $x < -3$. Supposons $x > -3$, et appliquons la règle de Duhamel. Posons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-x}{n+3} = \frac{1}{1+\alpha},$$

d'où $\alpha = \dfrac{3+x}{n-x}$ et $n\alpha = \dfrac{3+x}{1-\dfrac{x}{n}}$; $n\alpha$ tend vers $x+3$ si n croît indéfiniment ; donc si $x+3 > 1$, ou $x > -2$, la série est convergente ; si $x+3 < 1$, ou $x < -2$, la série est divergente.

Enfin si $x = -2$, la série proposée est la série harmonique changée de signe ; elle est divergente.

En résumé :

$$\begin{cases} x > -2 & \text{série convergente.} \\ x < -2 & \text{série divergente.} \end{cases}$$

2. Supposons la série convergente, c'est-à-dire $x > -2$, et vérifions que la somme de la série vaut $S = \dfrac{x}{2(x+2)}$. Désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série. On a

$$S - S_1 = \frac{x}{2(x+2)} - \frac{x}{3!} = \frac{x(1-x)}{3!(x+2)},$$

$$S - S_2 = \frac{x(1-x)}{3!(x+2)} - \frac{x(1-x)}{4!} = \frac{x(1-x)(2-x)}{4!(x+2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S - S_n = \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)}{(n+1)!(x+2)} - \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)}{(n+2)!} = \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)(n-x)}{(n+2)!(x+2)}.$$

Posons $$v_n = S - S_n = \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)(n-x)}{(n+2)!(x+2)}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que v_n tend vers zéro ; or v_n est le terme général d'une série ; si cette série est convergente, v_n tend vers zéro et la propriété est établie. Remarquons que

$$v_n = u_n \times \frac{n-x}{x+2};$$

or on sait que, dans une série, si nu_n ne tend pas vers zéro la série est divergente ; comme la série proposée est convergente, nu_n, et par suite $(n-x)u_n$, et aussi $\dfrac{n-x}{x+2}u_n$ tend vers zéro ; donc $\lim. v_n = 0$, et S_n tend vers S, ce qu'il fallait démontrer.

A. MACÉ DE LÉPINAY.

Note de la Rédaction. — Pour sommer la série proposée, il suffit de remarquer que le terme général peut s'écrire

$$\frac{(-1)^n x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(n+3)!}.$$

En le multipliant par y^{n+3} et prenant deux fois la dérivée par rapport à y, ce terme devient

$$\frac{(-1)^n x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)y^{n+1}}{(n+1)!};$$

c'est le terme général du développement de $(1-y)^x$, changé de signe. D'autre part, le premier terme, traité de la même façon, devient $\frac{x}{1}y$, après deux dérivations. La dérivée seconde par rapport à y de la série a donc pour valeur

$$1-(1-y)$$

pour toutes les valeurs de y inférieures à 1. En intégrant deux fois, nous avons d'abord

$$y+\frac{(1-y)^{x+1}}{x+1}-\frac{1}{x+1},$$

puisque la série correspondante est nulle pour $y=0$;

puis,
$$\frac{y^2}{2}-\frac{(1-y)^{x+2}}{(x+1)(x+2)}-\frac{y}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

pour une raison semblable.

Cette série, nous l'avons vu, est encore convergente pour $y=1$; nous pouvons donc faire $y=1$ et la somme est

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)(x+2)},$$

ou
$$\frac{(x+1)(x+2)-2(x+2)+2}{2(x+1)(x+2)}=\frac{x}{2(x+2)}.$$

Cette méthode est basée sur le théorème d'Abel relatif à la valeur d'une série pour une valeur de la variable égale à l'une des limites de l'intervalle de convergence, quand la série reste convergente à cette limite.

Bonnes solutions : MM. P. Vivin, lycée de Nancy ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes

ANALYSE

2135. — *Étant donnée l'équation différentielle*

$$(1-x^2)y''-3xy'+4m(m+1)y=0,$$

on demande :

1° *de démontrer que cette équation admet comme solution particulière*

$$y_1=\frac{\cos[(2m+1)\arcsin x]}{\sqrt{1-x^2}};$$

2° *de trouver l'intégrale générale de l'équation ;*

3° *de démontrer que, si m est un nombre entier et positif, on peut satisfaire à l'équation différentielle par un polynome entier en x ; trouver son degré, puis calculer ses coefficients*

1. Pour démontrer que l'équation différentielle

(1) $$(1-x^2)y''-3xy'+4m(m+1)y=0$$

admet comme solution particulière l'expression

$$y = \frac{\cos[(2m+1)\arcsin x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

chassons le dénominateur dans l'expression de y, et dérivons ; nous aurons

$$(2) \qquad y\sqrt{1-x^2} = \cos[(2m+1)\arcsin x],$$

puis

$$y'\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2m+1}{\sqrt{1-x^2}}\sin[(2m+1)\arcsin x],$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$(1-x^2)y' - xy + (2m+1)\sin[(2m+1)\arcsin x] = 0.$$

Dérivons encore, nous aurons

$$(1-x^2)y'' - 3xy' - y + \frac{(2m+1)^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos[(2m+1)\arcsin x] = 0,$$

ou, en remplaçant $\cos[(2m+1)\arcsin x]$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et simplifiant,

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + 4m(m+1)y = 0\,;$$

c'est l'équation (1).

2. Proposons-nous de trouver l'intégrale générale de cette équation. En tenant compte de la propriété précédente, nous sommes conduits à poser

$$(3) \qquad z = y\sqrt{1-x^2} \qquad \text{d'où} \qquad y = \frac{z}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dérivant, nous aurons successivement

$$y' = \frac{(1-x^2)z' + xz}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{(1-x^2)z'' + 2x(1-x^2)z' + (1+2x^2)z}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation différentielle (1), nous aurons, après réduction, la nouvelle équation

$$(4) \qquad (1-x^2)z'' - xz' + (2m+1)^2 z = 0.$$

Changeons maintenant de variable indépendante, et posons

$$(5) \qquad x = \sin t.$$

On en déduit

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}\frac{dz}{dt},$$

$$z'' = \frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\frac{dz}{dt}.$$

Substituant dans l'équation (4), nous aurons, après réductions, l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + (2m+1)^2 z = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire à coefficients constants ; son *intégrale générale* est donc

$$z = A\sin(2m+1)t + B\cos(2m+1)t,$$

d'où l'intégrale générale cherchée

$$(7) \qquad y = \frac{A\sin[(2m+1)\arcsin x] + B\cos[(2m+1)\arcsin x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On voit que la solution particulière considérée correspond au cas où $A = 0$ et $B = 1$.

3. Proposons-nous enfin de démontrer que, si m est un nombre entier positif, on peut satisfaire à l'équation différentielle (1) par un polynome entier en x.

Ce fait peut être prévu, si on se rappelle que $\cos ma$, m étant entier et positif, peut être exprimé en fonction entière et rationnelle de $\cos a$ et de $\sin a$, et, dans le cas où m est impair, par le produit de $\cos a$ par une fonction entière et rationnelle de $\sin a$ de degré $m-1$, ne renfermant que des termes de même parité que $m-1$. Nous allons établir directement cette propriété.

Posons

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n. \tag{8}$$

n étant le degré inconnu ; on en déduit

$$y' = nA_0 x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \cdots$$

$$y'' = n(n-1)A_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1 x^{n-3} + \cdots.$$

Substituons dans l'équation (1) et écrivons que l'équation est identiquement satisfaite en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x.

Calculons d'abord le coefficient de x^n, et égalons-le à zéro ; nous devrons avoir

$$A_0[4m(m+1) - 3n - n(n-1)] = 0$$

et, comme A_0 n'est pas nul,

$$n^2 + 2n - 4m(m+1) = 0 ;$$

les racines de cette équation sont $n = 2m$ et $n = -2(m+1)$; comme n est entier et positif, on doit avoir

$$n = 2m. \tag{9}$$

Le degré du polynome inconnu est donc déterminé et égal à $2m$.

Posons donc

$$y = A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \cdots, \tag{10}$$

d'où

$$y' = 2mA_0 x^{2m-1} + (2m-1)A_1 x^{2m-2} + (2m-2)A_2 x^{2m-3} + \cdots,$$

$$y'' = 2m(2m-1)A_0 x^{2m-2} + (2m-1)(2m-2)A_1 x^{2m-3} + \cdots.$$

Multiplions respectivement ces trois relations par $4m(m+1)$, $-3x$, $1-x^2$, et ajoutons ; le polynome obtenu devra être identiquement nul.

Le coefficient de x^{2m} l'est de lui-même. Le coefficient de x^{2m-1} est, après réductions, $A_1(4m+1)$, et comme il doit être nul, et que $4m+1$ ne l'est pas, on doit avoir $A_1 = 0$.

Plus généralement, égalons à zéro le coefficient de x^{2m-p} ; on devra avoir

$$(2m-p+2)(2m-p+1)A_{p-2} - (2m-p)(2m-p-1)A_p - 3(2m-p)A_p + 4m(m+1)A_p = 0,$$

d'où

$$A_p = -\frac{(2m-p+2)(2m-p+1)}{p(4m-p+2)} A_{p-2}. \tag{11}$$

La loi de récurrence précédente fait voir que chaque coefficient dépend de celui qui le précède de deux rangs, et, comme $A_1 = 0$, tous les coefficients d'indice impair sont nuls. Le polynome cherché ne renferme donc que les puissances paires de x. On a d'ailleurs d'une façon générale

$$A_{2p} = -\frac{(2m-2p+2)(2m-2p+1)}{4p(2m-p+1)} A_{2p-2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$A_{2p} = (-1)^p \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-2p+2)(2m-2p+1)}{2^{2p} \times p! \times 2m(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-p+1)} A_0,$$

ou, en simplifiant,

$$A_{2p} = (-1)^p \frac{(2m-p)(2m-p-1)\ldots(2m-2p+1)}{2^{2p} \times p!} A_0 ; \tag{12}$$

il y a p facteurs au numérateur de la fraction.

En particulier, on aura, pour le terme tout connu,

$$A_{2m} = (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots\times 1}{2^{2m}\times m!} A_0 = -1)^m \frac{A_0}{2^m}.$$

A. MACÉ DE LÉPINAY.

Bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Naucelle, à La Châtre ; P. Vivin, lycée de Nancy ; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2136. — *On considère la surface qui, rapportée à trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

1° *Montrer que sur cette surface il y a une infinité de droites.*

2° *Construire, à l'aide si l'on veut des coordonnées polaires, les projections sur le plan des xy des sections (courbes de niveau) faites par des plans parallèles à xOy.*

3° *Déterminer la projection sur le plan xOy des lignes de plus grande pente de la surface.*

4° *Déterminer le volume compris entre le plan $z = 0$, la surface donnée et la surface prismatique dont les faces ont respectivement pour équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.*

On appelle lignes de plus grande pente des courbes tracées sur la surface et coupant à angle droit les lignes de niveau.

(*Certificat de mathématiques générales, Lyon, juin 1912.*)

1. L'équation de la surface étant homogène par rapport à x, y, z, cette surface est un cône ayant pour sommet l'origine. Elle admet donc une infinité de génératrices passant par le point O, et définies par les équations

$$y = tx, \qquad z = \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} x.$$

2. Le plan $z = h$ coupe le cône suivant une ligne de niveau dont la projection sur le plan xOy a pour équation

$$x^3 + y^3 - h(x^2 + y^2) = 0.$$

Ceci représente une courbe du troisième degré admettant un point double isolé à l'origine. Quand h varie, la courbe se déforme en restant homothétique à elle-même ; et, à des valeurs opposées de h correspondent deux courbes symétriques par rapport à l'origine.

Nous construirons la courbe en supposant $h > 0$, et en passant aux coordonnées polaires ; l'équation s'écrit alors

$$\rho = \frac{h}{\cos^3\omega + \sin^3\omega}.$$

Si on change ω en $\pi + \omega$, ρ se change en $-\rho$; par suite, il suffit pour avoir toute la courbe de faire varier ω dans un intervalle quelconque d'étendue égale à π. Si nous changeons ω en $\frac{\pi}{2} - \omega$, ρ ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à la droite $\omega = \frac{\pi}{4}$. Pour éviter de construire des portions symétriques de courbe, il faut diviser l'intervalle suffisant d'étendue égale à π en deux intervalles tels qu'à toute valeur α du premier corresponde la valeur $\frac{\pi}{2} - \alpha$ du second, ou qu'à toute valeur $\frac{\pi}{4} - \theta$ du premier corresponde la valeur $\frac{\pi}{4} + \theta$ du deuxième.

Prenons comme intervalle suffisant $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$ et partageons-le en deux $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

et $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$. Nous voyons bien qu'à toute valeur $\frac{\pi}{4}-\theta$ du premier $\left(\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ correspond la valeur $\frac{\pi}{4}+\theta$ du deuxième. Nous ferons donc varier ω dans le premier intervalle, c'est-à-dire de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, puis, nous prendrons le symétrique de la courbe obtenue par rapport à la droite $\omega=\frac{\pi}{4}$.

Nous avons

$$\frac{d\rho}{d\omega}=\frac{3h\sin\omega\cos\omega(\cos\omega-\sin\omega)}{(\cos^3\omega+\sin^3\omega)^2}.$$

Cette dérivée est positive si $\omega>0$ et négative si $\omega<0$. Par suite, les variations de ρ sont les suivantes :

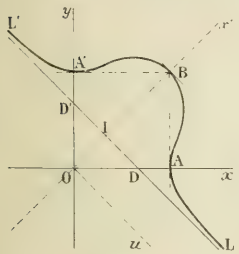


Fig. 1.

ω	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	$+\infty$	↘	h	↗	$h\sqrt{2}$

On en déduit la branche de courbe LAB (*fig.* 1). On a $OA=AB=h$; le triangle OAB est rectangle isocèle.

D'autre part,

$$\operatorname{tg} V=\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\omega}}=\frac{\cos^3\omega+\sin^3\omega}{3\sin\omega\cos\omega(\cos\omega-\sin\omega)},$$

et cette valeur est infinie pour $\omega=0$, et $\omega=\frac{\pi}{4}$; donc les tangentes aux points A et B sont perpendiculaires aux rayons vecteurs correspondants. Etudions la concavité par rapport au pôle, et pour cela déterminons le signe de $\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$, ou de $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ puisque ρ est positif dans l'intervalle considéré.

Nous avons

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^3\omega+\sin^3\omega}{h},\qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)'=\frac{3\sin\omega\cos\omega(\sin\omega-\cos\omega)}{h}=\frac{3\sin 2\omega(\sin\omega-\cos\omega)}{h},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)''=\frac{3}{h}[\sin 2\omega(\cos\omega+\sin\omega)+2\cos 2\omega(\sin\omega-\cos\omega)],$$

ou, en mettant $\cos\omega+\sin\omega$ en facteur,

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)''=\frac{3(\cos\omega+\sin\omega)}{h}[\sin 2\omega-2(\sin\omega-\cos\omega)^2]=\frac{3(\cos\omega+\sin\omega)}{h}[3\sin 2\omega-2].$$

On en déduit

$$\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''=\frac{2}{h}(\cos\omega+\sin\omega)(2\sin 2\omega-1).$$

Au point $A(\omega=0)$, $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ est négatif, donc la courbe tourne sa convexité vers le pôle ; au point B, elle tourne sa concavité. Enfin $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ s'annule en changeant de signe pour $\sin 2\omega=\frac{1}{2}$, $\omega=\frac{\pi}{12}$; le point correspondant est un point d'inflexion.

Cherchons maintenant si la branche infinie AL admet une asymptote.

Pour cela, il faut déterminer la limite de

$$x'=\rho\sin\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)\qquad \text{pour}\qquad \omega=-\frac{\pi}{4}.$$

On peut écrire

$$x' = \frac{h \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\omega + \sin^3\omega} = \frac{h}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\omega + \sin\omega}{(\cos\omega + \sin\omega)(\cos^2\omega + \sin^2\omega - \cos\omega\sin\omega)},$$

ou enfin

$$x' = \frac{h\sqrt{2}}{2 - \sin 2\omega}.$$

Pour $\omega = -\frac{\pi}{4}$, la limite de x' est $\frac{h\sqrt{2}}{3}$.

Pour construire l'asymptote, nous menons la demi-droite Ou $\left(\omega = -\frac{\pi}{4}\right)$, nous la faisons tourner de l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif, elle prend la position Ox', et sur cette demi-droite nous prenons le vecteur $\overline{OI} = \frac{h\sqrt{2}}{3}$. D'ailleurs l'équation de l'asymptote est $\rho \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{h\sqrt{2}}{3}$, ce qui montre que l'asymptote rencontre les axes aux points D et D′ tels que $OD = OD' = \frac{2h}{3}$.

Pour avoir la position de la courbe par rapport à l'asymptote, nous étudions le signe de

$$x' - \frac{h\sqrt{2}}{3} = \frac{h\sqrt{2}}{2 - \sin 2\omega} - \frac{h\sqrt{2}}{3} = \frac{h\sqrt{2}(1 + \sin 2\omega)}{3(2 - \sin 2\omega)},$$

et cette quantité est toujours positive. Donc la courbe est par rapport à l'asymptote du côté des x' positifs.

Il n'y a plus qu'à construire la branche de courbe BA′L′ symétrique de BAL par rapport à la bissectrice OB.

3. Les projections sur le plan des xy des lignes de plus grande pente sont les trajectoires orthogonales de la famille de courbes que nous venons de construire. L'équation générale de celles-ci s'écrit

$$\rho^2(\cos^3\omega + \sin^3\omega) = h,$$

et, en différentiant par rapport à ω, nous obtenons

$$\rho'(\cos^3\omega + \sin^3\omega) + 3\rho \sin\omega\cos\omega(\sin\omega - \cos\omega) = 0;$$

c'est l'équation différentielle des projections des lignes de niveau.

Nous en déduirons celle des projections des lignes de plus grande pente en remplaçant ρ' par $-\frac{\rho^2}{\rho}$, et nous avons

$$\rho(\cos^3\omega + \sin^3\omega) - 3\rho' \sin\omega\cos\omega(\sin\omega - \cos\omega) = 0,$$

ou

$$3\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\cos^3\omega + \sin^3\omega\, d\omega}{\sin\omega\cos\omega(\sin\omega - \cos\omega)}.$$

Posons $\operatorname{tg}\omega = t$; nous avons

$$3\frac{d\rho}{\rho} = \frac{(t^3 + 1)dt}{t(t-1)(t^2+1)} = -\frac{dt}{t} + \frac{dt}{t-1} + \frac{t\,dt}{t^2+1}.$$

Nous pouvons alors intégrer et nous avons

$$3L\frac{\rho}{a} = L\frac{(t-1)\sqrt{t^2+1}}{t} = L\frac{\operatorname{tg}\omega - 1}{\sin\omega},$$

ou

$$\frac{\rho^3}{a^3} = \frac{1}{\cos\omega} - \frac{1}{\sin\omega}, \qquad \rho = a\left(\frac{1}{\cos\omega} - \frac{1}{\sin\omega}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Pour avoir toute la courbe il suffit encore de faire varier ω dans un intervalle d'étendue égale à π. En changeant ω en $\frac{\pi}{2} - \omega$, ρ change de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à la

bissectrice $\omega = -\frac{\pi}{4}$, et pour avoir la moitié de cette courbe on fait varier ω de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$.

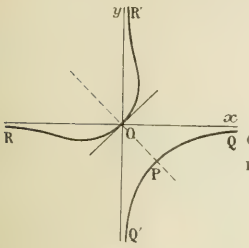


Fig. 2.

On a aisément les variations suivantes de ρ :

ω	$-\frac{\pi}{4}$		0		$+\frac{\pi}{4}$
ρ	$a\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0

ce qui nous donne les branches de courbes PQ, RO, asymptotes à Ox, et il n'y a plus qu'à achever par symétrie par rapport à la bissectrice OP.

En coordonnées rectilignes l'équation de la courbe est

$$xy(x^2+y^2)+a^2(x-y)=0.$$

4. Si l'on coupe le volume considéré par un plan parallèle au plan yOz, ayant pour abscisse x, l'aire de la section est

$$S(x)=\int_0^{x^2} z\,dy=\int_0^{x^2}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,dy.$$

On peut écrire

$$\int\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\,dy=\int\left(y+\frac{x^3}{y^2+x^2}-\frac{x^2y}{y^2+x^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+x^2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}-x^2\mathrm{L}\sqrt{x^2+y^2},$$

et par suite l'intégrale définie est

$$S(x)=\frac{1}{2}+x^2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-x^2\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Le volume demandé est donc

$$V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+x^2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-x^2\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)dx.$$

Considérons l'intégrale indéfinie

$$\int\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)x^2dx$$

et intégrons-la par parties en posant $u=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $dv=x^2dx$. On a aisément $du=\frac{(1-x)dx}{x(x^2+1)}$, $v=\frac{x^3}{3}$ et, par suite,

$$\int\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)x^2dx=\frac{x^3}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{(1-x)}{x^2+1}dx.$$

Mais

$$\frac{x^3(x-1)}{x^2+1}=x-1-\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1},$$

et

$$\int\frac{x^3(x-1)}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x.$$

On obtient alors

$$\int\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)x^2dx=\frac{x^3}{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}-\mathrm{L}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg}x\right).$$

On voit alors sans difficulté que l'intégrale définie $\int_0^1 S(x)dx$ est égale à $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\mathrm{L}2$, ou, à un centième près, $V=0{,}62$.

NININ, lycée de Nancy.

Bonnes solutions par MM. L. Naucelle, à la Châtre; Maurice Roi; A. Rous-eau, à Fournes-en-Weppes; L. Théringer; Marcel Ullmann, 45e d'artillerie à Héricourt.

QUESTIONS PROPOSÉES

2225. — 1° On considère la droite variable

(1) $$x = z + 2t, \qquad y = tz + 2t^2;$$

trouver la surface qu'elle engendre quand t varie. Cette surface est un paraboloïde qui est coupé par le plan $y = tz + 2t^2$ suivant une autre droite. On demande le lieu de l'intersection des deux droites quand t varie.

2° On considère deux génératrices, t et t', du système (1), rectangulaires. Former les équations de la perpendiculaire commune à ces deux droites et le lieu du pied de cette perpendiculaire sur l'une d'elles.

3° Trouver le plan tangent à la quadrique en un point de la génératrice (1), le plan asymptote et le plan tangent perpendiculaire au plan asymptote, pour la même génératrice. Lieu du point de contact de ce plan quand t varie.

4° On suppose maintenant que t désigne le temps et que la courbe ainsi trouvée soit parcourue par un point mobile de masse 1, suivant les lois indiquées par les valeurs de x, y, z. Trouver la force qui actionne ce mobile.

5° On suppose ensuite que ce même point soit astreint à se mouvoir sans frottement sur le paraboloïde, sous l'action d'une force tangentielle; trouver la réaction normale de la surface sur le point, la force tangentielle et le lieu de la droite de support de cette dernière force.

E. H.

2226. — Une spirale logarithmique se déplace dans son plan; elle passe par un point donné et reste tangente à une droite fixe.

On demande :

1° Le lieu décrit par le point asymptotique de la spirale;

2° Quel est, dans le plan fixe et dans le plan mobile, le lieu des centres instantanés de rotation.

Construction et discussion des courbes obtenues.

A. F.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2120. — *D'un point* P *on mène les quatre normales* PA, PB, PC, PD *à une ellipse. Soient* A', B', C', D' *les seconds points d'intersection des normales avec l'ellipse. On demande le lieu des centres des cercles circonscrits au quadrilatère* A'B'C'D' *quand* P *se déplace.*

Les points A, B, C, D, sont les points de rencontre de l'ellipse

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point $P(x_0, y_0)$

$$H \equiv c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0.$$

Nous allons former l'équation de l'ensemble des quatre normales PA, PB, PC, PD; pour cela, nous désignons par x, y, z les coordonnées homogènes d'un point d'une des normales; alors, un point quelconque de cette normale a pour coordonnées homogènes $\lambda x_0 + \mu x$, $\lambda y_0 + \mu y$, $\lambda z_0 + \mu z$ et nous écrivons que ce point est sur l'ellipse et sur l'hyperbole d'Apollonius. Nous avons ainsi

(1) $$E(\lambda x_0 + \mu x, \lambda y_0 + \mu y, \lambda z_0 + \mu z) \equiv \lambda^2 E_0 + \lambda\mu E_1 + \mu^2 E = 0,$$

(2) $$H(\lambda x_0 + \mu x, \lambda y_0 + \mu y, \lambda z_0 + \mu z) \equiv \lambda^2 H_0 + \lambda\mu H_1 + \mu^2 H = 0,$$

en posant

$$E_0 = E(x_0, y_0, z_0), \qquad H_0 = H(x_0, y_0, z_0), \qquad E_1 = x_0E'_x + y_0E'_y + z_0E'_z, \qquad H_1 = x_0H'_x + y_0H'_y + z_0H'_z.$$

Mais $H_0 = 0$, puisque le point P est sur l'hyperbole ; l'équation (2) nous donne $\frac{\lambda}{H} = \frac{\mu}{-H_1}$ et, en remplaçant λ et μ par ces quantités proportionnelles dans la relation (1), nous obtenons l'équation de l'ensemble des quatre normales

$$(3) \qquad H^2E_0 - HH_1E_1 + H_1^2E = 0.$$

Par suite les points A, B, C, D, A', B', C', D', sont définis par l'équation (3) et par l'équation $E = 0$, ou par les deux équations

$$H(HE_0 - H_1E_1) = 0, \qquad E = 0.$$

Ce système se décompose en deux : d'abord, $H = 0$, $E = 0$ qui définit les points A, B, C, D, puis $HE_0 - H_1E_1 = 0$, $E = 0$ qui détermine les points A', B', C', D'.

L'équation générale des coniques passant par ces quatre points est donc

$$HE_0 - H_1E_1 + \lambda E = 0,$$

ou

$$(c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y)\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) - 2\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)(a^2y_0x - b^2x_0y - c^2x_0y_0)$$
$$+ \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux, et que celui de xy soit nul. Ceci nous donne

$$(4) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2+b^2} = 0, \qquad \lambda = -\frac{4a^2b^2x_0y_0}{c^2}.$$

On voit ainsi que le lieu du point P est l'hyperbole qui a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{c^2}{a^2+b^2} = 0$.

En tenant compte des relations (4), l'équation du cercle s'écrit

$$-\frac{2(a^2+b^2)x_0y_0}{c^2}(x^2+y^2) + y_0\left[\frac{a^2+2b^2}{b^2}y_0^2 + 3a^2 - 2b^2\right]x + x_0\left[-\frac{2a^2+b^2}{a^2}x_0^2 + 2a^2 - 3b^2\right]y$$
$$+ \frac{(4a^2b^2 - 2c^4)x_0y_0}{c^2} = 0.$$

Les coordonnées du centre de ce cercle sont

$$(5) \qquad x = c^2\frac{(a^2+2b^2)\frac{y_0^2}{b^2} + 3a^2 - 2b^2}{4(a^2+b^2)x_0}. \qquad y = -c^2\frac{(2a^2+b^2)\frac{x_0^2}{a^2} + 3b^2 - 2a^2}{4(a^2+b^2)y_0}.$$

Or, on peut exprimer x_0, y_0 en fonction d'un paramètre. On peut poser par exemple

$$\frac{x_0}{a} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{ch}\varphi, \qquad \frac{y_0}{b} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sh}\varphi;$$

et en remplaçant x_0, y_0 par ces valeurs dans les coordonnées du centre du cercle on obtient les équations paramétriques du lieu demandé.

On trouve ainsi

$$x = \frac{c}{4\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{(a^2+2b^2)\operatorname{sh}^2\varphi + 3a^2 - 2b^2}{\operatorname{ch}\varphi}, \qquad y = -\frac{c}{4\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{(2a^2+b^2)\operatorname{ch}^2\varphi + 3b^2 - 2a^2}{\operatorname{sh}\varphi}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de discuter ces équations et de construire la courbe.

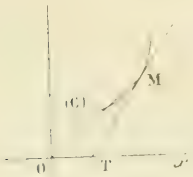
Remarquons qu'elle est unicursale et du sixième degré ; on le voit aisément en posant $\operatorname{th}\frac{\varphi}{2} = t$, et en remplaçant $\operatorname{ch}\varphi$ par $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\operatorname{sh}\varphi$ par $\frac{2t}{1-t^2}$.

A. ROUSSEAU.

2121 — *La tangente à une courbe (C) en M coupe l'axe Ox en T. Déterminer l'équation de (C) et construire cette courbe sachant que*

$$\frac{OM}{MT} = k,$$

k étant une constante donnée.



Si l'on désigne par x, y les coordonnées du point M et par y' la pente de la tangente MT, on a $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $MT = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}$, et la condition qui définit la courbe s'écrit

$$x^2 + y^2 = k^2\left(y^2 + \frac{y^2}{y'^2}\right);$$

c'est une équation différentielle du premier ordre, homogène par rapport à x, y et dont l'intégration se ramène aux quadratures.

On peut l'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2(1 - k^2)}},$$

et l'on fait le changement de fonction $y = tx$; l'équation devient

$$t + x\frac{dt}{dx} = \pm \frac{kt}{\sqrt{1 + t^2(1 - k^2)}},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{\pm\sqrt{1 + t^2(1 - k^2)}}{tk \mp \sqrt{1 + t^2(1 - k^2)}}\,dt.$$

Pour intégrer, posons $\pm\sqrt{1 + t^2(1 - k^2)} = u$; nous en tirons $t^2 = \frac{u^2 - 1}{1 - k^2}$, $tdt = \frac{udu}{1 - k^2}$,

et l'équation s'écrit

$$\frac{dx}{x} = \frac{u^2 du}{(k - u)(u^2 - 1)}.$$

En décomposant la fraction rationnelle $\frac{u^2}{(k - u)(u^2 - 1)}$ en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{u^2}{(k - u)(u^2 - 1)} = \frac{k^2}{1 - k^2}\cdot\frac{1}{u - k} - \frac{1}{2(k + 1)}\cdot\frac{1}{u + 1} + \frac{1}{2(k - 1)}\cdot\frac{1}{u - 1}.$$

L'intégration est alors immédiate et nous donne

$$L\frac{x}{C} = \frac{k^2}{1 - k^2}L(u - k) - \frac{1}{2(k + 1)}L(u + 1) + \frac{1}{2(k - 1)}L(u - 1),$$

ou

$$x = C(u - k)^{\frac{k^2}{1 - k^2}}(u + 1)^{\frac{1}{2(k + 1)}}(u - 1)^{\frac{1}{2(k - 1)}}.$$

Si nous joignons à cette équation la suivante

$$y = tx, \qquad \text{ou} \qquad y = \pm x\sqrt{\frac{u^2 - 1}{1 - k^2}},$$

nous obtenons les équations paramétriques de la courbe demandée.

MARESCALCHI.

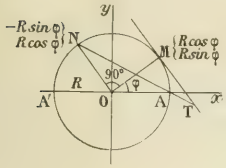
Solutions analogues par MM. R. de Besses, La Seyne-sur-Mer; G. Lagh, à Douai; L. Simon, à Fourmies.

2126. — *On donne un cercle ayant pour centre le point* O *et un point* A *de ce cercle. On considère deux rayons variables et rectangulaires,* OM *et* ON. *Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en* M *avec la droite* AN.

Construire ce lieu et évaluer l'aire limitée par la courbe, le diamètre OA *et la tangente au cercle au point diamétralement opposé à* A.

Prenons des axes rectangulaires en O et la droite OA pour axe des x. L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$



Si φ est l'angle MOA, l'équation de la tangente en M est

(1) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi = R.$$

Celle de la droite NA est

(2) $$(x - R)\cos\varphi + y(1 + \sin\varphi) = 0.$$

En résolvant (1) et (2) par rapport à x et y, on a les coordonnées paramétriques du point T de rencontre de (1) et (2) :

(3) $$y = -R(1 - \cos\varphi),$$

(4) $$x = \frac{R(1 + \sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Pour avoir l'équation cartésienne du lieu, il faut éliminer φ entre (3) et (4). (3) donne

$$\cos\varphi = \frac{y + R}{R}.$$

En portant dans (4) et réduisant, on trouve

$$[x(y + R) - R^2]^2 + y^2(y + 2R) = 0.$$

Cette équation semble être du 4e degré. Or, quel que soit x, elle est satisfaite pour $y = -R$, ce qui indique que la droite $y + R = 0$ fait tout entière partie du lieu. En effet, l'équation ci-dessus s'écrit

$$x^2(y + R)^2 - 2R^2x(y + R) + R^4 + y^4 + 2Ry^3 = 0,$$

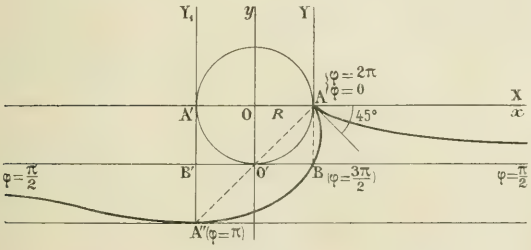
ou $$x^2(y + R)^2 - 2R^2x(y + R) + (y + R)(y^3 + Ry^2 - R^2y + R^3) = 0.$$

En faisant disparaître le facteur étranger $(y + R)$, on voit que le lieu est la cubique

$$x^2(y + R) - 2R^2x + y^3 + Ry^2 - R^2y + R^3 = 0,$$

ou (5) $$y(x^2 + y^2) + R(x^2 + y^2) - R^2(2x + y) + R^3 = 0.$$

On voit ainsi que le lieu est une cubique circulaire unicursale.



Nous allons voir bientôt que c'est une cissoïde oblique.

Elle a pour asymptote la droite $y = -R$ qui rencontre la courbe au point $B(x = R,\ y = -R)$, lequel correspond à $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Le point $A(x = R,\ y = 0)$ est un point de rebroussement de première espèce, et la tangente de rebroussement a pour équation $x + y - R = 0$.

La courbe a aussi pour sommet le point $A''(x = -R,\ y = -2R)$.

Si l'on transporte les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au point A, on a $x = X + R$, $y = Y$ et l'on trouve l'équation

(6) $$Y(X^2 + Y^2) + R(X + Y)^2 = 0,$$

et, en coordonnées polaires,

(7) $$r = -\frac{R(1 + \sin 2\theta)}{\sin\theta}.$$

Il en résulte, pour X et Y,

$$X = -\frac{R(1+\sin 2\theta)\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad Y = -R(1+\sin 2\theta).$$

Calcul de l'aire AA'A''B. — Si l'on transporte encore les axes parallèlement à eux-mêmes en A', on a

$$X_1 = 2R - \frac{R(1+\sin 2\theta)\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad Y_1 = -R(1+\sin 2\theta).$$

On a aussi, en fonction des coordonnées (3) et (4),

$$X_1 = x + R = R + \frac{R(1+\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad Y_1 = y = -R(1-\cos\varphi).$$

La différentielle de l'aire est

$$\frac{dU_1}{d\varphi} = X_1\frac{dY_1}{d\varphi} = -R^2\left[1 + \frac{1+\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi}\right]\sin\varphi = -R^2\left[\sin\varphi - \sin^2\varphi + \left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi\right]$$

$$= -R^2\left[\sin\varphi - \sin^2\varphi - \cos\varphi + \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right].$$

En intégrant, on a

$$U = R^2\left[\cos\varphi + \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi}{2}\right) + \sin\varphi + L(1-\sin\varphi)\right].$$

Pour avoir l'aire AA'A''B, correspondant à l'arc ABA'', il faut intégrer de $\varphi = \pi$ à $\varphi = 2\pi$, ce qui donne

$$U = R^2\left[2 + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi R^2}{2} + 2R^2.$$

Par conséquent, l'aire comprise entre la figure mixtiligne AA'A''B et le cercle O est $2R^2$.

Remarques. — I. *Le lieu du point d'intersection de la tangente en* N *et de* AM *est une cubique symétrique de la cubique* (5) *par rapport à* AA'.

II. *Lieu du point d'intersection de* AN *et de* OM.

On trouve la strophoïde droite

$$y = (x - R)\sqrt{\frac{x}{2R - x}}$$

dont le point double est en A et le sommet en O.

Le lieu du point d'intersection de AM et de ON est la même strophoïde.

On a donc ainsi un moyen de description facile de la strophoïde droite.

E.-N. BARISIEN.

N. D. L. R. — Le lieu exceptionnel $y + R = 0$ correspond au cas où le point N vient au point O, car alors AN est indéterminée et $y + R = 0$ est la tangente MT.

Bonnes solutions : MM. Maurice Roy ; Marescalchi ; L. Naceffe ; G. Husson, à Saint-Etienne ; A. Cantoni, à Albertville ; M. Lesueur, à Paris ; J. Dodier et M. Ullmann, à Héricourt ; G. Lamb, à Douai ; L. Simon, à Fourmies ; G. Roy, à Paris.

Assez bonnes solutions : MM. A. Berlande ; G. Esteben, à Bordeaux ; G. Singier, à Armentières.

M. Naceffe a montré en outre géométriquement que la courbe est une cissoïde oblique, ce qui est presque évident.

TRIGONOMÉTRIE

2116. — *Soit l'équation*

$$\text{Log. nep.}\ \frac{1 - 1{,}5x}{1{,}5x - 2} = 20 + \frac{19500}{t + 273}$$

dans laquelle on donne successivement à t *les valeurs* 600, 700, 800, 900. *A chacune des valeurs de* t *correspondent deux valeurs de* $1{,}5x$, *l'une positive, l'autre négative.*

On demande de calculer les valeurs positives de $\operatorname{tg} x$ *et les angles* x $\left(\text{compris entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$ *correspondants. On remplira donc le tableau suivant :*

t	$\operatorname{tg} x$ *valeur positive*	x *compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$
600		
700		
800		
900		

Nota. — *Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est* $M = 0{,}43429$. *On emploiera des logarithmes à 5 décimales.*

(*Ecole des Mines de Saint-Etienne, concours de 1912.*)

Si on pose $A = -20 + \frac{19500}{t+273}$, on obtient de suite, en multipliant par $M = 0{,}43429$ les deux membres de l'équation donnée,

$$\log \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} = MA,$$

équation nouvelle dans laquelle le logarithme est un logarithme vulgaire.

Ceci donne

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} = B = 10^{MA};$$

il en résulte que $\operatorname{tg} x$ est donné par l'équation du second degré

$$B \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

et, comme B désigne un nombre essentiellement positif, cette équation a une racine positive et une négative. Le produit de ces deux racines, t_1 et $-t_2$, est égal à $-\frac{1}{B}$; leur somme à $-\frac{1}{B}$. Avec un angle auxiliaire φ, on peut donc poser

$$t_1 = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{B}}, \qquad t_2 = \frac{\cot\varphi}{\sqrt{B}},$$

et l'on a

$$t_1 - t_2 = -\frac{1}{B}, \qquad \frac{\cot\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{B}} = \frac{1}{B},$$

ce qui donne

$$\cot 2\varphi = \frac{1}{2\sqrt{B}} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = 2\sqrt{B}.$$

Cette relation donne 2φ logarithmiquement, puis 2φ:

$$\log \operatorname{tg} 2\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log B, \qquad \log \operatorname{tg} 2\varphi = \log 2 + \frac{MA}{2}.$$

Nous avons donc à former les quatre valeurs de A, celles de MA, puis celles de $\log \operatorname{tg} 2\varphi$. Or les quatre valeurs de A sont : pour $t = 600$, $A = \frac{2040}{873}$; pour $t = 700$, $A = \frac{40}{973}$; pour $t = 800$, $A = -\frac{1960}{1073}$; pour $t = 900$, $A = \frac{-3960}{1173}$. Deux d'entre elles sont négatives ; nous calculerons les valeurs absolues de $\frac{MA}{2}$ par la formule

$$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \log M + \log|A| + \operatorname{colog} 2.$$

Elle donne les quatre formules suivantes :

$$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \log M + \log 2040 + \operatorname{colog} 873 + \operatorname{colog} 2,$$

$$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \log M + \log 40 + \operatorname{colog} 973 + \operatorname{colog} 2,$$

$$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \log M + \log 1960 + \operatorname{colog} 1073 + \operatorname{colog} 2,$$

$$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \log M + \log 3960 + \operatorname{colog} 1173 + \operatorname{colog} 2.$$

D'abord : $\log 2 = 0{,}30103$, $\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}69897$, $\log 2040 = 3{,}30963$, $\log 873 = 2{,}94101$, $\operatorname{colog} 873 = \bar{3}{,}05899$, $\log 40 = 1{,}60206$, $\log 973 = 2{,}98811$, $\operatorname{colog} 973 = \bar{3}{,}01189$, $\log 1960 = 3{,}29226$, $\log 1073 = 3{,}03060$, $\operatorname{colog} 1073 = \bar{4}{,}96940$, $\log 3960 = 3{,}59770$, $\log 1173 = 3{,}06930$, $\operatorname{colog} 1173 = \bar{4}{,}93070$.

Calculons enfin $\log M$:

$$\log 0{,}4342 = \bar{1}{,}63769 \qquad \Delta = 10$$
$$9 \qquad\qquad 9$$
$$\log M = \bar{1}{,}63778$$

Calcul de $\left|\frac{MA}{2}\right|$.

1er Cas :

$\bar{1},63778$
$3,30963$
$\bar{3},05899$
$\bar{1},69897$

$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \bar{1},70537$

$\bar{1},70537$
$\bar{1},70535$
2

$\Delta = 9$

$0,5074$
2

$\left|\frac{MA}{2}\right| = 0,50742$

2e Cas :

$\bar{1},63778$
$1,60206$
$\bar{3},04189$
$\bar{1},69897$

$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \bar{3},95070$

$\bar{3},95070$
$\bar{3},95066$
4

$\Delta = 5$

$0,008927$
8

$\left|\frac{MA}{2}\right| = 0,0089278$

3e Cas :

$\bar{1},63778$
$3,29226$
$\bar{4},96940$
$\bar{1},69897$

$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \bar{1},59844$

$\bar{1},59844$
$\bar{1},59835$
6

$\Delta = 11$

$0,3966$
7

$\left|\frac{MA}{2}\right| = 0,39667$

4e Cas :

$\bar{1},63778$
$3,59770$
$\bar{4},93070$
$\bar{1},69897$

$\log\left|\frac{MA}{2}\right| = \bar{1},86515$

$\bar{1},86515$
$\bar{1},86510$
5

$\Delta = 6$

$0,7330$
8

$\left|\frac{MA}{2}\right| = 0,73308$

Passons maintenant au calcul de $\operatorname{tg} 2\varphi$ et d'abord de $\log \operatorname{tg} 2\varphi$:

$$\log \operatorname{tg} 2\varphi = \log 2 + \frac{MA}{2}.$$

Les deux premières valeurs de $\frac{MA}{2}$ sont positives, les deux autres négatives ; celles de $\log \operatorname{tg} 2\varphi$ sont :

$$0,30103 + 0,50742 = 0,80845,$$
$$0,30103 + 0,00893 = 0,30996,$$
$$0,30103 - 0,39667 = -0,09564 = \bar{1},90436,$$
$$0,30103 - 0,73308 = -0,43205 = \bar{1},56795.$$

Calcul des diverses valeurs de 2φ *et de* φ.

$0,80845$
$0,80830$
15

$\Delta = 15$

$90°18'$
$33''$

$2\varphi = 90°18'33''$
$\varphi = 45°09'16''$

$0,30996$
$0,30990$
6

$\Delta = 17$

$71° 0'$
$35''$

$2\varphi = 71° 0'35''$
$\varphi = 35°50'18''$

$\bar{1},90436$
$\bar{1},90427$
9

$\Delta = 14$

$43°04'$
$64''$

$2\varphi = 43°04'64''$
$\varphi = 21°52'32''$

$\bar{1},56795$
$\bar{1},56777$
18

$\Delta = 24$

$22°54'$
$86''$

$2\varphi = 22°54'86''$
$\varphi = 11°27'43''$

Restent à calculer les quatre valeurs de $\operatorname{tg} x = t_1$ et les valeurs de x correspondantes. Nous avons

$$\log \operatorname{tg} x = \log \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{colog} B = \log \operatorname{tg} \varphi - \frac{MA}{2}.$$

Calcul de log tg φ.

log tg 45°09' = $\bar{1}$,93274 Δ = 14
10" 1,4
6" 0,8
log tg φ = $\bar{1}$,93276

Calcul de log tg x.

$\bar{1}$,93276
$\bar{1}$,49258
$\bar{1}$,42534 = log tg x

log tg 35°50' = $\bar{1}$,79495 Δ = 15
10" 1,5
8" 1,3
log tg φ = $\bar{1}$,79498

$\bar{1}$,79498
$\bar{1}$,99107
$\bar{1}$,78605 = log tg x

log tg 21°52' = $\bar{1}$,54596 Δ = 22
30" 6,6
2" 0,4
log tg φ = $\bar{1}$,54603

$\bar{1}$,54603
0,39667
$\bar{1}$,94270 = log tg x

log tg 11°27' = $\bar{1}$,25261 Δ = 40
40" 16
3" 1,2
log tg φ = $\bar{1}$,25278

$\bar{1}$,25278
0,73308
$\bar{1}$,98586 = log tg x

Il n'y a plus qu'à remonter à tg x et à x.

$\bar{1}$,42534 Δ = 16
$\bar{1}$,42521 0,2662
13 8
tg x = 0,26628

$\bar{1}$,78605 0,61101
tg x = 0,61101

$\bar{1}$,94270 0,8764
tg x = 0,8764

$\bar{1}$,98586 0,96796
tg x = 0,96796

Telles sont les quatre valeurs de tg x.

Calcul de x.

$\bar{1}$,42534 Δ = 28
$\bar{1}$,42513 16°56'
21 78"
x = 16°56'78"

$\bar{1}$,78605 Δ = 15
$\bar{1}$,78594 34°91'
11 73"
x = 34°91'73"

$\bar{1}$,94270 Δ = 13
$\bar{1}$,94267 45°81'
3 23"
x = 45°81'23"

$\bar{1}$,98586 Δ = 17
$\bar{1}$,98581 48°96'
5 39"
x = 48°96'39"

Tableau demandé :

t	tg x	x
600	0,26628	16°56'78"
700	0,61101	34°91'73"
800	0,8764	45°81'23"
900	0,96796	48°96'39"

CHIMIE

2122. — *Une dissolution* A *d'acide arsénieux, acidulée d'acide chlorhydrique, contient* $\frac{1}{10}$ As^2O^3 *par litre. Ayant placé* 500 *centimètres cubes de cette dissolution dans un calorimètre, on y fait barboter lente-*

ment $22^l,4$ d'oxygène ozonisé, ce qui fournit une liqueur B et produit une certaine élévation de température : toutes corrections faites (chaleur apportée par l'oxygène, chaleur d'évaporation, etc.), cette élévation de température est de $3^c,29$. Dans une autre expérience, on met encore 500 centimètres cubes de A dans le calorimètre et on y fait arriver une certaine quantité de chlore, ce qui fournit une liqueur C et produit une élévation de température corrigée égale à $4^c,55$. Dans chacune de ces deux expériences, on admet que la capacité calorifique de la liqueur est constante et égale à celle de 500 grammes d'eau ; le calorimètre et les accessoires équivalent, pour leur part, à 25 grammes d'eau.

D'autre part, on a préparé une dissolution de permanganate de potassium et l'on cherche combien il faut en verser dans 100 centimètres cubes de chacune des liqueurs A, B, C, pour que la coloration violette persiste. On trouve ainsi des volumes respectivement égaux à v, $\frac{3}{4}v$, $\frac{1}{2}v$.

On sait enfin que la chaleur de formation d'une molécule d'eau liquide est de 69^{Cal}, et celle d'une molécule d'acide chlorhydrique dissous de $39^{Cal},4$.

Déduire de ces données : 1° le volume de chlore employé dans la seconde expérience ; 2° la chaleur de formation de l'ozone.

Les volumes gazeux sont supposés mesurés dans les conditions normales.

Puisque la liqueur C décolore moitié moins de permanganate que la liqueur A, la moitié de l'acide arsénieux contenu dans les 500^{cm^3} de A a été transformée par le chlore en acide arsénique. Cette réaction d'oxydation peut se formuler

$$As^2O^3 + 2Cl^2 + 2H^2O = As^2O^5 + 4HCl.$$

En réalité, la réaction produit de l'acide arsénique $As^2O^4H^3$, mais l'oxydation porte sur l'anhydride.

Dans 500^{cm^3} de la liqueur A, il y a $\frac{1}{20}As^2O^3$; donc $\frac{1}{40}As^2O^3$ a été oxydé par le chlore et il a fallu $\frac{1}{20}$ de molécule de ce gaz, soit un volume égal à $\frac{1}{20}22^l,4 = 1^l,12$, pour produire cette transformation.

Dans cette même action du chlore, la chaleur dégagée a été

$$0,525 \times 4,55 = 2^c,389.$$

Ceci va nous permettre de déterminer la chaleur de transformation de l'acide arsénieux en acide arsénique. Soient, en effet, q la chaleur de formation de As^2O^5 dissous et q' celle de As^2O^3 dissous. En tenant compte des quantités de matière qui sont entrées en jeu, on a

$$\frac{1}{40}q + \frac{1}{10}39,4 - \frac{1}{40}q' - \frac{1}{20}69 = 2,389,$$

d'où

$$\frac{1}{40}(q - q') = 1,899.$$

Considérons maintenant la première réaction. Elle se formule

$$As^2O^3 + 2O^3 = As^2O^5 + 2O^2$$

et dégage une quantité de chaleur $0,525 \times 3,29 = 1^c,727$.

Le quart seulement de l'acide arsénieux de la liqueur A a été oxydé, soit $\frac{1}{80}As^2O^3$, et cette oxydation a détruit $\frac{1}{40}$ de molécule d'ozone. On aura donc, en désignant par x la chaleur de formation d'une molécule d'ozone,

$$\frac{1}{80}q - \frac{1}{80}q' - \frac{1}{40}x = 1,727.$$

En remplaçant $q - q'$ par la valeur trouvée plus haut, on trouve

$$0,949 - \frac{1}{40}x = 1,727,$$

d'où enfin

$$x = -31^c,1.$$

Gaston ROY, école normale de Varzy.

ÉCOLE CENTRALE (1913)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (*Fin.*)

Géométrie, Géométrie cotée et Géométrie descriptive (M. Malloizel).

Géométrie descriptive (fin).

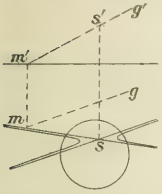
9724. — Intersection de deux cônes ayant le cercle (o, o') du plan horizontal comme base commune, et les points (s, s'), (t, t') comme sommets.

9725. — Intersection de deux cylindres de front ayant pour bases dans le plan horizontal deux ellipses admettant comme tangentes communes extérieures des parallèles à la ligne de terre.

9726. — Intersection de deux cônes de sommets donnés (s, s'), (t, t'), circonscrits à un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Prendre (s, s') sur l'axe de l'ellipsoïde et (t, t') dans le plan de front mené par l'axe.

9727. — Dans le plan horizontal de projection se trouvent une parabole et une hyperbole ayant en commun le point a. Un cône a pour sommet le point s et pour base la parabole; un cylindre a pour base l'hyperbole et ses génératrices sont parallèles à sa. Intersection de ces deux surfaces. Points remarquables. Ligne des points doubles en projection.

9728. — On donne dans le plan horizontal un cercle et une hyperbole. Intersection du cône de sommet (s, s') ayant pour base le cercle avec le cylindre ayant pour base l'hyperbole et de génératrices parallèles à $(mg, m'g')$, (mg est parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole).



9729. — Deux cylindres de révolution se coupent : l'un est vertical, l'autre de bout. Développer l'un des cylindres.

9730. — Intersection d'un cône de révolution (s, s') avec un cylindre de bout dont la base est un cercle (ω, ω'), tangent à l'une des génératrices de contour apparent vertical du cône.

9731. — Intersection d'une sphère et d'un cône qui a pour sommet un point de la ligne de terre et pour base le grand cercle de front de la sphère.

9732. — On donne une sphère et une droite. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon donné. Intersection de la sphère et du cylindre.

9733 — On donne une sphère (o, o') et un cylindre vertical dont la base est un cercle de diamètre oa (oa étant le rayon du cercle de contour apparent horizontal de la sphère, parallèle à xy). Intersection des deux surfaces.

9734. — Une ellipse dont le grand axe est de front est la base dans le plan horizontal d'un cône de sommet (s, s'), situé dans le plan de front contenant l'axe de l'ellipse. Soient sa, sa_1 les génératrices de contour apparent horizontal de ce cône, $s'a'$ la projection verticale commune à ces deux génératrices. Une sphère est tangente au cône aux points (m, m'), (m_1, m'), qui ont comme projection verticale commune le point m' de $s'a'$. Intersection de la sphère et du cône.

9735. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cylindre dont les génératrices sont de front, la base étant une ellipse dans le plan horizontal.

9736. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cône de sommet (s, s'), dont la base est une courbe (c, c') située dans un plan de bout et projetée horizontalement suivant une circonférence C. Point et tangente. Points remarquables. Ligne des points doubles en projection horizontale.

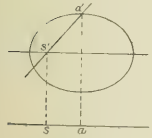
9737. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec le cylindre de bout dont la base est un cercle (ω, ω') du plan vertical, tangent au contour apparent de l'ellipsoïde en son point le plus à gauche.

9738. — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un cylindre de révolution ainsi défini: les deux droites (d, d'), (δ, δ') (d' est tangente au contour apparent vertical de l'ellipsoïde) forment la section du cylindre par le plan méridien de front $do\delta$. Intersection de ces deux surfaces.

9739. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre et qui a pour base la section de l'ellipsoïde par le plan de bout $P\alpha Q'$.

9740. — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cône de révolution qui a son sommet en (s, s') sur l'ellipsoïde (point le plus à gauche de l'ellipsoïde); les axes des deux surfaces se rencontrent et le cône a une génératrice verticale et une autre parallèle à la ligne de terre.

9741. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un cône de révolution de sommet (s, s'), d'axe vertical également et dont une génératrice est $(sa, s'a')$. Intersection des deux surfaces.



9742. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec le cône de sommet (s, s'), dont la base est une courbe donnée dans le plan vertical.

9743. — Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical avec un cylindre dont la base est une courbe projetée horizontalement suivant une droite et verticalement suivant un cercle, les génératrices du cylindre étant parallèles à une direction donnée.

9744. — On donne un paraboloïde de révolution d'axe vertical, de sommet (s, s'). Ce point est le sommet d'un cône de révolution dont l'axe est de front et qui a pour génératrices la verticale du point s et la parallèle à xy menée par le point (s, s'). Intersection.

9745. — On donne un paraboloïde de révolution. On le coupe par un plan de bout; la section obtenue est la base d'un cône de sommet (s, s') donné. Intersection du cône et du paraboloïde.

9746. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un cône de sommet (s, s'), situé dans le plan de front de l'axe du tore et dont la base est un cercle dans le plan horizontal.

9747. — Un hyperboloïde est engendré par une droite de front (d, d'), tournant autour d'un axe vertical. Soit $a'b'$ la

projection verticale du cercle de gorge. On considère le cylindre de bout dont la base est le cercle du plan vertical décrit sur $a'b'$ comme diamètre. Intersection des deux surfaces.

9748. — Un hyperboloïde de révolution est engendré par la droite (d, d') de front, tournant autour de l'axe vertical (o, o') : un cercle ω est tangent à la projection du cercle de gorge au point a, point de contact du cercle de gorge avec la projection horizontale d de la génératrice; ce cercle est la base d'un cylindre vertical. Intersection des deux surfaces.

9749. — Un hyperboloïde de révolution d'axe vertical (z, z') admet comme génératrice la droite $(ab, a'b')$. Un cône a pour sommet un point (s, s') pris sur cette droite et pour base une ellipse située dans le plan horizontal et passant par la trace (a, a') de la droite. Intersection. Points remarquables. Ligne des points doubles en projection verticale.

9750. — Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale (z, z') et pour génératrice une droite (d, d'). Un cylindre a pour base le cercle vertical (o, o') et une de ses génératrices est la même droite (d, d'). Intersection des deux surfaces.

9751. — On donne un hyperboloïde de révolution par son axe vertical (z, z') et une génératrice (d, d') quelconque. Un cône de révolution à axe vertical a pour sommet le point (s, s'). Une de ses génératrices est connue en projection horizontale seulement ; on sait que la droite (d, d') et les génératrices du cône font le même angle avec le plan horizontal. Intersection des deux surfaces.

9752. — Intersection de deux hyperboloïdes ayant même axe vertical, et engendrés l'un par la droite (d, d'), l'autre par la droite (δ, δ'), toutes deux de front

9753. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical admettant (d, d') comme génératrice avec un paraboloïde hyperbolique, admettant le plan horizontal comme plan directeur et comme génératrices les droites (d, d'), (δ, δ').

9754. — Intersection d'un tore et d'une sphère.

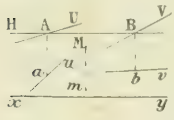
9755. — Intersection d'un tore à axe vertical avec un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, défini par deux génératrices de front.

9756. — Un cône a pour sommet le point (s, s') et pour base un cercle dans le plan horizontal. Un disque opaque circulaire (c, c') situé dans un plan vertical porte ombre sur le cône. Trouver cette ombre, les rayons lumineux étant à 45°.

9757. — Ombre propre et ombre portée sur les plans de projection par une demi-sphère creuse et opaque reposant sur le plan horizontal. On connaît la direction des rayons lumineux.

9758. — Un hyperboloïde engendré par une droite (d, d') (de front), en tournant autour d'un axe vertical (z, z') est limité à deux plans horizontaux, H et le plan horizontal de projection. Ombres propre et portée de cette surface, supposée creuse et opaque, les rayons lumineux étant de front.

9759. — On donne la perspective D d'une droite et la perspective d de sa projection horizontale. On donne de même M perspective d'un point et m, perspective de sa projection horizontale. Mener par le point M la parallèle à la droite D. Trace du plan de ces droites sur le plan horizontal. Tracer une droite du plan.

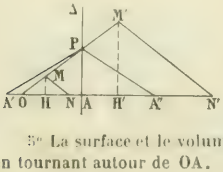


9760. — H étant le plan d'horizon, xy la ligne de terre, deux points A et B et deux droites U, V sont donnés par leurs perspectives, A, B, U, V, et les perspectives de leurs projections horizontales, a, b, u, v. Par un point M donné de la même façon, mener un plan parallèle aux deux droites.

9761. — On donne les perspectives a, b, c de trois points du plan horizontal. Construire sur ab et ac un parallélogramme. C'est la base d'un prisme de génératrices verticales et de hauteur donnée. — On demande la perspective du prisme.

QUESTIONS PROPOSEES

2227. — On considère une droite Δ fixe et un point O fixe aussi. De ce point, on abaisse une perpendiculaire OA sur Δ; on joint le point O à un point quelconque P de Δ, et on porte, de part et d'autre du point P, sur cette droite, $PM = PM' = AP$, puis on construit les deux triangles isocèles OMN, OM'N' ayant leurs bases sur OA. On demande alors :



1° Le lieu du point de rencontre des diagonales du trapèze MNM'N';

2° Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles MAN, M'AN';

3° L'enveloppe des droites PA' et PA'', A' et A'' étant les symétriques de A par rapport aux parallèles à Δ menées par M et M';

4° L'enveloppe des droites MN, M'N' et la développée de cette enveloppe;

5° La surface et le volume compris à l'intérieur de la surface de révolution engendrée par cette enveloppe en tournant autour de OA.

R. Manen, à Albi.

2228. — D'un point M variable sur une ellipse on abaisse la perpendiculaire MN sur la tangente au point M' diamétralement opposé à M.

1° Le lieu du point N est une sextique unicursale dont l'aire est équivalente à l'aire de l'ellipse, augmentée de quatre fois l'aire de la podaire du centre de la développée de l'ellipse.

2° Soient R et S les points d'intersection du cercle de diamètre MN avec l'ellipse. Le lieu de la projection du centre O de l'ellipse sur RS est une courbe du 8e degré dont l'aire est la moitié de l'aire de la podaire du centre de l'ellipse.

3° Le point de rencontre F' de RS avec la tangente en M' est aussi le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipse sur cette tangente.

Dr Werner Gaedecke.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Avril 1914. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1913.

Algèbre et Trigonométrie.

2155. — *On considère la fonction* θ *de* x *définie par la relation* $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1+\theta x^2}$ *où le premier membre représente un arc compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $+\frac{\pi}{2}$.

1° *Déterminer les valeurs limites de* θ *pour* $x = \pm\infty$ *et* $x = 0$.

2° *Suivre les variations de la fonction* $\theta(x)$ *quand* x *croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

3° *Dans cette fonction* $\theta(x)$, *on remplace* x *par* n^p, n *étant un entier variable et* p *un nombre positif donné ; on considère la série dont le terme de rang* n *a pour valeur* $\theta(n^p)$. *Pour quelles valeurs de* p *la série est-elle convergente ?*

4° *Calculer* $\int_a^x \frac{x}{1+x^2}\cdot\theta(x).dx$. *Etudier la variation de cette intégrale quand* a *augmente de* $-\infty$ *à* $+\infty$.

5° *Calculer, à l'approximation de la règle à calcul, la valeur numérique de* $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{x} \frac{x}{1+x^2}\cdot\theta(x).dx$.

1. La fonction $\theta(x)$ a pour valeur

$$\theta = \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}.$$

Elle est évidemment finie sauf peut-être pour $x = 0$; or, si on développe le numérateur et le dénominateur en séries, et que l'on se borne aux parties principales, on trouve $\frac{x^3}{3} : x^3$; quand x tend vers 0, la fonction θ tend vers $\frac{1}{3}$. Elle est donc toujours continue et finie ; elle tend vers 0 quand x grandit indéfiniment par valeurs positives ou négatives.

2. En dehors des propriétés déjà signalées, on aperçoit immédiatement que la fonction est paire.

Pour achever son étude, il faut étudier la dérivée ; nous nous bornerons d'ailleurs aux valeurs positives de x, en raison de la remarque précédente.

Posons $A = \operatorname{arc\,tg} x$; nous avons

$$\theta = \frac{1}{Ax} - \frac{1}{x^2} ;$$

par suite,

$$\theta' = \frac{-A - \frac{x}{1+x^2}}{A^2x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2A^2 - Ax - \frac{x^2}{1+x^2}}{A^2x^3}.$$

Posons alors

$$z = 2A^2 - Ax - \frac{x^2}{1+x^2} ;$$

nous aurons

$$z' = \frac{4A}{1+x^2} - A - \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{puis,} \qquad z = \frac{4A - x - A(1+x^2) - \dfrac{2x}{1+x^2}}{1+x^2}.$$

Nous poserons maintenant $\quad u = 3A - x - Ax^2 - \dfrac{2x}{1+x^2}$,

et nous aurons ainsi

$$u = \frac{3}{1+x^2} - 1 - 2Ax - \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$$u' = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - 2Ax,$$

$$u' = 2x\left[\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - A\right]$$

Posons enfin $\quad v = \dfrac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} - A$;

nous aurons finalement $\quad v' = \dfrac{-8x^2}{(1+x^2)^3}$.

Nous voyons ainsi que v' est toujours négative.

Rassemblons alors toutes nos transformations : $\theta' = \dfrac{z}{A^2x^2}$, $\quad z' = \dfrac{u}{1+x^2}$, $\quad u' = 2vx$; il nous est alors facile de suivre les variations de θ.

La fonction v est toujours décroissante ; elle est nulle pour $x = 0$; donc, négative de 0 à $+\infty$. Mêmes choses pour u' et u, pour z' et pour z. La fonction θ' est donc toujours négative et θ décroît régulièrement de $\dfrac{1}{3}$ à 0 quand x croît de 0 à $+\infty$. Il est facile enfin de vérifier que, pour $x = 0$, θ' est nul ; par conséquent la tangente à la courbe $y = \theta(x)$, au départ, au point sur Oy, est horizontale.

3. La troisième partie est, comme la première, complètement insignifiante : on a effet

$$u_1 = \theta(u') = \frac{u' - \operatorname{arc\,tg} u'}{u'^3 \operatorname{arc\,tg} u'},$$

et, comme $\operatorname{arc\,tg} u'$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, la partie principale de u_1 est $\dfrac{2}{\pi u'^3}$, ce qui montre que la série u est de même nature que la série v dont le terme général est $v_1 = \dfrac{1}{u'^3}$. Cette série est convergente pour les valeurs de p plus grandes que 1 et divergente si $p \leq 1$.

4. On a

$$\frac{x}{1+x^2}\,\theta(x) = \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x} - \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{D\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{arc\,tg} x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

L'intégrale indéfinie $\quad J = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)}\,\theta(x)\,dx \quad$ est immédiate :

$$J = L\sqrt{1+x^2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}.$$

Prise entre les limites a et $+\infty$, elle donne

$$J(a) = L\frac{\pi}{2} - L\sqrt{1+a^2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg} a}{a}.$$

Cette fonction de a est paire ; elle est égale à $L\frac{\pi}{2}$ pour $a = 0$, et nulle pour $a = +\infty$. Sa dérivée est $\frac{-a}{(1+a^2)\varphi(a)}$ ou $\frac{\operatorname{arc\,tg} a - a}{a(1+a^2)\operatorname{arc\,tg} a}$; elle est négative quand a varie de 0 à $+\infty$. La fonction $J(a)$ décroît régulièrement de $L\frac{\pi}{2}$ à 0.

5. La valeur numérique de $J\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est

$$J\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = L\frac{\pi}{2} - L\frac{\pi}{3} = L\frac{3}{2} = L3 - L2\,;$$

donc $$MJ\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = M(L3 - L2) = \log 3 - \log 2 \quad \text{et} \quad J\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\log 3 - \log 2}{M}.$$

D'autre part,

$$\log 3 = 0{,}477,$$
$$\log 2 = 0{,}301,$$
$$\log 3 - \log 2 = 0{,}176,$$
$$M = \log e = 0{,}434\,;$$

donc $$J\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{176}{434} = 0{,}405.$$

Bonnes solutions : MM. E. Rouge, à Quéant ; L. B. ; G. Lach, à Douai ; M. Roi.

Géométrie analytique et Mécanique.

2156. — *Dans le plan xOy du trièdre des coordonnées $Oxyz$, on donne le cercle de rayon r, tangent à Oy au point O, du côté de Ox ; sur la circonférence, les points A et B situés à la distance r du point O.*

I. — *Un point quelconque P de la circonférence est la projection d'un point M dont la cote est $z = PA + PB$.*

1° *Calculer les coordonnées x, y, z du point M en fonction de l'angle polaire $POx = \omega$ du point P.*

2° *Le lieu du point M est une courbe Γ. En construire les projections sur les plans xOz, yOz.*

II. — *Soit C le point d'abscisse $-r$ pris sur le prolongement de Ox ; A, B, C sont les points d'appui sur le plan horizontal, supposé rigide, de trois pieds sphériques identiques fixés aux trois sommets d'une lame triangulaire homogène.*

Sous l'action d'efforts horizontaux, la lame se met à tourner autour d'un certain axe vertical dont la trace I sur le plan xOy a pour coordonnées polaires ρ et ω.

1° *Exprimer que la résultante des réactions de frottement du plan sur la lame est perpendiculaire à OI. (On désignera par a, b, c les longueurs IA, IB, IC ; par α, β, γ les coefficients de frottement, supposés différents aux trois points A, B, C.*

2° *On suppose $\alpha = \beta$, γ étant rendu négligeable au moyen d'un lubrifiant. Former l'équation polaire du lieu des points I définis par la condition précédente. Etudier ce lieu.*

3° *Comment varie, avec la position du point I, le moment résultant des réactions de frottement par rapport à la verticale du point I ?*

N. B. — Il est bien entendu que :

Le trièdre $Oxyz$ est trirectangle ;

Les sommets de la lame triangulaire sont aux centres de ses trois pieds sphériques, et le tout constitue un solide indéformable :

Dans la question 3°, on n'envisage que les points I *du lieu* 2°

I. — 1. L'angle ω peut varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Soit o le centre du cercle. Comme $Oo = OA = OB = r$, les deux triangles OAo et OBo sont équilatéraux, les angles BOo et oOA sont égaux à $\frac{\pi}{3}$, et, quand le point P parcourt l'arc BDA, l'angle ω varie de $-\frac{\pi}{3}$ à $+\frac{\pi}{3}$; quand il parcourt l'arc OA, l'angle ω varie de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$, et, quand il parcourt l'arc OB, l'angle ω varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{3}$. Nous avons trois positions de figure à étudier suivant que le point P est sur l'un ou l'autre des trois arcs signalés.

Si P est sur l'arc BDA, nous avons $\dfrac{PA}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)} = \dfrac{OA}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2r$, $PA = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)$;

puis $\dfrac{PB}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right)} = \dfrac{OB}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2r$, $PB = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3}+\omega\right)$; donc

$$PA + PB = 4r\sin\frac{\pi}{3}\cos\omega = 2r\sqrt{3}\cos\omega.$$

D'autre part, nous avons

$$x = 2r\cos^2\omega$$
$$y = 2r\sin\omega\cos\omega,$$

et les équations de la courbe Γ sont

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x = 2r\cos^2\omega, \\ y = 2r\cos\omega\sin\omega, \\ z = 2r\sqrt{3}\cos\omega. \end{cases}$$

Si on admet que PA change de signe en s'annulant, c'est-à-dire quand le point P passe au point A, de même pour PB, ces équations conviennent à tous les cas et il n'y a que cette courbe (Γ).

Supposons maintenant le point P sur l'arc OA; alors

$$PA = 2r\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad PA + PB = 4r\sin\omega\cos\frac{\pi}{3} = 2r\sin\omega.$$

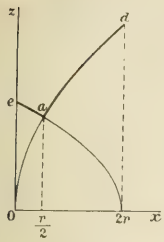
Il y a alors une deuxième courbe (Γ') qui convient uniquement aux arcs OA et OB, dont les équations sont

$$(\Gamma')\quad \begin{cases} x = 2r\cos^2\omega, \\ y = 2r\sin\omega\cos\omega, \\ z = \pm 2r\sin\omega, \end{cases}$$

suivant que ω est positif ou négatif.

2. La première courbe (Γ) se projette évidemment sur le plan des xy suivant le cercle donné, ou, plutôt, suivant l'arc BDA de ce cercle. La deuxième, suivant l'arc BOA.

Sur le plan des zx, la première se projette suivant la parabole $x = \frac{z^2}{6r}$, $z^2 = 6rx$. L'arc ad,



situé au-dessus de Ox, et compris entre les points d'abscisses $\frac{r}{2}$ et $2r$, convient seul. La deuxième courbe (Γ') se projette aussi suivant une parabole

$$x = 2r\left(1 - \frac{z^2}{4r^2}\right);$$

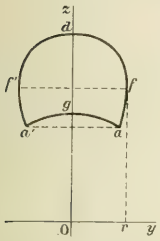
elle a, comme la première, Ox pour axe de symétrie, sa concavité est tournée vers les x négatifs, son sommet est au point $2r$, elle passe au point a et rencontre Oz en un point de cote $2r$. L'arc ae convient seul.

La projection sur le plan des yz de la courbe (Γ) a pour équations paramétriques

$$y = r \sin 2\omega,$$
$$z = 2r\sqrt{3} \cos \omega.$$

Elle est symétrique par rapport à Oz, et il suffit pour avoir l'arc utile de faire varier ω de 0 à $\frac{\pi}{3}$, puis de prendre le symétrique par rapport à Oz.

Pour $\omega = 0$, $y = 0$, $z = 2r\sqrt{3}$ et est maximum ; quand ω augmente de 0 à $\frac{\pi}{4}$, y croît de 0 à r, z décroît de $2r\sqrt{3}$ à $r\sqrt{6}$; puis, quand ω croît de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{3}$, y diminue de r à $\frac{r\sqrt{3}}{2}$, et z de $r\sqrt{6}$ à $r\sqrt{3}$. Le coefficient angulaire de la tangente $\frac{z'}{y'}$ est égal à $-\sqrt{3}\frac{\sin \omega}{\cos 2\omega}$; il décroît d'abord de 0 à $-\infty$, puis de $+\infty$ à 3. Nous avons ainsi l'arc dfa ; puis, l'arc symétrique $df'a'$.



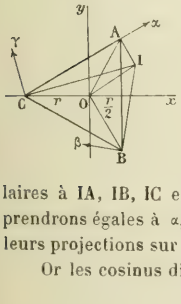
Pour la deuxième courbe (Γ'), la projection a pour équations paramétriques

$$y = r \sin 2\omega,$$
$$z = 2r \sin \omega.$$

Quand ω croît de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$, y décroît de $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ à 0 et z croît de $r\sqrt{3}$ à $2r$.

Le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{z'}{y'} = \frac{\cos \omega}{\cos 2\omega}$; il croît de -1 à 0. L'arc ag ainsi obtenu se complète par l'arc symétrique ga' et la courbe utile totale est la courbe $dfaga'f'$.

II. — **1.** Considérons maintenant le triangle ABC ; c'est un triangle équilatéral dont le point O est l'orthocentre. Les coordonnées des points A, B, C et I sont :



$$x_A = \frac{r}{2}, \qquad y_A = \frac{r\sqrt{3}}{2} = r \sin \frac{\pi}{3},$$

$$x_B = \frac{r}{2}, \qquad y_B = -\frac{r\sqrt{3}}{2} = -r \sin \frac{\pi}{3},$$

$$x_C = -r, \qquad y_C = 0 \qquad x_I = \rho \cos \omega, \qquad y_I = \rho \sin \omega.$$

Supposons, pour fixer les idées, que la rotation instantanée autour du point I ait lieu dans le sens direct ; alors les forces de frottement seront perpendiculaires à IA, IB, IC et dirigées dans le sens inverse ; elles seront proportionnelles à α, β, γ ; nous les prendrons égales à α, β, γ, ce qui n'altère pas les résultats, et nous aurons à exprimer que la somme de leurs projections sur OI est nulle.

Or les cosinus directeurs de OI sont

$$(OI) \qquad \cos \omega, \ \sin \omega ;$$

ceux de IA :

$$\frac{\frac{r}{2} - \rho \cos \omega}{a}, \qquad \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2} - \rho \sin \omega}{a};$$

ceux de IB : $\dfrac{\frac{r}{2} - \rho\cos\omega}{b}$, $\dfrac{-\frac{r\sqrt{3}}{2} - \rho\sin\omega}{b}$;

ceux de IC : $\dfrac{-r - \rho\cos\omega}{c}$, $\dfrac{-\rho\sin\omega}{c}$,

et ceux des forces α, β, γ $\left[\cos\left(\rho - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\rho - \frac{\pi}{2}\right)\right]$:

$$(\alpha) \qquad \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2} - \rho\sin\omega}{a}, \qquad \frac{-\left(\frac{r}{2} - \rho\cos\omega\right)}{a};$$

$$(\beta) \qquad \frac{\frac{-r\sqrt{3}}{2} - \rho\sin\omega}{b}, \qquad \frac{-\left(\frac{r}{2} - \rho\cos\omega\right)}{b};$$

$$(\gamma) \qquad \frac{-\rho\sin\omega}{c}, \qquad \frac{r - \rho\cos\omega}{c}.$$

La projection de la force α sur OI est

$$\frac{\alpha}{a}\left[\cos\omega\left(\frac{r\sqrt{3}}{2} - \rho\sin\omega\right) - \sin\omega\left(\frac{r}{2} - \rho\cos\omega\right)\right],$$

ou

$$\frac{\alpha r}{2a}(\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega);$$

celle de la force β, $\dfrac{-\beta}{b}\left[\cos\omega\left(\dfrac{r\sqrt{3}}{2} + \rho\sin\omega\right) + \sin\omega\left(\dfrac{r}{2} - \rho\cos\omega\right)\right]$,

ou

$$\frac{-\beta r}{2b}(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega);$$

enfin, celle de la force γ, $\dfrac{\gamma r}{c}\sin\omega$.

En écrivant que la somme des projections de ces forces sur OI est nulle, on obtient la relation

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{a}(\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega) - \frac{\beta}{b}(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega) + \frac{2\gamma}{c}\sin\omega = 0.$$

2. Si $\gamma = 0$, $\alpha = \beta$, cette relation devient

$$b(\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega) = a(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega),$$

et, en élevant au carré,

$$b^2(\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega)^2 = a^2(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega)^2.$$

Or

$$a^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OA}^2 - 2OI.OA\cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right),$$

$$a^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right),$$

$$a^2 = r^2 + \rho^2 - r\rho(\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega);$$

de même

$$b^2 = r^2 + \rho^2 - r\rho(\cos\omega - \sqrt{3}\sin\omega).$$

L'équation du lieu est donc

$$(r^2 + \rho^2 + \sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega)^2 - (\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega)^2$$
$$- r\rho(\sqrt{3}\cos\omega + \sin\omega)^2\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega) - (\sqrt{3}\cos\omega - \sin\omega)^2(\cos\omega - \sqrt{3}\sin\omega)^2 = 0,$$

ou

$$4(\sqrt{3}r^2 + \rho^2)\sin\omega\cos\omega - 2r\rho(5\sqrt{3}\sin\omega\cos^2\omega + \sqrt{3}\sin^3\omega) = 0.$$

Cette équation se décompose en $\sin\omega = 0$ et

$$2(r^2 + \rho^2)\cos\omega - r\rho(5\cos^2\omega + \sin^2\omega) = 0.$$

La première représente l'axe des x; la deuxième conduit à l'équation cartésienne

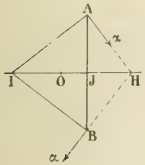
$$2x(x^2 + y^2 + r^2) - 5rx^2 - ry^2 = 0.$$

Celle-ci se décompose aisément en $\quad 2x - r = 0,$

qui représente la droite AB, et $\quad x^2 + y^2 - 2rx = 0,$

qui représente le cercle donné.

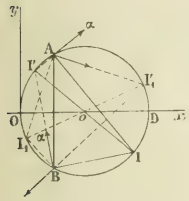
Il est facile d'expliquer l'origine de chacune de ces parties du lieu.



Plaçons d'abord le point I, n'importe où sur Ox; les deux lignes d'action des forces α et $\beta = \alpha$ vont se couper en un point H de Ox et il est visible que la résultante des deux forces α est perpendiculaire à OI; quand le point I est au milieu J de AB, les deux forces forment un couple ayant pour bras de levier AB et la somme de leurs projections sur OI est nulle.

Ceci s'applique à tous les points du segment AB; cette portion de la droite AB convient seule.

Quand le point I est sur le cercle, sur l'arc ADB, les deux forces égales $A\alpha$ et $B\alpha$ passent au point I' symétrique de I par rapport à o, puisqu'elles sont perpendiculaires à IA et IB; leur résultante est dirigée suivant la bissectrice de leurs directions et il est visible que cette bissectrice passe au point O; elle est donc perpendiculaire à OI. Quand le point I est en I_1 sur l'arc AOB, la résultante des deux forces α est dirigée suivant la droite I'_1D, elle est parallèle à OI_1. Ceci montre que l'arc OAB ne convient pas.



3. Les moments des deux forces $A\alpha$, $B\alpha$, par rapport au point I, sont de même signe; ils sont négatifs dans l'hypothèse faite que la rotation instantanée a lieu dans le sens positif; ils s'ajoutent donc numériquement et il suffira d'étudier la somme de leurs valeurs absolues.

Quand le point I est sur le segment AB, la somme des deux moments est le moment du couple, $AB.\alpha$. Cette somme est invariable.

Quand le point I est sur Ox, la somme des moments est $2IA.\alpha$. Appelons x la distance du point à la droite AB; nous aurons $\quad IA = \sqrt{x^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4}} = \sqrt{x^2 + \frac{3r^2}{4}}.$

Le moment total est donc $\quad M = \alpha\sqrt{4x^2 + 3r^2}.$

Les variations, quand x varie, sont évidentes.

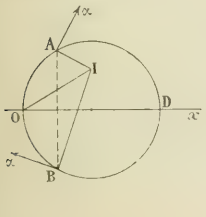
Enfin, quand le point I est sur l'arc ADB, la somme des moments est $\alpha(IA + IB)$, et, comme $z = IA + IB$, $\quad M = \alpha.z.$

Or, le z actuel est celui de la courbe Γ; il a pour expression

$$z = 2r\sqrt{3}\cos\omega.$$

Les variations ont été étudiées antérieurement.

Remarques géométriques. — Plaçons-nous dans le dernier cas et figurons les deux réactions du frottement, $A\alpha$ et $B\alpha$, égales, perpendiculaires respectivement à AI et BI et orientées dans le sens négatif. La somme des projections de ces deux forces sur OI doit être nulle. Ceci arrivera dans deux cas : ou bien quand ces forces formeront un couple; ou bien quand elles auront une résultante perpendiculaire à OI. Le premier cas est réalisé quand le point I est sur AB entre A et B; le second, quand OI est bissectrice intérieure de l'angle AIB. En effet, faisons tourner $A\alpha$ et $B\alpha$ de $+\frac{\pi}{2}$ autour de leurs points d'application; $A\alpha$ et $B\alpha$ viendront se placer sur IA et IB, leur résultante sera dirigée suivant la bissectrice de l'angle de IA avec IB, et, comme elle a aussi tourné en direction de $+\frac{\pi}{2}$, elle devra être sur IO. Ceci justifie ce que nous avons avancé.



Le lieu du point I pour lequel IO est bissectrice de l'angle (IA, IB) se compose évidemment de Ox tout entier et de l'axe ADB. Ceci résout une partie essentielle du problème.

Bonnes solutions : MM. H. E. à Paris ; G. Lyon, à Douai.

Calcul.

2158. — 1° *Calculer une table des valeurs de* 10^{-t^2} *pour les valeurs de* t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

t	t^2	$\log 10^{-t^2}$	$10^{-t^2} = z$
0	0	0	1 $= z_0$
0,1	0,01	$\bar{1},99$	0,977 $= z_1$
0,2	0,04	$\bar{1},96$	0,912 $= z_2$
0,3	0,09	$\bar{1},91$	0,813 $= z_3$
0,4	0,16	$\bar{1},84$	0,692 $= z_4$
0,5	0,25	$\bar{1},75$	0,562 $= z_5$
0,6	0,36	$\bar{1},64$	0,437 $= z_6$
0,7	0,49	$\bar{1},51$	0,324 $= z_7$
0,8	0,64	$\bar{1},36$	0,229 $= z_8$
0,9	0,81	$\bar{1},19$	0,155 $= z_9$
1	1	-1	0,100 $= z_{10}$

2° *De cette première table, en déduire une deuxième qui donne les valeurs approchées de l'intégrale* $u = \int_0^t 10^{-t^2}dt$, *pour des valeurs de* t *croissant de* 0 *à* 1 *par échelons de* 0,1.

3° *Comment et dans quelles limites la deuxième table peut-elle servir à étudier la fonction de la variable* x *définie par la formule* $y = \int_0^x e^{-x^2}dx$? $(e = 2,718\ldots)$.

4° *En particulier, calculer la valeur de* x *qui correspond à*

$$y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (\pi = 3,14\ldots).$$

(*Table de logarithmes et règle à calcul à volonté.*)

1. Le logarithme de 10^{-t^2} est $-t^2$ et la table des valeurs de cette fonction est facile à construire.

2. Pour avoir la deuxième table, posons $S_k = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ et $v_k = \frac{z_0 + z_k}{2}$; la formule des trapèzes nous donne

$$u_k = \int_0^{0,1k} 10^{-t^2}dt = (S_k - v_k)0,1.$$

t	S	v_k	u_k
0			
0,1	1,977	0,988	0,0989
0,2	2,889	0,956	0,1933
0,3	3,702	0,906	0,2796
0,4	4,394	0,846	0,3548
0,5	4,956	0,781	0,4175
0,6	5,393	0,718	0,4675
0,7	5,717	0,662	0,5035
0,8	5,946	0,614	0,5332
0,9	6,101	0,577	0,5524
1	6,201	0,550	0,5651

La deuxième table se construit alors immédiatement.

Cette deuxième table donne une idée des variations de la fonction $u = \int_0^t 10^{-t^2}dt$, quand t varie de 0 à 1, et nous permet d'avoir, dans cet intervalle, les diverses valeurs de la fonction par interpolation.

3. Si maintenant nous changeons t en $x\sqrt{\log e}$, c'est-à-dire t^2 en $x^2 \log e$, l'intégrale indéfinie devient

$$\sqrt{\log e}\int 10^{-x^2\log e}dx, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{\log e}\int e^{-x^2}dx.$$

L'intégrale donnée dans la deuxième partie devient

$$\sqrt{\log e}\int_0^x e^{-x^2}dx.$$

la limite supérieure x étant le nombre qui correspond à t, $x = \frac{t}{\sqrt{\log e}}$. Nous avons, dans ces conditions, $y = u\frac{1}{\sqrt{\log e}}$ et $x = t\frac{1}{\sqrt{\log e}}$; nous sommes donc conduits à calculer d'abord le nombre $\frac{1}{\sqrt{\log e}}$. Or $\log e = 0{,}43429$, puis $\log\log e = \bar{1}{,}63778$, $\log\frac{1}{\log e} = 0{,}36222$, $\log\frac{1}{\sqrt{\log e}} = 0{,}18111$; il en résulte que

$$\frac{1}{\sqrt{\log e}} = 1{,}52.$$

x	$\log u_k$	$\log\frac{1}{\sqrt{\log e}}$	$\log y_k$	y_k
0				
0,152	$\bar{2}{,}995$	0,181	$\bar{1}{,}176$	0,150
0,304	$\bar{1}{,}286$	0,181	$\bar{1}{,}467$	0,293
0,456	$\bar{1}{,}447$		$\bar{1}{,}628$	0,425
0,608	$\bar{1}{,}550$		$\bar{1}{,}731$	0,538
0,760	$\bar{1}{,}621$	0,181	$\bar{1}{,}802$	0,634
0,912	$\bar{1}{,}670$		$\bar{1}{,}851$	0,710
1,064	$\bar{1}{,}704$	0,181	$\bar{1}{,}885$	0,767
1,216	$\bar{1}{,}727$		$\bar{1}{,}908$	0,809
1,368	$\bar{1}{,}742$	0,181	$\bar{1}{,}923$	0,837
1,520	$\bar{1}{,}752$		$\bar{1}{,}933$	0,857

Rien n'est plus aisé alors que de construire la troisième table.

Cette table permet de se faire une idée des variations de la fonction y dans l'intervalle $(0, 1{,}52)$. Les valeurs de y autres que celles qui figurent dans le tableau se calculent par interpolation. Ainsi pour avoir la valeur de x qui correspond à $y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, on calcule d'abord $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$: on a successivement $\log\pi = 0{,}49711$, $\log\sqrt{\pi} = 0{,}24855$, et $\sqrt{\pi} = 1{,}7723$, $\frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443$. Ce nombre est compris entre y_3 et y_4, et, en interpolant, on a

$$\frac{0{,}538 - 0{,}443}{0{,}443 - 0{,}425} = \frac{0{,}608 - x}{x - 0{,}456} = \frac{95}{18};$$

d'où

$$113.x = 18.0{,}608 + 95.0{,}456 = 54{,}264,$$

et

$$x = \frac{54{,}264}{113} = 0{,}480.$$

Physique.

2159. — *Un condensateur sphérique est donné. Le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique est* 1, *dans le condensateur comme à l'extérieur. L'armature intérieure est une sphère* S_1, *de rayon* R_1; *l'armature extérieure est une couche sphérique concentrique dont la surface intérieure* S_2 *et la surface extérieure* S_3 *ont pour rayons* R_2 *et* R_3.

Charge : *On met au potentiel de la terre, pris pour zéro, l'armature intérieure ; au potentiel* V, *l'armature extérieure supposée à distance très grande de tous les autres corps qui peuvent se trouver dans le diélectrique. Trouver, dans le système électrostatique* C. G. S., *les expressions des charges* q_1, q_2, q_3 *sur les surfaces* S_1, S_2, S_3 *et de l'énergie électrique totale* W *du système.*

Décharge : *Le condensateur étant ainsi chargé, l'armature extérieure est isolée de la source au potentiel* V. *Etudier la dissipation des charges et de l'énergie, dans les trois cas de décharge suivants :*

1. *L'armature intérieure étant isolée de la terre, on la réunit à l'armature extérieure par une résistance ;*

2. *L'armature intérieure étant isolée de la terre, on réunit l'armature extérieure à la terre par une résistance ;*

3. *L'armature intérieure restant liée à la terre par une résistance, on réunit l'armature extérieure à la terre par une autre résistance.*

Application numérique : Calculer, dans le premier cas, la masse de glace dont la fusion pourrait être obtenue par la décharge, en adoptant les données suivantes :

$R_1 = 100^{cm}$. $V = 100$ *unités électrostatiques C. G. S.*

$R_2 = 102^{cm}$. *Équivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules.*

$R_3 = 104^{cm}$. *Chaleur de fusion d'un gramme de glace : 80 calories.*

Charge. — En vertu du théorème de Faraday, $q_1 + q_2 = 0$ et ces deux charges, égales et de signes contraires, ont un potentiel nul sur l'armature extérieure. Le potentiel de cette armature ne dépend donc que de la couche extérieure q_3 et il est en particulier le même qu'au centre de la sphère S_3 supposée pleine. Donc

$$V = \frac{q_3}{R_3} \qquad \text{ou} \qquad q_3 = R_3 V.$$

D'autre part, l'expression du potentiel nul de l'armature intérieure donne

$$0 = -\frac{q_2}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + V, \qquad \text{d'où} \qquad q_2 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V.$$

Les charges q_3 et q_2 sont de même signe, positives si V est positif.

L'énergie totale du système est donnée par la formule

$$W = \frac{1}{2} \Sigma QV.$$

Le terme relatif à l'armature intérieure est nul, puisque son potentiel est nul, et il reste

$$W = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)V = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + R_3\right)V^2.$$

Décharge. — 1. Après la réunion des armatures, les charges $-q_2$ et $+q_2$ se neutralisent, car elles ne peuvent subsister à l'intérieur. Les surfaces S_1 et S_2 sont ramenées à l'état neutre ; la surface S_3 garde la charge q_3 et le potentiel de l'armature externe reste égal à $\frac{q_3}{R_3} = V$. L'énergie du système devient

$$W' = \frac{1}{2} q_3 V = \frac{1}{2} R_3 V^2.$$

L'énergie dissipée en chaleur dans la résistance pendant la décharge est par suite

$$W - W' = \frac{1}{2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V^2.$$

C'est précisément le premier terme de l'expression de W.

2. Les charges $-q_2$ et $+q_2$ restent en présence, mais, le potentiel de l'armature extérieure devenant nul, la charge q_3 disparaît dans le sol. Le potentiel de l'armature interne devient

$$V_1 = -\frac{q_2}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} = -V$$

et l'énergie du système devient

$$W'' = \frac{1}{2}(-q_2)(-V) = \frac{1}{2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V^2.$$

L'énergie dissipée sous forme de chaleur dans la résistance est donc dans ce cas

$$W' - W'' = \frac{1}{2} R_3 V^2,$$

c'est le second terme de W.

3 Toutes les charges disparaissent et l'énergie W est intégralement dissipée en chaleur dans les résistances ρ et ρ' qui font communiquer avec le sol respectivement l'armature extérieure et l'armature intérieure.

La répartition de l'énergie calorifique entre les deux fils dépend de leurs résistances respectives. Si ρ' est très grand vis à vis de ρ, q_3 disparaît d'abord comme dans le second cas et on recueille $W - W''$ dans le fil ρ sous forme de chaleur. En même temps, le potentiel de S_1 a varié, puis il s'établit entre les deux armatures, par l'intermédiaire du sol, un courant où la chaleur due à l'effet Joule et correspondant à l'énergie W'' se dégage proportionnellement aux résistances, c'est-à-dire presque entièrement dans le fil ρ'.

Si, au contraire, ρ est très grand, il s'établit un courant durant lequel S_1 reste sensiblement au potentiel 0 et où presque toute l'énergie W se dégage dans le fil ρ.

Si enfin ρ et ρ' sont quelconques, la répartition de l'énergie entre les fils ρ et ρ' ne peut se trouver que par un calcul beaucoup plus compliqué.

Application numérique. — Dans le premier cas, remplaçons, dans l'expression de $W - W'$, toutes les quantités par leurs valeurs en unités électrostatiques C. G. S. ; il vient

$$W - W' = \frac{1}{2}\,\frac{100 \times 102}{2} \times 10\,000 = 25\,500\,000 \text{ ergs} = 2{,}55 \text{ joules}.$$

La décharge produit un nombre de calories $\frac{2{,}55}{4{,}18}$ et peut faire fondre un poids de glace égal à $\frac{255}{418 \times 80}$ grammes ou 7,6 milligrammes.

TOPIN, à Grandvilliers.

Solution partielle de M. G. Lach, à Douai.

Chimie.

2160. — (*a*) *Un mélange gazeux est formé d'azote, d'ammoniac et de phosphure d'hydrogène :*

1° *Par quelles réactions peut-on démontrer la présence de ces trois gaz dans le mélange ?*

2° *Parmi ces réactions, quelles sont celles qui permettent de déterminer le plus simplement les proportions en volumes des trois gaz du mélange ?*

(*b*) *Ces proportions se trouvant être* 0,25 *d'azote ;* 0,25 *d'ammoniac ;* 0,50 *de phosphure d'hydrogène, on prend dans le mélange une masse qui, à* 0° *et* 760^{mm}, *occuperait un volume de* 10 *litres. On la fait passer sur une longue colonne de tournure de cuivre chauffée au rouge ; les gaz résultant de la réaction passent ensuite sur du calcium en excès, pesant* 50^{g}, *contenu dans un tube de verre, et chauffé de façon à fixer tous les gaz de la réaction :*

1° *Quelles sont les réactions qui se produisent dans les deux opérations ?*

2° *Les réactions étant supposées totales, quelles sont les augmentations de poids du cuivre et du calcium ?*

(*c*) *Le tube de calcium, scellé à la fin de l'opération, est brisé au fond d'un récipient contenant* 3 *litres d'une solution d'un acide monobasique à une molécule-gramme par litre :*

1° *Quelles sont les réactions qui se produisent ?*

2° *Quel est le volume du gaz dégagé, supposé sec, à* 0° et 760^{mm} ?

3° *On considère* 100$^{cm^3}$ *de la liqueur acide provenant de la réaction. Pour neutraliser cette liqueur par une solution de potasse, à raison d'une molécule-gramme de* KOH *par litre, quel volume de la solution est-il nécessaire d'employer ?*

Poids atomiques : H = 1 ; Az = 14 ; P = 31 ; Ca = 40.

On prendra pour volume moléculaire celui de l'oxygène (O = 16), *calculé avec la densité* $d = 1{,}105$.

(*a*) Le gaz ammoniac a une réaction alcaline au tournesol et à la phtaléine. Il est absorbé par l'eau et la solution, chauffée, laisse dégager le gaz reconnaissable à son odeur.

Le phosphure d'hydrogène brûle avec production de fumées blanches. Il précipite en noir le sulfate de cuivre et l'azotate d'argent. Il est absorbé par le chlorure cuivreux en solution chlorhydrique.

Après absorption des deux autres gaz, l'azote n'entretient pas la combustion et ne trouble pas l'eau de chaux. Il se combine, sous l'action des étincelles électriques, avec l'oxygène pour former des vapeurs rouges de peroxyde d'azote, avec l'hydrogène pour former du gaz ammoniac.

Pour déterminer les proportions en volumes, on absorbera d'abord l'ammoniac par l'acide chlorhydrique, puis le phosphure d'hydrogène en ajoutant du chlorure cuivreux.

(*b*) Les 10 litres employés contiennent, d'après l'énoncé, $2^l,5$ d'azote, $2^l,5$ d'ammoniac et 5^l de phosphure d'hydrogène.

Le cuivre n'a pas d'action sensible sur l'azote, décompose les $2^l,5$ d'ammoniac AzH^3 en $1^l,25$ d'azote et $3^l,75$ d'hydrogène, fixe le phosphore des 5^l de PH^3 et libère $\frac{3}{2}5 = 7^l,5$ d'hydrogène. Cette dernière réaction peut se formuler

$$2PH^3 + 3Cu = P^2Cu^3 + 3H^2.$$

Le volume moléculaire est égal à $\frac{32}{1,105 \times 1,293} = 22^l,4$. Une molécule de phosphure abandonnerait au cuivre 31^g de phosphore ; 5^l produiront une augmentation de poids

$$\frac{5 \times 31}{22,4} = 6^g,92.$$

L'azote et l'hydrogène s'unissent au calcium suivant les équations

$$3Ca + Az^2 = Az^2Ca^3,$$
$$Ca + H^2 = CaH^2.$$

L'augmentation de poids du calcium se compose de tout l'azote primitif, soit une fraction de molécule $\frac{2,5}{22,4}$, de tout l'ammoniac, soit une fraction de molécule égale aussi à $\frac{2,5}{22,4}$, et enfin de l'hydrogène contenu dans une fraction de molécule de phosphure égale à $\frac{5}{22,4}$, ce qui fait en tout

$$\frac{2,5}{22,4} \cdot 28 + \frac{2,5}{22,4} \cdot 17 + \frac{5}{22,4} \cdot 3 = 5^g,69.$$

(*c*) Les réactions de l'azoture, de l'hydrure et de l'excès de calcium sur un acide monobasique qui peut se formuler ROH seront représentées par les équations

$$Az^2Ca + 8ROH = 2ROAzH^3 + 3(RO)^2Ca,$$
$$CaH^2 + 2ROH = (RO)^2Ca + 2H^2,$$
$$Ca + 2ROH = (RO)^2Ca + H^2.$$

Le gaz qui se dégage est de l'hydrogène.

Cherchons la masse de calcium qui s'est transformée en azoture : elle a absorbé l'azote primitif $\left(\frac{2,5}{22,4} \text{ de molécule}\right)$ et l'azote de l'ammoniac $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2,5}{22,4} \text{ de molécule}\right)$. Cette masse est donc

$$3 \cdot 40 \cdot \frac{2,5 + 1,25}{22,4} = 40 \cdot \frac{11,25}{22,4}.$$

De même, la masse de calcium qui s'est transformée en hydrure a absorbé l'hydrogène de l'ammoniac $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2,5}{22,4} \text{ de molécule}\right)$ et l'hydrogène du phosphure $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{22,4} \text{ de molécule}\right)$. Cette masse est

$$40 \cdot \frac{3,75 + 7,5}{22,4} = 40 \cdot \frac{11,25}{22,4}.$$

Ces deux masses sont égales, et la masse totale entrée en combinaison est de

$$40 \times \frac{22,5}{22,4} = 40,18.$$

Il reste un excès de calcium de $50 - 40,18 = 9^{g},82$, ou plus exactement

$$40 \times \frac{5,5}{22,4}.$$

A ce poids correspond une fraction de molécule d'hydrogène $\frac{5,5}{22,4}$, donc un volume de $5^{l},5$ dans les conditions normales.

De même, le poids de calcium contenu dans l'hydrure étant une fraction d'atome $\frac{11,25}{22,4}$, le nombre de molécules d'hydrogène dégagées par l'hydrure sera $2 \times \frac{11,25}{22,4}$ et leur volume $22^{l},5$. Le volume total d'hydrogène dégagé est donc

$$5,5 + 22,5 = 28^{l}.$$

Cherchons maintenant le nombre des molécules d'acide neutralisées.

Le nombre de celles qui sont unies à l'ammoniac est les $\frac{2}{3}$ du nombre des atomes de calcium de l'azoture, soit $\frac{2}{3} \times \frac{11,25}{22,4} = 0,335$.

Le nombre des molécules unies à la chaux est le double du nombre des atomes du calcium total, soit $2 \times \frac{50}{40} = 2,5$.

Le nombre total est $2,5 + 0,335 = 2,835$. Or on a employé 3 molécules. Il en reste donc, d'acide non neutralisé, une fraction de molécule $3 - 2,835 = 0,165$ dans les 3 litres. Cela fait, dans 100^{cm3}, une fraction de molécule $\frac{0,165}{30} = 0,0055$.

Il faudra donc cette même fraction de molécule de potasse pour neutraliser, c'est-à-dire un volume de $5^{cm3},5$.

Maurice ROI.

QUESTIONS PROPOSÉES

2229. — Etant donnés une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes et un point $A(\alpha, \beta)$ de cette courbe : 1° déterminer sur l'hyperbole un point M tel qu'il existe une circonférence tangente en M à l'hyperbole, passant en outre par A et par le centre O de l'hyperbole ; démontrer qu'il existe quatre points M répondant à la question et que ces quatre points sont sur une même circonférence C passant par O ; 2° trouver l'enveloppe de C quand A parcourt l'hyperbole donnée ; 3° démontrer que, si par un point P quelconque (x_0, y_0) de cette enveloppe on lui mène les tangentes autres que la tangente en P, les points de contact de ces quatre tangentes sont en ligne droite, et trouver l'enveloppe de cette droite quand P varie.

A. Macé de Lépinay.

2230. — Etant donnée une ellipse, en un point M quelconque de l'ellipse on mène la tangente MT et la droite MQ symétrique de MT par rapport à la perpendiculaire au grand axe menée par M : 1° Lieu du milieu de la portion de MQ comprise dans l'ellipse ; 2° Lieu du pôle de la droite MQ par rapport à l'ellipse ; 3° Enveloppe de la droite MQ ; aire de la courbe obtenue ; 4° Lieu de l'intersection R de MQ avec la perpendiculaire menée par O à la tangente MT.

A. Macé de Lépinay.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1913.

Algèbre, Analyse et Trigonométrie.

2184. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = y - e^{mx},$$

où m désigne une constante donnée.

2° *Déterminer l'intégrale y de cette équation qui prend pour $x = 0$ la valeur 0. Indiquer, suivant les différentes valeurs de m, la forme de la courbe* (C) *qui représente la variation de cette intégrale.*

3° *On considère la courbe* (C) *qui correspond à la valeur particulière $m = 2$, et une corde* PQ *de cette courbe parallèle à* Ox. *Calculer, en fonction de son ordonnée y, la longueur de cette corde* PQ, *ainsi que l'aire comprise entre cette corde et l'arc de courbe qu'elle sous-tend.*

1. On peut traiter cette équation comme une équation différentielle du premier ordre, linéaire, ou bien comme une équation linéaire à coefficients constants, avec second membre exponentiel. Suivons cette dernière méthode d'intégration. L'équation caractéristique étant $r - 1 = 0$, la solution générale de l'équation sans second membre est $y = ae^x$, où a désigne une constante arbitraire. Il faut trouver maintenant une solution quelconque de l'équation complète. Essayons $y = Ae^{mx}$, ce qui donne

$$y' = mAe^{mx} \qquad \text{et} \qquad y - y' = Ae^{mx}(m - 1).$$

Deux cas sont donc à distinguer : si $m \neq +1$, il faut prendre $A = \frac{1}{1-m}$; si $m = +1$, il n'existe pas de solution de cette forme : on sait qu'il faut alors essayer une solution de la forme Bxe^x, ce qui donne $y - y' = Be^x$, on voit qu'il faut prendre $B = -1$.

Ainsi, la solution générale de l'équation proposée est

$$(1) \qquad y = ae^x + \frac{e^{mx}}{1-m}, \qquad \text{si} \qquad m \neq 1,$$

$$(2) \qquad y = e^x(a - x), \qquad \text{si} \qquad m = 1.$$

(a désigne la constante arbitraire.)

2. Pour que l'intégrale (1) soit nulle quand on donne à x la valeur zéro, il faut que $a = -\frac{1}{1-m}$; l'intégrale qui a cette propriété est alors

$$(3) \qquad y = \frac{e^{mx} - e^x}{1-m}.$$

Pour que l'intégrale (2) soit nulle quand $x = 0$, il faut que $a = 0$; l'intégrale est alors

$$(4) \qquad y = -xe^x.$$

On peut observer que la limite de y, lorsque m tend vers 1, est précisément y, car si l'on pose $f(m) = e^{mx}$, on a

$$y = \frac{f(m) - f(1)}{m - 1}.$$

Donc quand m tend vers 1, y tend vers $-f'(m)$ pour $m = 1$, c'est-à-dire vers $-xe^x$.

Étude des courbes intégrales suivant les valeurs de m. — Nous trouvons

$$y' = \frac{me^{mx} - e^x}{1-m}, \qquad y'' = \frac{m^2e^{mx} - e^x}{1-m}.$$

et $$z' = -xe^x - e^x, \qquad z'' = -xe^x - 2e^x.$$

Pour $x = 0$, y' et z' prennent la valeur -1, quel que soit m.

Toutes les courbes considérées, qui passent par l'origine, y ont donc la même tangente, la bissectrice de l'angle $x'Oy$. Pour $x = 0$ on trouve $y''_0 = -(1+m)$ et $z''_0 = -2$. Si $m > -1$, la convexité des courbes, à l'origine, est tournée vers les y positifs ; si $m < -1$, elle est tournée vers les y négatifs. Si $m = -1$, l'origine est un point d'inflexion. Ce cas est d'ailleurs remarquable à un autre titre, parce que la fonction y devient $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\operatorname{sh} x$.

L'étude de la dérivée montre une autre valeur remarquable de m, qui est zéro : elle établit une séparation entre le cas où la dérivée s'annule et celui où elle garde toujours le même signe. En effet, la dérivée $$y' = \frac{e^x}{1-m}(me^{mx} - 1)$$ reste négative si m est négatif ; la fonction, dans ce cas, décroît constamment de $+\infty$ à $-\infty$. Si $m > 0$, la différence entre parenthèses s'annule lorsque $(m-1)x = -\mathrm{L}m$, ce qui donne $x = \frac{\mathrm{L}m}{1-m}$; alors $e^{mx} = \frac{1}{m}e^x$ et la valeur de y est égale à $\frac{e^x}{m} = e^{mx} = m^{\frac{m}{1-m}}$. Cette valeur de x est négative, quel que soit le signe de $m-1$; elle tend vers -1 quand m tend vers $+1$, la valeur de y devient alors e^{-1}. La dérivée est positive quand x est négatif et très grand en valeur absolue, quel que soit le signe de $m-1$: elle est toujours négative quand x est positif. Il en résulte que le point dont les coordonnées sont $x = \frac{\mathrm{L}m}{1-m}$ et $y = m^{\frac{m}{1-m}}$ correspond à un maximum de la fonction.

Il ne reste plus qu'à étudier la forme des branches infinies de ces différentes courbes. Si m est négatif, e^{mx} devient nul quand x est $+\infty$, et $+\infty$ quand x est $-\infty$; il en résulte que les courbes correspondantes, comme on l'a déjà dit plus haut, vont en descendant constamment de $+\infty$ à $-\infty$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Ces branches infinies n'ont pas d'asymptotes.

Si au contraire m est positif, les deux fonctions e^x et e^{mx} deviennent nulles en même temps quand x tend vers $-\infty$, et le signe de la différence $e^{mx} - e^x$ est le même que celui de $1-m$. La fonction y tend donc vers zéro par valeurs positives.

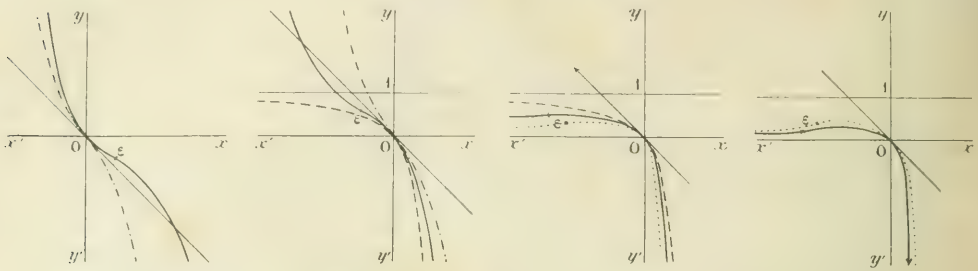
Quand x augmente indéfiniment, les deux termes e^{mx} et e^x deviennent infinis l'un et l'autre ; mais en mettant e^x en facteur, on voit aisément que la différence devient infinie en valeur absolue et a le signe de $m-1$.

Donc les courbes ont, lorsque m est positif, des branches infinies se rapprochant de l'axe des x, au-dessus, du côté des x négatifs, et des branches infinies descendant à $-\infty$, sans asymptote, du côté des x positifs.

Toutes les courbes ont un point d'inflexion ε, sauf celle qui correspond à la valeur particulière $m = 0$. L'abscisse du point d'inflexion, $x = \frac{\mathrm{L}(m^2)}{1-m}$ est positive lorsque $m < -1$, négative lorsque $m > -1$; elle est nulle pour $m = -1$, tend vers -2 pour $m = +1$; lorsque m est positif, elle est *double* de celle du maximum.

La valeur $m = 0$ donne la courbe particulière $y = 1 - e^x$ qui se distingue des autres parce qu'elle admet pour $x = -\infty$, l'asymptote $y = +1$; la valeur $m = +1$ donne la courbe $y = -xe^x$; enfin nous avons remarqué la courbe $y = -\operatorname{sh} x$, qui correspond à $m = -1$. Ces courbes sont représentées sur les figures ci-après, qui montrent les formes remarquables de courbes étudiées. Il y a deux formes essentiellement différentes, qui correspondent respectivement à $m > 0$ et à $m < 0$.

Les formes (1) et (2) diffèrent par la position du point d'inflexion ; les formes (3) et (4), par la position relativement à la courbe $y = -xe^x$.



$m < -1$ (1) $\quad 0 > m > -1$ (2) (3) (4)

Sur ces figures, des traits particuliers représentent les diverses courbes :

$y = 1 - e^x$ (-------), $\quad y = -\operatorname{sh} x$ (- - - - - - -), $\quad y = -xe^x$ (.....).

3. La courbe, lorsque $m = 2$, a la forme indiquée sur la figure (4) : c'est un cas particulier de la forme (3) ; le maximum est $\frac{1}{4}$; il est atteint pour $x = -\mathrm{L}2$. Pour qu'une parallèle à xx' coupe cette courbe en deux points P et Q, il faut que son ordonnée soit comprise entre 0 et $\frac{1}{4}$; l'équation de cette courbe particulière est en effet $y = e^x - e^{2x}$: les x des points d'intersection de cette courbe avec la droite $y = h$ sont donnés par l'équation

$$e^{2x} - e^x + h = 0, \tag{5}$$

qui est du second degré par rapport à e^x. Cette inconnue ne peut recevoir qu'une valeur positive : si h est négatif, l'équation du second degré a deux racines ; une seule est positive ; la courbe n'est coupée qu'en un point par une parallèle à xx' située au-dessous de xx'. Si h est positif, l'équation en e^x a deux racines positives, à condition que h soit inférieur à $\frac{1}{4}$. On trouve

$$e^{x_1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2}, \qquad e^{x_2} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4h}}{2}.$$

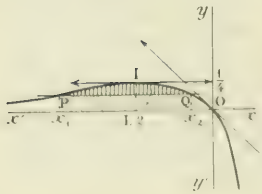
Les valeurs de x_1 et de x_2 sont négatives, car celles de e^{x_1} et de e^{x_2} sont l'une et l'autre inférieures à l'unité, puisqu'elles sont positives et que leur somme est $+1$. La longueur de la corde PQ est la valeur absolue de $x_1 - x_2$, ce qui fait $\mathrm{L}\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4h}}{1 - \sqrt{1 - 4h}}$.

L'aire demandée est la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} (y - h)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - hx\right]_{x_1}^{x_2} = (e^{x_2} - e^{x_1}) - \frac{1}{2}(e^{2x_2} - e^{2x_1}) - h(x_2 - x_1);$$

on peut remplacer e^{2x_2} et e^{2x_1} par les valeurs tirées de l'équation (5) ; l'intégrale définie devient

$$\frac{1}{2}(e^{x_2} - e^{x_1}) - h(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4h} - h\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{1 - 4h}}{1 - \sqrt{1 - 4h}}.$$



Cette aire est nulle si $h = \frac{1}{4}$: lorsque h tend vers zéro, elle tend vers une limite, comme on le voit en écrivant

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - 4h} - h\mathrm{L}(1 + \sqrt{1 - 4h})^2 + h\mathrm{L}4h.$$

On sait que le troisième terme devient nul ; il en est de même du second. La limite est donc $\frac{1}{2}$, c'est l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.

Très bonnes solutions : MM. E. Dion, école normale de Saint-Cloud ; G. Lach, à Douai ; M. Roux, au Creusot.
Bonnes solutions : MM. J. Chaize, école normale de l'enseignement technique ; A. Le Marchand, à Paris ; L. Naucelle, à La Châtre ; L. Simon, à Fourmies ; Topin, à Grandvilliers.
Assez bonnes solutions : MM. Betbéze-Culi, lycée de Toulouse ; Marescalchi ; Gaston Roy ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.
Solution passable de MM. Beaufrère, à Mondoubleau, et Maurice Roi.

2185. — *On considère l'équation*

$$4x^3 \sin a + 6x^2 \sin 2a + 4x \sin 3a + \sin 4a = 0$$

où a désigne un angle donné.

1° *Montrer que le premier membre de cette équation peut se mettre sous la forme*

$$\rho(x+\lambda)^4 - (x+\mu)^4 .$$

où ρ, λ et μ désignent des constantes réelles ou imaginaires.

2° *Résoudre l'équation donnée.*

1. Remplaçons les sinus par des exponentielles ; l'expression considérée devient

$$4x^3 \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} + 6x^2 \frac{e^{2ia} - e^{-2ia}}{2i} + 4x \frac{e^{3ia} - e^{-3ia}}{2i} + \frac{e^{4ia} - e^{-4ia}}{2i}$$

ou

$$\frac{1}{2i}[4x^3e^{ia} + 6x^2e^{2ia} + 4xe^{3ia} + e^{4ia} - 4x^3e^{-ia} - 6x^2e^{-2ia} - 4xe^{-3ia} - e^{-4ia}].$$

Remarquons que 1, 4, 6, 4 et 1 sont les coefficients de la quatrième puissance d'un binome : cela nous conduit à ajouter et à retrancher le terme x^4, l'expression est alors le développement de

$$\frac{1}{2i}[(x+e^{ia})^4 - (x+e^{-ia})^4] .$$

ce qui est bien la forme proposée ; on voit que

$$\rho = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}, \qquad \lambda = e^{ia}, \qquad \mu = e^{-ia}.$$

2. Il est maintenant facile de décomposer le polynome entre crochets en un produit de facteurs du premier degré en x, car on a identiquement

$$p^4 - q^4 \equiv (p^2 - q^2)(p^2 + q^2) \equiv (p+q)(p-q)(p-qi)(p-qi) .$$

Les quatre facteurs de la décomposition sont donc

$$x + e^{ia} + x + e^{-ia} = 2(x + \cos a) .$$

$$x + e^{ia} - x - e^{-ia} = 2i \sin a$$

(celui-ci ne contient pas x),

$$x + e^{ia} + ix + ie^{-ia} = x(1+i) + (1+i)\cos a + (1-i)\sin a,$$

$$x + e^{ia} - ix - ie^{-ia} = x(1-i) + (1-i)\cos a - (1-i)\sin a.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles, qui sont

$$x_1 = -\cos a, \qquad x_2 = -\cos a - \sin a, \qquad x_3 = -\cos a + \sin a.$$

(Pètre SERGESCU, Université de Bucarest.)

Très bonne solution de M. Marcel Gironnet, lycée Saint-Louis.
Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; Emile Dion, école normale de Saint-Cloud ; R. Dufour, à Nancy ; G. Lach, à Douai ; A. Le Marchand, à Paris ; L. Naucelle, à La Châtre ; Maurice Roi ; M. Roux, au Creusot ; L. Simon, à Fourmies ; Topin, à Grandvilliers ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.
Assez bonne solution de M. Betbézé-Culi, lycée de Toulouse.

Géométrie analytique.

2186. — *On considère deux paraboles* (P) *et* (Q) *rapportées à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *ayant l'une et l'autre le point* O *comme foyer et la droite* Ox *comme axe. Soit* Δ *la parallèle à* Oy *équidistante des directrices de ces paraboles ; par un point* M *de* Δ *on mène les tangentes* MA, MB *à la parabole* (P) *et les tangentes* MA′, MB′ *à la parabole* (Q), *les lettres* A, B, A′, B′ *désignant les points de contact de ces tangentes.*

1° *Montrer que les ordonnées des points* A *et* B *sont les mêmes que celles des points* A′ *et* B′ *(dans la suite on appellera* A′ *le point qui a même ordonnée que le point* A). *Vérifier que les droites* AA′, BB′ *sont équidistantes du point* M *et que les droites* AB, A′B′ *se coupent sur* Δ.

2° *Démontrer que* MB′ *est perpendiculaire à* MA, *que* MA′ *est perpendiculaire à* MB *et que les droites* AB′ *et* BA′ *passent par le foyer* O. *Former l'équation du faisceau* (F) *de ces droites* AB′ *et* BA′. *Trouver la relation qui doit exister entre les ordonnées de deux points* M *et* M′ *de* Δ *pour que le faisceau* (F) *correspondant à* M *et le faisceau* (F′), *correspondant à* M′ *aient une droite commune.*

3° *Les normales à la parabole* (P) *dont les pieds sont* A *et* B *se coupent au point* C ; *les normales à la parabole* (Q) *dont les pieds sont* A′ *et* B′ *se coupent au point* D. *Trouver les équations des lieux décrits par les points* C *et* D *lorsque* M *parcourt* Δ *et construire les courbes correspondantes.*

1. Les équations des deux paraboles sont respectivement

$$(P) \qquad x^2 + y^2 = (x - p)^2 \qquad \text{ou} \qquad y^2 + 2px - p^2 = 0,$$

et

$$(Q) \qquad x^2 + y^2 = (x - q)^2 \qquad \text{ou} \qquad y^2 + 2qx - q^2 = 0,$$

les abscisses des directrices étant désignées par p et q (*).

L'équation de Δ est $x = \frac{1}{2}(p+q)$; l'abscisse de M est aussi $\frac{1}{2}(p+q)$; son ordonnée m est arbitraire.

L'équation de la tangente à la parabole (P) au point (x_0, y_0) est

$$yy_0 + p(x + x_0) - p^2 = 0;$$

remplaçons-y x_0 en fonction de y_0, en nous servant de l'équation de (P) ; nous aurons ainsi l'équation de la tangente à (P) en fonction de l'ordonnée du point de contact

$$2yy_0 + 2px - y_0^2 - p^2 = 0.$$

Exprimons enfin que cette droite passe par le point M $\left(\frac{1}{2}(p+q),\ m\right)$: l'équation du second degré en y_0 ainsi formée,

$$(1) \qquad y_0^2 - 2my_0 - pq = 0,$$

a pour racines les ordonnées des points A et B où la parabole (P) est touchée par les tangentes issues de M.

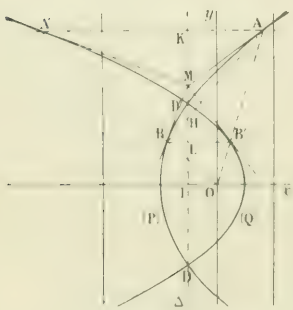


Fig. 1.

On voit que cette équation ne change pas par la permutation de p avec q ; les ordonnées des points A et B sont donc respectivement égales à celles des points A′ et B′. Les deux racines de l'équation (1) sont les ordonnées des droites AA′ et BB′, parallèles à Ox. Leur demi-somme est m, qui est l'ordonnée de M ; donc M est équidistant des droites AA′ et BB′.

AB et A′B′ sont les polaires de M par rapport aux deux paraboles (P) et (Q) ; leurs équations sont

$$my + px + \frac{1}{2}p(p+q) - p^2 = 0,$$

et

$$my + qx + \frac{1}{2}q(p+q) - q^2 = 0;$$

(*) p et q sont les paramètres des paraboles, regardés comme ayant un signe.

on peut les écrire

$$my + pq + p\left[x - \frac{1}{2}(p+q)\right] = 0 \qquad \text{et} \qquad my + pq + q\left[x - \frac{1}{2}(p+q)\right] = 0;$$

on voit bien que, pour $x = \frac{1}{2}(p+q)$, les deux équations donnent la même valeur de y, égale à $-\frac{pq}{m}$.

Les deux polaires coupent donc la droite Δ au même point H.

Si l'on appelle K et L les points où IM coupe AA′ et BB′, on a

$$\text{IK} + \text{IL} = 2m \qquad \text{et} \qquad \text{IK} \times \text{IL} = -pq,$$

donc

$$\frac{2}{\text{IH}} = -\frac{2m}{pq} = \frac{1}{\text{IK}} + \frac{1}{\text{IL}},$$

ce qui exprime que le point H est conjugué de I par rapport à K et L.

Remarque. — La propriété qui vient d'être démontrée est rendue évidente si l'on observe que la droite Δ est une corde commune aux deux paraboles ; en effet, en retranchant l'une de l'autre les équations de ces deux courbes, on fait disparaître y et l'on trouve

$$2(p-q)\left[x - \frac{1}{2}(p+q)\right] = 0.$$

Soient alors D et D′ les points où cette corde commune rencontre les deux paraboles ; il est clair que les polaires de M par rapport aux deux courbes doivent passer l'une et l'autre par le point H, conjugué harmonique de M par rapport à D et D′.

2. Formons l'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de M. Le coefficient angulaire y' de la tangente en un point de (P) est lié à l'ordonnée de ce point par la relation simple $y'y = -p$. L'équation aux coefficients angulaires des tangentes menées de M se déduit donc de l'équation (1), qui donnait les ordonnées des points de contact, en remplaçant y par $-\frac{p}{t}$; c'est donc

$$(2) \qquad qt^2 - 2mt - p = 0;$$

ses racines sont les coefficients angulaires des droites MA et MB. Pour avoir l'équation aux coefficients angulaires de MA′ et MB′, il faut permuter p et q ; on obtient alors

$$(3) \qquad pt^2 - 2mt - q = 0.$$

Cette dernière équation est celle que l'on obtiendrait en remplaçant t par $-\frac{1}{t}$ dans l'équation (2), ce qui prouve que les droites MA′ et MB′ sont respectivement perpendiculaires sur MA et MB.

Remarque. — Soit y_0 l'ordonnée de A et A′, y_1 celle de B et B′ : l'équation (1) montre que le produit $y_0 y_1$ est égal à $-pq$, donc

$$\left(-\frac{y_0}{p}\right)\left(-\frac{y_1}{q}\right) = -1;$$

or $-\frac{y_0}{p}$ est le coefficient angulaire de la tangente à (P) au point A et $-\frac{y_1}{q}$ est le coefficient angulaire de la tangente à (Q) au point B′ : ces deux tangentes sont donc rectangulaires.

L'équation du faisceau (F) des droites OA et OB se forme en éliminant la variable d'homogénéité z entre les équations de la parabole (P) et de la polaire de M par rapport à cette parabole : soient

$$y^2 + 2pzx - p^2z^2 = 0$$

et

$$my + px + \frac{1}{2}p(q-p)z = 0$$

ces équations, le résultat de l'élimination est

$$y^2 - \frac{4x(my+px)}{q-p} - \frac{4(my+px)^2}{(q-p)^2} = 0;$$

en développant et ordonnant, on obtient facilement

$$(4) \qquad y^2[(p-q)^2 - 4m^2] - 4m(p+q)xy - 4pqx^2 = 0$$

ou

$$y^2(p-q)^2 - 4(my + px)(my + qx) = 0\,;$$

cette équation ne change pas par la permutation de p avec q, ce qui prouve que le faisceau des droites OA et OB coïncide avec celui des droites OA′ et OB′. L'équation (4) est celle du faisceau des droites AB′ et BA′. Celle du faisceau (F′), correspondant à un autre point M′ de Δ, se forme en remplaçant m par m' dans l'équation (4), ce qui donne

$$(4') \qquad y^2(p-q)^2 - 4m'^2 - 4m'(p+q)xy - 4pqx^2 = 0.$$

En retranchant l'équation du premier faisceau de celle du second, on trouve

$$4(m^2 - m'^2)y^2 + 4(m - m')(p+q)xy = 0\,;$$

comme on suppose m différent de m', on peut diviser par le facteur $(m - m')$; remarquons aussi que la droite $y = 0$ ne peut appartenir au faisceau (F), si m est fini : il en résulte que, si les faisceaux (F) et (F′) ont une droite commune, l'équation de cette droite est

$$(m + m')y + (p+q)x = 0.$$

Remplaçons alors dans l'équation (4) y et x respectivement par les quantités proportionnelles $(p+q)$ et $-(m+m')$, nous aurons la condition demandée

$$(p+q)^2(p-q)^2 = 4(mq - pm')(mp - qm').$$

3. Soient x_0, y_0, les coordonnées de A, x_1, y_1, celles de B. L'équation de la normale à (P) en A est

$$\frac{X - x_0}{p} = \frac{Y - y_0}{y_0},$$

en appelant X et Y les coordonnées courantes. Remplaçons x_0 en fonction de y_0 au moyen de l'équation de (P), nous obtenons l'équation de la normale en fonction d'un paramètre, qui est l'ordonnée y_0 du pied de la normale

$$Xy_0 - pY = -\frac{y_0}{2p}(y_0^2 + p^2).$$

Les coordonnées de C sont les valeurs de X et de Y qui vérifient le système

$$Xy_0 - pY = -\frac{y_0^3}{2p} - \frac{1}{2}py_0$$

$$Xy_1 - pY = -\frac{y_1^3}{2p} - \frac{1}{2}py_1.$$

On en tire

$$X = -\frac{p}{2} - \frac{1}{2p}(y_0 + y_1)^2 - y_0y_1),$$

$$Y = -\frac{1}{2p^2}(y_0 + y_1)(y_0y_1).$$

Or y_0 et y_1 sont racines de l'équation (1), et l'on a vu que

$$y_0 + y_1 = 2m \qquad \text{et que} \qquad y_0y_1 = -pq\,;$$

en portant ces valeurs dans les équations précédentes, on a les valeurs des coordonnées X et Y de C, en fonction d'un paramètre qui est l'ordonnée m du point M. Ces valeurs sont

$$X = -\frac{1}{2}(p+q) - \frac{2m^2}{p}, \qquad Y = \frac{mq}{p}.$$

L'élimination de m donnerait l'équation du lieu

$$(5) \qquad 2pY^2 + q^2X + \frac{1}{2}q^2(p+q) = 0.$$

Un calcul semblable donnerait l'équation du lieu du point D : il est clair que le résultat de ce calcul peut être écrit d'emblée en permutant p et q dans l'équation (5).

Les lieux trouvés sont des paraboles ayant Ox pour axe et même sommet, qui est le point symétrique par rapport à O, foyer commun des deux paraboles, du pied de Δ. Les paramètres sont $-\frac{q^2}{4p}$ et $-\frac{p^2}{4q}$. Ces lieux peuvent ne pas être décrits en entier : en effet, les coordonnées d'un point du lieu sont données en fonction du paramètre m ; or, pour que les points A et B existent, il faut que M soit extérieur à la parabole (P), il est en même temps extérieur à (Q), car la droite Δ est, comme il a été dit plus haut, la corde commune aux deux courbes. Cette condition exprime aussi que l'équation (1) a des racines ; c'est donc $m^2 + pq \geqslant 0$. Elle est toujours vérifiée si p et q ont même signe, c'est-à-dire si les deux paraboles données ont des axes de même sens et ne se coupent pas. Mais dans le cas de la figure, m ne peut prendre que les valeurs extérieures à l'intervalle $-\sqrt{pq}$, $+\sqrt{pq}$; aux valeurs limites correspondent les coordonnées

$$m = -\sqrt{pq}, \qquad X = -\frac{1}{2}(p+q) - 2q, \qquad Y = -\frac{q}{p}\sqrt{pq},$$

$$m = +\sqrt{pq}, \qquad X = -\frac{1}{2}(p+q) - 2q, \qquad Y = +\frac{q}{p}\sqrt{pq}.$$

Lorsque les deux paraboles se coupent en deux points D et D′, le point M ne peut se trouver entre D et D′ ; sa polaire, lorsqu'il est extérieur à la parabole (P), coupe cette courbe en deux points A et B, séparés par le point D ou par D′. Si M se rapproche de D, A et B viennent se confondre avec D, les normales en A et en B coïncident avec la normale en D, mais leur point d'intersection a une position limite, qui est le centre de courbure de la parabole (P) au point D. Ainsi les deux points limites, dont les coordonnées viennent d'être calculées, sont les centres de courbure de la parabole en D et D′.

Solution géométrique des §§ 1 et 2. — Soient L et L′ les directrices des deux paraboles : un point commun est équidistant du foyer F et de L, du foyer F et de L′, il est donc équidistant de L et de L′, et par suite appartient à la droite Δ équidistante des directrices. Les points communs aux deux paraboles sont donc ceux où l'une d'elles est coupée par la droite Δ. Ces points sont à l'intersection de Δ avec le cercle tracé de F pour centre et dont le rayon est la moitié de la distance des directrices ; pour que les paraboles aient des points communs, il faut donc que la distance de F à Δ soit plus petite que la moitié de la distance de L à L′, autrement dit, que F soit situé entre les deux droites L et L′.

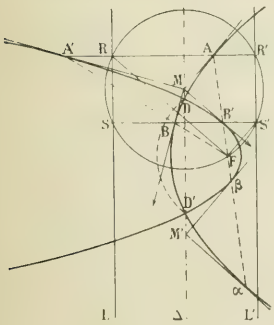


Fig. 2.

1. Soit M un point de Δ ; pour construire les tangentes menées de M aux paraboles, il faut tracer le cercle dont M est le centre et MF le rayon ; si la distance MF surpasse la moitié de la distance des directrices, ce cercle coupe les deux directrices en R, S et R′, S′ respectivement : les tangentes à la parabole (P) menées par M sont les perpendiculaires menées de M à FS et à FR, les points de contact sont situés sur les perpendiculaires à la directrice élevées en S et en R. Mais, comme les deux cordes L et L′ sont équidistantes du centre M, la figure SRR′S′ est un rectangle, la ligne RR′ est perpendiculaire aux directrices, elle passe en A et en A′, de même SS′ passe en B et B′ : il est évident que M est à égale distance de RR′ et de SS′.

2. R et S′ sont diamétralement opposés, ainsi que R′ et S, donc FR et FS′ sont rectangulaires, ainsi que FR′ et FS ; il en résulte que les tangentes MA et MB′ sont orthogonales, ainsi que MA′ et MB.

FA et AR sont symétriques par rapport à la tangente AM, de même FB′ et S′B′ sont symétriques par rapport à la tangente B′M ; mais B′S′ et AR sont deux droites parallèles, tandis que MB′ et MA sont orthogonales ; on sait que les directions symétriques d'une même direction par rapport à deux droites rectangulaires sont parallèles ; donc les droites FB′ et FA sont parallèles et par suite confondues, puisqu'elles ont un point commun F. F, B′ et A sont donc en ligne droite, ainsi que F, B et A′.

Le faisceau AB′, A′B est donc formé des droites qui joignent F aux points de contact des tangentes à (P) menées par M. Pour que les faisceaux relatifs à deux points M et M′ aient une droite commune, il faut et il

suffit que M et M' soient les points d'intersection avec Δ des deux tangentes aux extrémités d'une corde passant en F.

A un point M correspondent donc deux points M' et *vice versa*.

Solutions géométriques bonne de M. Marescalchi et assez bonne de M. Emile Dion, école normale de Saint-Cloud.

Solutions analytiques. — Bonnes solutions : MM. E. N. Barisien ; G. Lagh, à Douai ; A. Le Marchand, à Paris ; Topin, à Grandvilliers.

Assez bonnes solutions : MM. A. Berlande, école normale de Saint-Cloud ; Betbèze-Culi, lycée de Toulouse ; Marescalchi ; L. Naudelle, à La Châtre ; L. Simon, à Fourmies.

Solution passable de M. Emile Dion, école normale de Saint-Cloud.

Mécanique.

2187. *Statique. — Une sphère homogène, de rayon* R, *de poids* P, *s'appuie sur un plan incliné parfaitement poli faisant avec l'horizon un angle* α. *Elle est retenue par un fil inextensible de longueur* 3R *attaché en un point* A *de sa surface et dont l'autre extrémité est un point fixe* B *situé à une distance* 3R *du plan. Le point* B *et la sphère sont au-dessus du plan.*

Trouver la position d'équilibre, la tension et la réaction du plan. L'équilibre est-il toujours possible dans les conditions de l'énoncé?

Trois forces agissent sur la sphère :

1° son poids P, appliqué en son centre, puisqu'elle est homogène ;

2° la réaction N du plan, appliquée au point I où la sphère le touche et normale à ce plan puisqu'il n'y a pas de frottement ;

3° la tension T du fil, dirigée de A vers B.

Pour que ces trois forces forment un système en équilibre, il faut qu'elles soient concourantes et dans un même plan.

Le point de concours sera O, puisque deux des forces, P et N, ont des lignes d'action passant en ce point : le plan des trois forces contiendra le point B, la verticale issue de ce point (puisque P est verticale) et la perpendiculaire au plan S (puisque N est perpendiculaire au plan S).

La position du point O est donc déterminée ; il est commun :

a) à la sphère dont le centre est le point B et le rayon 4R ;

b) au plan parallèle au plan S mené au-dessus de ce plan à une distance égale à R ;

c) au plan mené par B, contenant la verticale de ce point et la perpendiculaire au plan S donné : ce plan coupe le plan S suivant une ligne de plus grande pente ; nous le prenons pour plan de la figure. Le triangle BOC est dans ce plan, l'angle en O est de 30°, car l'hypoténuse OB est double du côté BC.

Ce sont les conditions géométriques de l'équilibre, elles sont nécessaires, mais non suffisantes, car il faut s'assurer maintenant que les valeurs trouvées pour T et pour N sont positives.

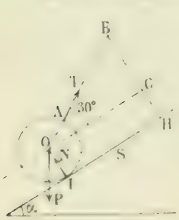


Fig. 1.

Les lignes d'action des forces T, P, N étant concourantes, lorsque les conditions géométriques sont remplies, comme nous le supposons dorénavant, il suffit d'écrire que la résultante de ces trois forces est nulle, et, pour cela, que ses projections sur deux axes rectangulaires sont nulles ; projetons sur la ligne de plus grande pente du plan S et sur BH, nous aurons successivement

$$T \cos 30^\circ = P \sin \alpha,$$

et

$$T \sin 30^\circ + N = P \cos \alpha.$$

On en tire

$$T = \frac{2P}{\sqrt{3}} \sin \alpha \qquad \text{et} \qquad N = -\frac{P}{\sqrt{3}} \cos \alpha (\sqrt{3} - \operatorname{tg} \alpha).$$

On en conclut que l'équilibre n'est possible que si l'angle α a une tangente inférieure à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire que si $\alpha < 60°$.

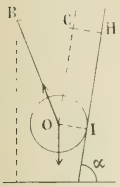


Fig. 2.

On interprète facilement ce résultat en remarquant que l'angle OBC étant de 60°, cette condition exprime que la verticale issue de B est intérieure à l'angle OBH. On conçoit alors que la résultante de la tension, dirigée de O vers B, et du poids, appuie la sphère sur le plan S.

Dans le cas contraire, indiqué sur la figure 2, on voit bien que la pesanteur et la tension du fil ont une résultante qui écarte la sphère du plan S.

Bonnes solutions : MM. Betbeze-Curl, lycée de Toulouse ; G. Lach, à Douai ; Marescalchi ; M. Roux, au Creusot ; Topin, à Grandvilliers.
Assez bonne solution de M. Beaufère, conducteur des Ponts et Chaussées à Mondoubleau.

2188. *Dynamique. — Un point matériel* M, *de masse* m, *se meut sur une circonférence de rayon* R : *l'arc parcouru* s *est défini par la relation*

$$s = \mathrm{R}\mathrm{L}(1 + \alpha t),$$

α *est une constante positive ;* L *désigne le logarithme népérien.*

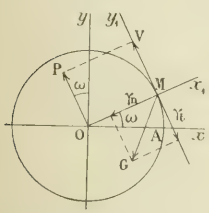
1° *Déterminer la vitesse et les accélérations tangentielle et centripète à un instant* t *quelconque. Trouver l'hodographe du mouvement. (On pourra rapporter cette courbe à des coordonnées polaires.)*

2° *Soit* F *la force qui, en agissant seule sur le mobile, produirait le mouvement. Déterminer l'intensité de* F *en fonction de la vitesse* v *du mobile, et trouver l'angle de* F *et du vecteur vitesse.*

3° *On considère le déplacement du mobile entre l'instant initial* ($t = 0$) *et l'instant* t. *Evaluer le travail correspondant de* F, *et l'exprimer en fonction de la vitesse initiale* V *et de l'arc* s *parcouru par le mobile. Montrer qu'il tend vers une limite quand* s *croît indéfiniment.*

4° *Le rayon* R *étant* 100 *mètres, la masse* m 100 *grammes, la vitesse initiale* 36 *kilomètres à l'heure, trouver les valeurs à l'instant initial de la force vive du mobile et de la force* F. *Ces mesures seront données en unités industrielles (unités fondamentales : mètre, seconde, kilogramme-force).*

1. Le mouvement est discontinu pour $t = -\frac{1}{\alpha}$, aussi ne donnerons-nous à la variable t que des valeurs supérieures à cette limite. Soit A l'origine des arcs sur la circonférence de rayon R ; le point mobile M se trouve en A à l'époque $t = 0$, car si l'on fait $t = 0$ dans la formule qui donne s en fonction de t, on trouve $s = 0$. La vitesse est un vecteur MV, porté par la tangente ; la direction positive My_1 sur la tangente étant celle qui fait avec le rayon OM un angle égal à $+\frac{1}{2}\pi$, la valeur algébrique de ce segment est $\frac{ds}{dt} = \frac{\mathrm{R}\alpha}{1 + \alpha t}$: à l'instant initial on a $\mathrm{V} = \mathrm{R}\alpha$.



L'accélération est un autre vecteur, MG, dont les projections sur les axes, My_1 et MO (ce dernier de sens contraire à Ox_1), sont

$$\text{accélération tangentielle} \quad \gamma_t = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{\mathrm{R}\alpha^2}{(1 + \alpha t)^2},$$

$$\text{accélération centripète} \quad \gamma_n = \frac{v^2}{\mathrm{R}} = +\frac{\mathrm{R}\alpha^2}{(1 + \alpha t)^2}.$$

Ces deux composantes ont même valeur absolue : il en résulte que le vecteur accélération est dirigé suivant une droite qui fait 45° avec MO, dans le sens direct. La projection de cette accélération

sur la tangente est de sens contraire à celle de la vitesse, l'accélération est retardatrice. L'hodographe est la courbe décrite par l'extrémité d'un vecteur OP, équipollent à la vitesse MV ; les coordonnées polaires du point P, par rapport à Oy pris comme axe polaire, sont

$$r = \mathrm{OP} = \frac{\mathrm{R}\alpha}{1+\alpha t}, \qquad \omega = y\mathrm{OP} = x\mathrm{OM};$$

or $\mathrm{R}\omega = s = \mathrm{RL}(1+\alpha t)$, donc

$$\mathrm{L}(\mathrm{OP}) = \mathrm{L}(\mathrm{R}\alpha) - \mathrm{L}(1+\alpha t) = \mathrm{L}(\mathrm{R}\alpha) - \omega.$$

On en tire $\qquad \omega = \mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{R}\alpha}{\mathrm{OP}}\right) \qquad$ et $\qquad \mathrm{OP} = \mathrm{R}\alpha e^{-\omega}$.

Le point P décrit une spirale logarithmique ayant O pour pôle ; l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est égal à 45°, puisque, par définition de l'accélération, la vitesse du point P sur l'hodographe est équipollente à l'accélération de M.

2. L'accélération de M a pour intensité $\mathrm{MG} = \sqrt{2}\,|\gamma_t| = \sqrt{2}\frac{\mathrm{R}\alpha^2}{(1+\alpha t)^2} = \sqrt{2}\frac{v^2}{\mathrm{R}}$.

La force qui produit le mouvement de M a pour intensité le produit de la masse de M par son accélération ; c'est donc $\sqrt{2}\frac{m\mathrm{R}\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}$.

Exprimée en fonction de v, $\mathrm{F} = \sqrt{2}m\frac{v^2}{\mathrm{R}}$. L'angle de la force et du vecteur vitesse est 135°.

3. Pour calculer le travail de cette force, nous pouvons appliquer deux procédés : le travail élémentaire, pour un déplacement ds, est le produit algébrique du déplacement par la projection de la force sur le déplacement, c'est-à-dire $mds \times \gamma_t$. On a donc

$$d\mathrm{T} = m\gamma_t\frac{ds}{dt}dt = -m\frac{\mathrm{R}\alpha^2}{(1+\alpha t)^2}\cdot\frac{\mathrm{R}\alpha}{1+\alpha t}\cdot dt = m\mathrm{R}^2\alpha^2\frac{-\alpha}{(1+\alpha t)^3}dt.$$

On calcule alors le travail en intégrant cette différentielle entre les limites 0 et t. Cela donne

$$\mathrm{T} = m\mathrm{R}^2\alpha^2\int_0^t\frac{-\alpha}{(1+\alpha t)^3}dt = \frac{m\mathrm{R}^2\alpha^2}{2}\left(\frac{1}{(1+\alpha t)^2} - 1\right).$$

L'autre procédé consiste à appliquer le théorème de la variation de force vive. Le travail effectué par la force qui agit sur le point M, quand il passe de la position A à la position M est égal à la demi-variation de la force vive de M entre ces deux positions, $\frac{1}{2}m(v^2 - \mathrm{V}^2)$, ce qui donne

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{R}^2\alpha^2}{(1+\alpha t)^2} - \mathrm{R}^2\alpha^2\right)$$

et, en remarquant que $1 + \alpha t = e^{\frac{s}{\mathrm{R}}}$,

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m\mathrm{R}^2\alpha^2\left(e^{-\frac{2s}{\mathrm{R}}} - 1\right) = \frac{1}{2}m\mathrm{V}^2\left(e^{-\frac{2s}{\mathrm{R}}} - 1\right).$$

Quand t augmente indéfiniment, s croît aussi au-delà de toute limite, et l'exponentielle $e^{-\frac{2s}{\mathrm{R}}}$ tend vers zéro. Donc T a une valeur limite, qui est $-\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2$.

4. Si les unités fondamentales sont : le centimètre, la seconde, le gramme-*masse*, on a

$$\mathrm{R} = 10\,000 = 10^4, \qquad m = 100 = 10^2, \qquad \mathrm{V} = 3\,600\,000 : 3\,600 = 10^3 :$$

alors la force vive initiale est, *en ergs*,

$$m\mathrm{V}^2 = 100 \times 1\,000^2 = 10^8 \text{ ergs} = 10 \text{ joules},$$

et la force F, *en dynes*, $\sqrt{2}\frac{mV^2}{R} = \sqrt{2} \times 10^2 \times 10^6 \times 10^{-4} = \sqrt{2} \times 10^4$.

Or le kilogramme-force vaut 981 000 dynes et le kilogrammètre vaut 981×10^5 ergs. Donc

$$mV^2 = \frac{10^8}{981 \times 10^5} = \frac{1000}{581} = 1{,}0194 \text{ kilogrammètres},$$

$$F = \frac{\sqrt{2} \times 10^4}{981 \times 10^3} = \frac{\sqrt{2} \times 2}{981} = 0{,}01441 \text{ kilogrammes}.$$

N. B. — Presque tous nos correspondants ont fait, dans l'application numérique, une erreur, que d'ailleurs les candidats à l'Ecole Navale ont été aussi assez nombreux à commettre. *Ils ont pris* $m = 0{,}1$ *en unités industrielles*. L'énoncé disait que la masse était celle de 100 grammes, non que la mesure de cette masse dans le système choisi était le nombre 0,1. Entre la mesure de la masse et celle du poids, quel que soit le système d'unités choisi, doit exister la relation qui définit la masse en fonction de la force ou inversement : $mg = P$. Le poids de 100 grammes, dans le système indiqué est assurément 100 grammes, c'est-à-dire $0^{kg},1$, donc la masse de ce petit morceau de matière est mesurée, dans le même système, par le nombre $0{,}1 \times 9{,}81$ (puisque l'unité de longueur est le mètre $g = 9{,}81$). Le mot masse a malheureusement deux sens : en physique, il désigne une grandeur bien définie ; mais dans le langage courant, il exprime un morceau de matière : si l'énoncé avait dit : un morceau de matière, qui pèse 100 grammes..., personne ne s'y serait trompé. Mais beaucoup de candidats ont remplacé le mot *étant* par le signe $=$, l'habitude d'employer des abréviations a pu leur rendre ici un mauvais service.

Les professeurs répètent à leurs élèves qu'il faut lire attentivement les énoncés, pour bien comprendre ce qui est demandé : quelques élèves ont suivi dans ce cas la recommandation d'une façon un peu aveugle. Au lieu de creuser la question, ils en ont creusé le texte, et, voyant que g n'était pas mentionné dans l'énoncé, ils en ont conclu que la connaissance de cette constante n'avait rien à faire avec le problème.

Le moyen le plus sûr de ne pas commettre d'erreurs dans le passage d'un système à un autre nous paraît être de commencer par faire les calculs dans le système C. G. S.

Les formules de la Mécanique sont toutes données dans les Traités de Mécanique rationnelle en supposant que le système fondamental est un système : longueur, masse, temps : il est facile de faire les calculs en appliquant ces formules, et en exprimant les données dans le système C. G. S.

Les résultats une fois calculés, la transformation est facile si l'on connaît les dimensions de la quantité considérée : or la connaissance de ces dimensions est une chose essentielle, qu'il est impossible d'ignorer.

Bonnes solutions de MM. Beaufrère, conducteur des Ponts et Chaussées à Mondoubleau et R. Dufour, école normale de Nancy.

Assez bonnes solutions : MM. J. Chaize, école normale de l'enseignement technique ; G. Lach, à Douai ; Topin, à Grandvilliers.

Calcul.

2189. — *Calculer les trois angles* x, y, z *compris entre* -90° *et* $+90^\circ$, *satisfaisant aux relations*

$$\sin x = \frac{\sin a \cos b\sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} + \sin b \cos a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin y = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 b}}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b},$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 a}\sqrt{1 - k^2 \sin^2 b} - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 b}.$$

où l'on suppose

$$k = 0{,}31427,$$
$$a = 123^\circ\ 48'\ 10'',$$
$$b = 52^\circ\ 10'\ 20''.$$

Une remarque préliminaire abrège beaucoup le calcul : les numérateurs des trois expressions considérées sont les sommes de quantités qui ont deux à deux le même produit. On est donc conduit à former les carrés des trois sinus, pour essayer d'éliminer entre ces carrés le double produit ; on réussit ainsi à trouver les deux relations simples

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1,$$
$$k^2 \sin^2 x + \sin^2 z = 1.$$

Commençons donc par le calcul de l'angle x. Pour rendre la formule calculable par logarithmes,

on pourra poser $k \sin a = \sin u$, et $k \sin b = \sin v$, la formule deviendra alors

$$\sin x = \frac{\cos b \sin a \cos v + \sin b \cos a \cos u}{1 - \sin a \sin b \sin u \sin v};$$

posons encore

$$\sin a \cos v = A \cos \varphi, \quad \cos a \cos u = A \sin \varphi, \quad \text{et} \quad \sin a \sin b \sin u \sin v = k^2 \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 \theta;$$

il en résultera

$$\sin x = \frac{A \cos(b - \varphi)}{\sin^2 \theta}.$$

Calculs préliminaires.

$a' = 180^\circ - a = 56^\circ 44' 50''$

$\log \sin a' = \bar{1},9195788$

$\text{colog} \sin a' = 0,0804212$

$\log \cos a' = \bar{1},7453371$

$\log k = \bar{1},4973029$

Calcul de u.

$\log k = \bar{1},4973029$

$\log \sin a = \bar{1},9195788$

$\log \sin u = \bar{1},4168817$

$\log \sin 15^\circ 8' 40'' = \bar{1},4168284$

$\delta = 778$ $\quad 6'',8$ pour 533

$15^\circ 8' 46'',8 = u$

$\log \cos 15^\circ 8' 20'' = \bar{1},9846603$

$\delta = 57$ pour $3'',2$ $\quad +18$

$\log \cos u = \bar{1},9846621$

$\log \sin b = \bar{1},8975489$

$\text{colog} \sin b = 0,1024511$

$\log \cos b = \bar{1},7856659$

Calcul de v.

$\log k = \bar{1},4973029$

$\log \sin b = \bar{1},8975489$

$\log \sin v = \bar{1},3948518$

$\log \sin 14^\circ 22' 20'' = \bar{1},3948373$

$\delta = 821$ $\quad 1'',8$ pour 145

$14^\circ 22' 21'',8 = v$

$\log \cos 14^\circ 22' 30'' = \bar{1},9861855$

$\delta = 54$ pour $-8'',2$ $\quad +44$

$\log \cos v = \bar{1},9861899$

$\text{colog} \cos v = 0,0138101$

Calcul de φ.

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \frac{\cos a'}{\sin a'} \cdot \frac{\cos u}{\cos v}.$$

$\log \cos a' = \bar{1},7453371$

$\text{colog} \sin a = 0,0804212$

$\log \cos u = \bar{1},9846621$

$\text{colog} \cos v = 0,0138101$

$\log |\operatorname{tg} \varphi| = \bar{1},8242305$

$\log \operatorname{tg} 33^\circ 42' 30'' = \bar{1},8242087$

$\delta = 156$ $\quad 4'',8$ pour 218

$33^\circ 42' 34'',8 = 180^\circ - \varphi$

$\log \sin 33^\circ 42' 30'' = \bar{1},7442659$

$\delta = 316$ pour $4'',8$ $\quad 152$

$\log \sin \varphi = \bar{1},7442811$

$146^\circ 17' 25'',2 = \varphi$

$94^\circ 7' 5'',2 = \varphi - b$

$85^\circ 52' 54'',8 = 180^\circ - (\varphi - b)$

$\log \cos 85^\circ 52' 54'' = 2,8561956$

$\delta = 292$ (pour 1) pour $-0'',2$ $\quad +58,4$

$\log \cos 85^\circ 52' 54'',8 = 2,8562014$

Calcul de A.

$$|A| = \frac{\cos a' \cos u}{\sin \varphi} = -A.$$

$\log \cos a' = \bar{1},7453371$

$\log \cos u = \bar{1},9846621$

$\text{colog} \sin \varphi = 0,2557189$

$\log |A| = \bar{1},9857181$

Calcul de θ.

$\cos \theta = k \sin a \sin b$

$\log k = \bar{1},4973029$

$\log \sin a = \bar{1},9195788$

$\log \sin b = \bar{1},8975489$

$\log \cos \theta = \bar{1},3144306$

$\log \cos 78^\circ 5' 40'' = \bar{1},3144973$

$\delta = 999$ $\quad +3'',3$ $\quad -333$

$78^\circ 5' 43'',3 = \theta$

$\log \sin 78^\circ 5' 40'' = \bar{1},9905559$

$\delta = 45$ $\quad +3'',3$ $\quad 15$

$\log \sin \theta = \bar{1},9905574$

$\text{colog} \sin \theta = 0,0094426$

$2 \text{ colog} \sin \theta = 0,0188852$

Calculs définitifs.

Calcul de x. — $\sin x = \dfrac{A \cos(\varphi - b)}{\sin^2 \theta}$.

A est négatif, ainsi que $\cos(\varphi - b)$, donc $\sin x$ est positif et x compris entre 0 et 90°.

$$\log |A| = \bar{1},9857181$$
$$\log |\cos(\varphi - b)| = \bar{2},8562014$$
$$2 \operatorname{colog} \sin \theta = 0,0188852$$
$$\log \sin x = \bar{2},8608047$$
$$\log \sin 4^\circ 9' 43'' = \bar{2},8607917$$

$\delta = 289$ (pour 1″) $\quad 0'',5$ pour 130

donc $\quad 4^\circ 9' 43'',5 = x$

Calcul de y. — Le sinus de y est visiblement négatif, car $\cos a \cos b > 0$; or l'équation $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$ montre que $|\sin y| = \cos x$, donc

$$\sin y = -\cos x \quad \text{et} \quad y = x - 90^\circ = -(85^\circ 50' 16'',5)$$

Calcul de z. — L'examen de la formule fait voir que $\sin z$ est positif, car le terme $-k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b$ a le signe $+$; z est donc compris entre 0 et 90°. Or on a vu que

$$\cos^2 z = k^2 \sin^2 x,$$

par suite

$$\cos z = k \sin x ;$$
$$\log \sin x \quad \bar{2},8608047$$
$$\log k \quad \bar{1},4973029$$
$$\log \cos z \quad \bar{2},3581076$$
$$\log \cos 88^\circ 41' 34'' \quad \bar{2},3581891$$

$\delta = 923$ (pour 1″) $\quad +0'',9$ pour -815

Ainsi

$$z = 88^\circ 41' 34'',9,$$
$$y = -(85^\circ 50' 16'',5),$$
$$x = 4^\circ\ 9' 43'',5.$$

MM. G. Lach (Douai) et A. Rousseau (Fournes-en-Weppes) ont indiqué la simplification élégante du calcul, mais leur calcul n'est pas exempt de faute. La longueur des opérations — quand on ne simplifie pas — a découragé nos autres correspondants.

Physique.

2190. — 1° *Le tube de verre d'un baromètre normal est exactement cylindrique et a une section s à 0°. Il plonge verticalement dans le mercure d'une cuvette très large. La température étant 0° et la hauteur de la colonne barométrique étant* H, *on met la partie supérieure du tube en communication avec l'extérieur par une ouverture assez large pour que la pression atmosphérique puisse s'y exercer instantanément.*

On demande d'exprimer en calories-gramme-degré la quantité de chaleur dégagée dans le mercure après cessation complète des mouvements provoqués par la chute de la colonne barométrique.

2° *Comment ce résultat serait-il modifié si le tube était incliné sur la verticale d'un angle α assez petit cependant pour qu'il subsiste une chambre barométrique?*

3° *Comment ce même résultat serait-il modifié si la cuvette, au lieu d'être très large, avait une section* S *à l'extérieur du tube?*

4° *Comment serait-il encore modifié, l'appareil restant le même et pour la même pression atmosphérique,*

si la température était t° au lieu de 0°? On désignera par μ le coefficient de dilatation absolue du mercure et par λ le coefficient de dilatation linéaire du verre.

5° *Les conditions initiales restant celles de la* 1re *question, on met la chambre barométrique en large communication, non plus avec l'atmosphère, mais avec un récipient de grand volume contenant de l'air sous une pression inférieure à celle de l'atmosphère et mesurée par une hauteur h de mercure à 0°. Quelle sera la chaleur dégagée dans le mercure après retour à l'équilibre?*

On fera l'application numérique pour la première question seulement, avec les données numériques suivantes :

$s = 4^{cm^2}$. $H = 76^{cm}$. *Densité du mercure à* 0° : $d = 13{,}6$.

Accélération de la pesanteur : $g = 981$.

Équivalent mécanique : $J = 4{,}18 \times 10^7$ *ergs par calorie gramme-degré.*

1. Les forces extérieures qui entrent en jeu durant le mouvement du mercure sont d'une part le poids du liquide, d'autre part les forces dues à la pression atmosphérique. Le volume du mercure étant invariable, le travail de ces dernières est nul, le travail négatif à la surface de la cuvette compensant le travail positif qui s'effectue dans le tube. Le travail du poids du mercure ne dépend que du déplacement du centre de gravité, lequel est égal à $\frac{1}{2}H$; le poids, exprimé en dynes, est $Hsdg$; le travail est donc $\frac{1}{2}H^2sdg$. Les mouvements une fois amortis, tout ce travail est transformé en une quantité de chaleur

$$\frac{H^2sdg}{2J}.$$

L'application numérique donne

$$\frac{\overline{76}^2 \times 4 \times 13{,}6 \times 981}{2 \times 4{,}18 \times 10^7} = 3{,}7.$$

2. Si le tube est incliné, le déplacement vertical du centre de gravité du mercure reste le même, mais la longueur de la colonne mercurielle est $\frac{H}{\cos\alpha}$ et le résultat précédent doit être divisé par $\cos\alpha$.

3. Si la cuvette a une section S, le niveau s'élève de y dans la cuvette tandis qu'il s'abaisse de x dans le tube et la somme des deux déplacements doit être égale à H :

$$x + y = H.$$

Le mercure qui disparaît du tube apparaît dans la cuvette, donc

$$sx = Sy.$$

d'où $$x = H\frac{S}{S+s} \qquad \text{et} \qquad y = H\frac{s}{S+s}.$$

Le déplacement du centre de gravité du mercure qui passe du tube dans la cuvette est $\frac{1}{2}(x+y)$, c'est-à-dire toujours $\frac{1}{2}H$; mais le volume du mercure déplacé n'est que $sx = H\frac{Ss}{S+s}$. Le premier résultat est donc multiplié par

$$\frac{S}{S+s}.$$

4. Si la température est t°, la hauteur du mercure est $H(1+\mu t)$, sa densité $\frac{d}{1+\mu t}$ et la section du tube $s(1+2\lambda t)$. Le produit $\frac{1}{2}H^2sdg$ se trouve donc multiplié par

$$\frac{(1+\mu t)^2}{1+\mu t}(1+2\lambda t) = (1+\mu t)(1+2\lambda t).$$

5. Si on établit dans le tube une pression h, le mercure reste suspendu à la hauteur $H - h$ et le poids de ce liquide qui disparaît du tube est seulement $hsdg$; son centre de gravité se déplace de $H - \frac{1}{2}h$ et le travail correspondant est

$$\frac{1}{2}(2H - h)hsdg.$$

D'autre part, les travaux des pressions ne se compensent plus. Dans le tube, il y a un travail positif de la pression hdg portant sur le volume hs ; dans la cuvette, travail négatif de la pression Hdg portant sur le même volume ; ce qui fait en tout un travail

$$-(H - h)hsdg.$$

Le travail total des forces extérieures est donc

$$\frac{1}{2}(2H - h) - 2(H - h)hsdg = \frac{1}{2}h^2sdg.$$

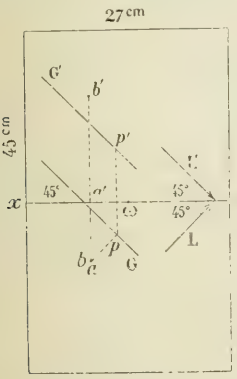
et la chaleur dégagée

$$\frac{h^2sdg}{2J}.$$

Solutions partielles de MM. Emile Dion, de Saint Cloud, et Marcel Ullmann, à Héricourt.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2181. — *Cadre* 27cm *sur* 45cm. *Ligne de terre xy (en trait noir fin) petit axe ; ω centre. Les plans de projection existent et sont opaques. Titre extérieur : Ombres. — Titre intérieur : Ellipsoïde et Paraboloïde.*



Un ellipsoïde de révolution a pour axe le segment vertical (ab, a'b') ; ωa' = 3cm, aa' = 8cm, a'b' = 14cm, le rayon de l'équateur a 5cm. Une surface réglée est engendrée par une droite horizontale qui s'appuie sur (ab, a'b') et sur la droite (G, G') ; G fait un angle de 45° avec xy et est à une distance ap du point a égale à 5cm ; G' est parallèle à G et la cote du point (p, p') est 7cm.

La surface réglée divise l'ellipsoïde supposé solide et opaque en deux parties. On demande : 1° de représenter par ses projections la partie qui contient le point le plus à droite de l'ellipsoïde ; 2° de trouver les ombres propres et portées relatives au corps précédent, les rayons lumineux étant parallèles à (L, L').

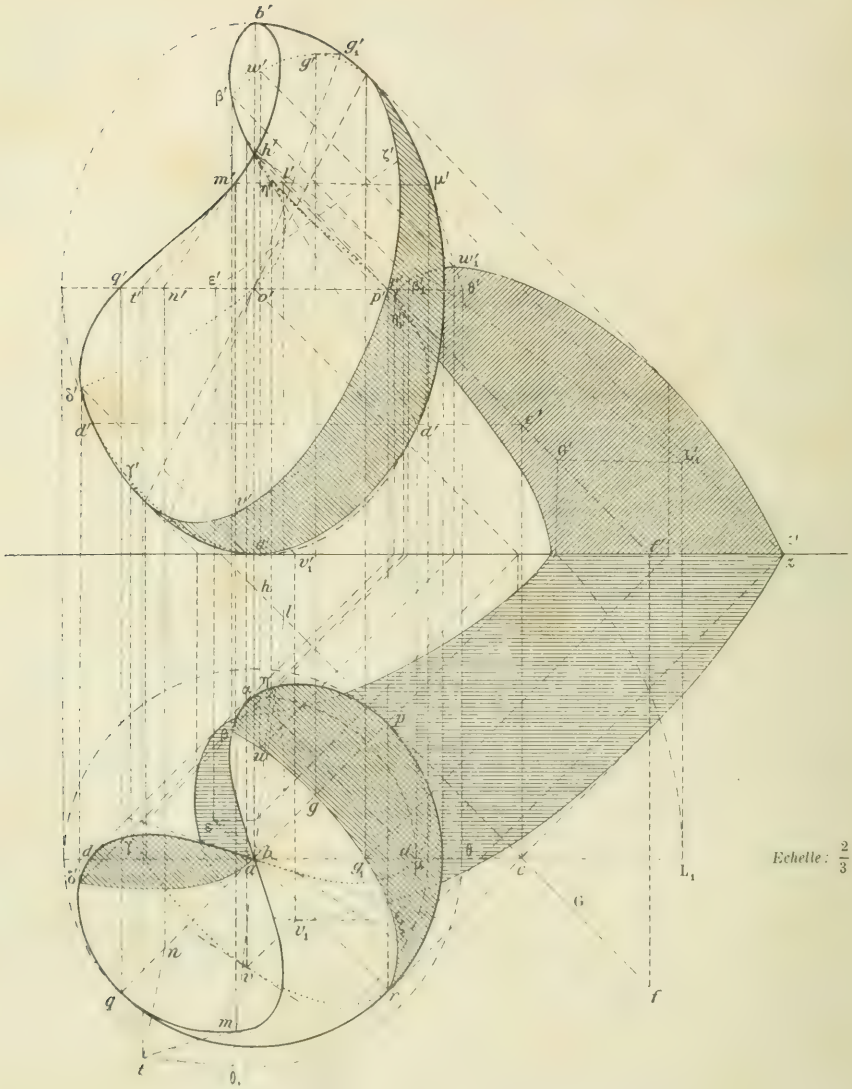
Les résultats seuls seront tracés à l'encre noire, traits pleins pour les lignes vues, points ronds pour les lignes cachées. Le reste sera dessiné à l'encre rouge en traits pleins (plutôt fins). On fera les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et les tangentes remarquables ; le trait rouge des tangentes trouvées sera un peu renforcé (en couleur) aux environs des points de contact ; aucune flèche.

On tracera tous les contours d'ombre qui existent, vus ou cachés, à l'encre noire ou à l'encre bleue ; hachures sur les ombres vues, différentes pour des surfaces différentes.

(*Ecole centrale, 1913.*)

L'ellipsoïde a pour contour apparent vertical l'ellipse méridienne dont on donne les deux axes et que l'on peut construire immédiatement. Son contour apparent horizontal est la projection du cercle équateur de rayon 5cm.

Le paraboloïde hyperbolique est équilatère et a pour plans directeurs un plan horizontal et un plan vertical parallèle à G. Il n'y a pas lieu de s'occuper de ses contours apparents puisqu'il a une génératrice verticale (ab, $a'b'$) et une génératrice de bout projetée verticalement au point d'intersection de G' et de $a'b'$: les traces de tous les plans tangents à la surface qui sont perpendiculaires à un des plans de projection pivotent respectivement autour de la trace correspondante d'une de ces génératrices.



Echelle : $\frac{2}{3}$.

On peut obtenir l'intersection des deux surfaces en les coupant par des plans horizontaux qui donnent chacun dans l'ellipsoïde un parallèle et sur le paraboloïde une génératrice dont l'intersection avec ce parallèle fait connaître deux points de l'intersection. On peut aussi, et cela revient au même, couper les deux surfaces par les plans méridiens de l'ellipsoïde : chacun d'eux donne l'ellipse de grandeur invariable qu'on peut amener par une rotation à coïncider avec la méridienne de front, et une génératrice horizontale dont la projection verticale n'a pas bougé pendant la rotation, et coupe l'ellipse en deux points qu'on ramène ensuite dans le plan méridien auxiliaire par la rotation opposée. Il y a avantage à définir les plans auxiliaires par une suite de points équidistants sur la génératrice G ; ici, par exemple, les deux projections étant également inclinées sur xy, on pourra diviser chaque projection de G en centimètres et obtenir assez rapidement les génératrices et les parallèles correspondants.

On obtient la tangente en un point quelconque (m, m') en prenant l'intersection du plan tangent à l'ellipsoïde avec le plan tangent au même point au paraboloïde ; le premier plan a pour horizontale sur le plan de l'équateur $\theta_1 t$, et le second la parallèle nt à la génératrice lm qui a donné le point m, par la trace (n', n) de la seconde génératrice $k'm'n'$ du point (m, m'). La tangente est alors $(tm, t'm')$.

Points remarquables. — Les points sur le contour apparent vertical de l'ellipsoïde sont d'abord les extrémités $a'b'$ du grand axe de la méridienne, puis les points d' qui sont donnés par la génératrice horizontale située dans le méridien de front et qui passe par (c, c') ; elle donne les points d de la projection horizontale.

Les points sur le contour apparent horizontal sont sur la génératrice qui est dans le plan de l'équateur, et qui n'est autre que la perpendiculaire commune à G et à la génératrice verticale de la surface : ce sont les points (p, p') et (q, q').

La projection verticale de la courbe a un point double sur la génératrice de bout en h' ; les tangentes en ce point étant contenues dans le plan tangent au paraboloïde, qui est de bout puisqu'il passe par la génératrice (h, h'), sont les projections verticales des deux génératrices du système différent passant en chacun des points qui se projettent au point double. Nous obtenons l'une d'elles, par exemple celle qui correspond au point α, en menant sa projection horizontale αd parallèle à G, ce qui donne sa projection verticale $d'h'$.

La projection horizontale présente un point double en ab sur la génératrice verticale et pour la même raison que précédemment les tangentes en ce point sont les projections des deux génératrices horizontales qui passent en (a, a') et (b, b') et dont l'une est af.

La construction d'un point courant met en évidence la symétrie de la courbe par rapport à pq en projection horizontale et par rapport à $a'b'$ en projection verticale.

Ombre propre. — La courbe d'ombre propre sur l'ellipsoïde est la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement aux rayons lumineux, c'est-à dire la section par le plan diamétral conjugué de cette direction. On peut avoir en vraie grandeur le grand axe de l'ellipse section en faisant tourner le méridien parallèle aux rayons lumineux jusqu'à ce qu'il soit de front, et en lui menant les tangentes parallèles à ces rayons.

Nous obtenons ainsi la direction (L'_1, L_1) dont le diamètre conjugué $o'g'_1$ fait connaître, après rotation opposée, le point le plus haut g' et le point le plus bas de l'ellipse cherchée. Nous avons en même temps la longueur du diamètre conjugué de $o'g'$ qui est la projection verticale du diamètre horizontal or et se confond avec $o'p'$. On peut alors construire l'ellipse au moyen de ces deux diamètres conjugués, et la limiter aux points (β, β') et (γ, γ') où elle rencontre la courbe d'intersection des deux surfaces.

La courbe d'ombre propre sur le paraboloïde se détermine d'une manière analogue, en construisant sur les différentes génératrices le point de contact du plan tangent parallèle aux rayons lumineux. C'est un arc de parabole dont l'axe est horizontal et parallèle à G comme l'axe du paraboloïde lui-même et qui est limité aux points (η, η') et (δ, δ') où il coupe la courbe d'intersection des deux surfaces.

Ombre portée. — Sur le plan horizontal l'ombre portée se compose de trois arcs de courbe appartenant : 1° à la trace horizontale du cylindre dont la base est l'ellipse d'ombre propre ; 2° à la trace horizontale du cylindre dont la base est la parabole d'ombre propre ; 3° à la trace horizontale d'un troisième cylindre ayant pour directrice l'arc de courbe $(\gamma\delta, \gamma'\delta')$ et l'arc $(\beta\eta, \beta'\eta')$, ces trois surfaces cylindriques ayant leurs génératrices parallèles aux rayons lumineux. En chacun des points tels que (β, β') où leurs directrices se rencontrent, elles admettent d'ailleurs deux à deux le même plan tangent, car ce plan est le plan tangent à l'ellipsoïde en ce point, ou au paraboloïde s'il s'agit du point (δ, δ') par exemple. Donc les courbes d'ombre portée se raccordent sur le plan horizontal, et aussi sur le plan vertical.

Nous avons déterminé le point le plus en avant v_1 de l'ombre portée sur le plan horizontal en menant au cylindre elliptique le plan tangent parallèle à xy et pour cela nous avons déterminé l'intersection du plan de l'ellipse d'ombre propre avec le plan passant par xy et une parallèle aux rayons lumineux, puis nous avons mené la tangente à l'ellipse parallèle à cette intersection au point le plus en avant, ce qui a donné (v, v') dont l'ombre v_1 est le point cherché.

Nous avons procédé de la même manière pour obtenir le point le plus haut ϖ'_1 de la projection verticale, qui provient du point ϖ diamétralement opposé au point ϖ' sur l'ellipse.

Nous avons aussi construit les points tels que $(\varepsilon, \varepsilon')$, où l'ombre portée rencontre la ligne de terre, en menant les génératrices du cylindre correspondant — ici le cylindre elliptique — par les points d'intersection de sa base avec la droite $(\varepsilon\zeta, \varepsilon'\zeta')$ trouvée précédemment comme intersection de ce plan de base avec le plan parallèle aux rayons lumineux et passant par xy.

La distinction des parties vues et des parties cachées est immédiate : on remarque que l'arc $d'a'$ du contour apparent vertical à droite de l'ellipsoïde est enlevé tandis qu'il subsiste entre d' et d' à gauche.

QUESTIONS PROPOSÉES

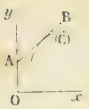
2231. — On donne une ellipse de centre O. On projette un point M quelconque de cette ellipse en P et Q sur les axes.

1° Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant pour centre P (ou Q), et M pour l'un des sommets réels.

2° Lieu du second point de rencontre L des deux hyperboles de cette espèce qui passent par M.

3° Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant son centre en M et un sommet réel en P (ou en Q).

Dr Werner Gaedecke.



2232. — Une barre homogène pesante AB de longueur $2l$ est située dans un plan vertical et s'appuie sur une courbe (C) de ce plan. L'extrémité A est assujettie à glisser sans frottement sur une verticale Oy du plan. Déterminer la courbe (C) de manière que la barre soit en équilibre quel que soit son point de contact avec la courbe (il n'y a pas frottement).

G. Lach.

BIBLIOGRAPHIE

Voici deux ouvrages qui ne peuvent manquer d'intéresser un grand nombre de nos lecteurs, et que je m'empresse de signaler à leur attention :

1° *Problèmes de Mécanique et cours de Cinématique; conférences faites en 1912*, par M. Guichard, professeur à la faculté des Sciences de Paris. Rédaction de MM. Dautry et Deschamps. — Librairie scientifique A. Hermann et fils, 6, rue de la Sorbonne. — *Prix : 6 fr.*

Ce petit ouvrage de 150 pages environ contient un assez grand nombre d'exercices très intéressants, avec leurs solutions.

Le premier chapitre est consacré à la cinématique plane; le second à la cinématique du corps solide; le troisième à la dynamique du point et à la géométrie des masses; le quatrième à la dynamique des systèmes et à la solution de problèmes donnés aux examens.

L'ouvrage se termine par un cours élégant et parfaitement clair de cinématique, où toutes les questions sont exposées brièvement, mais cependant complètement et avec beaucoup de netteté.

2° *Cours complet de Mathématiques spéciales : I. Algèbre et analyse*, par J. Haag, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont. — Gauthier-Villars, Paris. — *Prix : 9 fr.*

Cet ouvrage, très intéressant, rédigé avec un constant souci de la rigueur et de la concision, est cependant d'une grande clarté. Il est destiné aux élèves de Mathématiques spéciales, candidats aux grandes écoles, aux étudiants de Mathématiques générales, et enfin à ceux qui veulent aborder avec fruit l'étude des Mathématiques supérieures. C'est dire que les étudiants des deux premières catégories pourront laisser certaines questions de côté.

Cet ouvrage de 400 pages environ est accompagné d'un second volume d'exercices de 200 et quelques pages où l'auteur indique un grand nombre d'exercices et problèmes résolus ou non. Les lecteurs de la Revue y retrouveront l'élégance et l'ingéniosité qu'ils ont déjà admirées dans les problèmes pleins d'originalité et d'intérêt que M. Haag a bien voulu m'adresser pour eux.

E. H.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Mai 1914. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

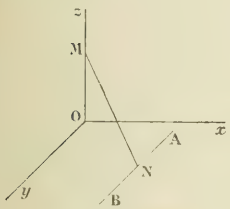
PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (*Cours préparatoires.*)

Concours de 1913.

Mathématiques.

2163. — *Soient trois axes rectangulaires* Oxyz, *et, dans le plan des* xy, *une droite* AB *parallèle à* Oy.



On considère les droites MN *qui s'appuient sur* Oz *et sur* AB *et qui font avec* Oz *un angle donné.*

1° *Trouver l'équation de la surface décrite par ces droites.*

2° *Dire la nature des sections de cette surface par des plans parallèles au plan des* yz.

3° *Trouver le lieu des asymptotes de ces sections.*

4° *Trouver le lieu des foyers de ces sections.*

Avant d'aborder la solution analytique de ce problème, quelques remarques s'imposent.

Par tout point de Oz, il passe évidemment deux droites MN : ce sont les deux génératrices d'un cône de révolution autour de Oz ayant pour demi-angle au sommet l'angle donné, α, et qui s'appuient sur AB. La droite Oz est donc une ligne double, deux nappes de la surface se coupent sur Oz.

Il est tout aussi aisé de montrer que AB est une autre ligne double de la surface.

La section faite par un plan passant par Oz se compose alors de deux fois Oz et de deux droites MN qui s'appuient sur AB au point de rencontre avec le plan. Le lieu de MN est donc une surface du quatrième ordre

1. Soient alors $x = a$, $z = 0$, les équations de la droite AB. Les coordonnées d'un point de Oz sont 0, 0, λ ; celles d'un point de AB, a, μ, 0. La droite MN, qui joint ces deux points, a donc pour équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{\mu} = \frac{z - \lambda}{-\lambda};$$

en exprimant qu'elle fait avec Oz un angle constant, α, nous avons

$$\frac{\lambda^2}{a^2 + \mu^2 + \lambda^2} = \cos^2 \alpha,$$

ou

$$\lambda^2 \sin^2 \alpha = (a^2 + \mu^2) \cos^2 \alpha.$$

L'élimination de λ et de μ entre cette relation et les équations de la droite est immédiate et donne

$$(1) \qquad (x - a)^2(x^2 + y^2) \cos^2 \alpha - x^2 z^2 \sin^2 \alpha = 0.$$

Telle est l'équation de la surface. Toutes les remarques que nous avons faites sont en évidence sur cette équation.

Nous voyons de plus que les directions asymptotiques sont données par $x^2 = 0$ et

$$(x^2 + y^2)\cos^2\alpha - z^2\sin^2\alpha = 0.$$

Ces dernières sont celles d'un cône de révolution autour de Oz et ayant pour demi-angle au sommet l'angle α. Ceci encore était évident a priori. On pouvait encore prévoir que le plan des yz est un plan double de directions asymptotiques, car en coupant la surface par le plan des yz ou par un plan parallèle mené par la droite AB, on ne trouve à chaque fois qu'une droite double à distance finie : il faut donc bien que la droite à l'infini de ce plan soit aussi une droite double de la surface.

2. En faisant $x = k$ dans l'équation (1), on obtient la courbe projetée sur le plan des yz,

$$k - a)^2 y^2 + k^2)\cos^2\alpha - k^2z^2\sin^2\alpha = 0.$$

C'est une hyperbole rapportée à ses axes, ayant pour axe transverse l'axe des z, pour axe imaginaire l'axe des y, et, pour asymptotes, les deux droites

$$(k - a)^2y^2\cos^2\alpha - k^2z^2\sin^2\alpha = 0.$$

3. Le lieu des asymptotes s'obtient en remplaçant k par x dans cette équation. C'est la surface du quatrième ordre

$$(x - a)^2y^2\cos^2\alpha - x^2z^2\sin^2\alpha = 0.$$

Cette surface se décompose en deux paraboloïdes hyperboliques symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des xy, et au plan des zx.

4. Les grandeurs des axes de cette hyperbole sont donnés par

$$A^2 = (k - a)^2\cot^2\alpha,$$
$$B^2 = k^2.$$

Les coordonnées des foyers sont données alors par

$$x = k, \qquad y = 0, \qquad z^2 = A^2 + B^2.$$

Le lieu de ces points est une courbe du plan des zx :

$$y = 0, \qquad z^2 = x^2 + (x - a)^2\cot^2\alpha.$$

C'est une hyperbole, ayant pour axe imaginaire Ox.

Bonnes solutions : MM. E. Rouge, à Sainte Barbe ; Betrézé-Cuil, à Toulouse ; L. Simon, à Fourmies ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Naucelle, à la Châtre ; Léon Beynie ; L. Troin ; M. Roux.
Assez bonnes solutions : MM. Ullmann, à Héricourt ; J. Chaize, à Paris ; G. Lach, à Douai.

2164. — *Soient, en axes rectangulaires, une courbe* C *et sa normale* MN *limitée à* Ox.

On mène par O *une droite* OR *égale et parallèle à* NM. *Déterminer la courbe* C *par la condition que le point* R *décrive une conique* Γ *ayant son sommet en* O *et son axe suivant* Ox.

On commencera par traiter le cas simple où la conique Γ *est une parabole. On prendra ensuite le cas général où la conique* Γ *est* $x = a \pm \sqrt{a^2 - my^2}$. *Discuter la forme de* C *suivant les valeurs de* a *et de* m.

Si l'on désigne par x l'abscisse d'un point courant sur la courbe (C) et que l'on prenne ce nombre pour variable indépendante, l'équation de la normale en ce point courant (x, y) sera

$$X - x + y'(Y - y) = 0,$$

et les composantes du vecteur OR, équipollent à NM, seront $-yy'$ et y ; ce sont aussi les coordonnées du point R.

Exprimons d'abord que le point R décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$; nous aurons

$$y^2 + 2pyy' = 0.$$

Cette équation admet d'abord la solution $y = 0$, qui est évidemment une solution exceptionnelle ; pour cette solution les deux composantes de NM sont toujours nulles et le point R est bien sur la parabole, mais il est toujours au point O. Une fois cette solution supprimée, l'équation devient

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{2p},$$

et la solution la plus générale qu'elle admet est

$$y = Ce^{-\frac{x}{2p}}.$$

Toutes ces courbes sont des courbes exponentielles ; elles se déduisent toutes de l'une d'elles par des translations parallèles à Ox et par symétrie relativement à cet axe ; car leur équation peut toujours s'écrire

$$y = \pm e^{-\frac{x_0 - x}{2p}}.$$

Supposons maintenant que la conique ait pour équation

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - my^2};$$

l'équation différentielle de la courbe C sera alors

$$-yy' = a + \sqrt{a^2 - my^2},$$

et, en posant $a^2 - my^2 = z^2$, elle deviendra

$$\frac{zz}{m} = a \pm z$$

Les deux équations différentielles qui correspondent aux deux signes se déduisent l'une de l'autre par le changement de z en $-z$, et ceci n'a aucune importance si on prend z comme variable paramétrique indépendante. Prenons le signe $+$; nous aurons alors

$$\frac{zdz}{z+a} = mdx,$$

puis,

$$m(x - x_0) = z - aL\left|\frac{z+a}{a}\right|.$$

Faisons subir à cette courbe une translation parallèle à Ox, d'amplitude $-x_0$; elle aura alors pour équation paramétrique

$$mx = z - aL\left|\frac{z+a}{a}\right|,$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{m}}.$$

Changeons a en $-a$; nous voyons alors qu'en changeant z en $-z$, x se change en $-x$, pourvu, bien entendu, que m reste invariable, et y ne change pas. Les deux courbes correspondantes sont donc symétriques par rapport à Oy. Dès lors nous supposerons a positif.

Il y a évidemment deux cas généraux à étudier suivant que m est positif ou négatif.

1er Cas : $m > 0$. Alors z ne peut varier que de $-a$ à $+a$; dans cet intervalle, $z + a$ est positif et la valeur de x est

$$x = \frac{1}{m}\left[z - aL\frac{z+a}{a}\right].$$

Pour $z = -a$, x est égal à $+\infty$, y est nul ; pour $z = 0$, x est nul, y est égal à $\frac{a}{\sqrt{m}}$; pour $z = a$, $x = \frac{a}{m}(1 - L2)$, $y = 0$.

Les variations de $|y|$ sont évidentes ; $|y|$ croît d'abord de 0 à a, puis, décroît de a à 0. Celles de x découlent de l'étude de la dérivée

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{m}\frac{z}{z+a};$$

de $-a$ à 0, x décroît ; il croît ensuite. Le point qui correspond à $z = a$ est donc un point de rebroussement ; le coefficient angulaire de la tangente en ce point est $-\sqrt{m}$.

Une fois l'arc CAB tracé, la courbe s'achève par symétrie par rapport à Ox (*fig.* 1).

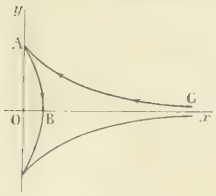


Fig. 1.

2e *Cas* : $m < 0$. Alors z varie de $-\infty$ à $-a$ et de $+a$ à $+\infty$. Dans le premier intervalle, les équations paramétriques de la courbe sont

$$x = \frac{1}{m}\left[z - aL\frac{z-a}{-a}\right], \qquad y = \pm\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{m}},$$

ou, en posant $m = -m'$,

$$x = \frac{1}{m'}\left[aL\frac{z+a}{-a} - z\right], \qquad y = \pm\sqrt{\frac{z^2 - a^2}{m'}}.$$

Dans le second intervalle, ce sont

$$x = \frac{1}{m'}\left[aL\frac{z+a}{a} - z\right],$$

$$y = +\sqrt{\frac{z^2 - a^2}{m'}}.$$

Etudions encore ici comme dans le cas précédent la valeur positive de y.

Pour $z = -\infty$, x et y sont égaux à $+\infty$; pour $z = -a - \varepsilon$, x est égal à $-\infty$, y est nul. Les fonctions x et y sont d'ailleurs toujours décroissantes, comme le montrent de suite les deux dérivées

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{z}{m'(z+a)}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{z}{m'y}.$$

Le coefficient angulaire de la direction asymptotique est la limite de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z+a}{y},$$

pour $z = -\infty$; il est égal à $\sqrt{m'}$.

La fonction $y - x\sqrt{m'}$, qui est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{m'}}\left[\sqrt{z^2 - a^2} + z - aL\frac{z+a}{-a}\right],$$

devient égale à $-\infty$ pour $z = -\infty$, puisque la partie

$$\frac{1}{\sqrt{m'}}(\sqrt{z^2 - a^2} + z)$$

a pour limite 0, et la branche infinie correspondante est une branche parabolique.

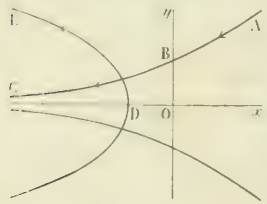


Fig. 2.

Pour $z = a$, $x = \frac{a}{m'}(L2 - 1)$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$; la nouvelle branche part d'un point D situé sur Ox' et y est tangente à une parallèle à Oy.

Pour $z = +\infty$, x est égale à $-\infty$, y à $+\infty$ et $\frac{dy}{dx}$ à $-\sqrt{m'}$. La branche infinie correspondante est encore une branche parabolique.

Il est alors facile de tracer les deux arcs de courbe, ABC et DE,

qui correspondent aux deux intervalles et aux valeurs positives de y. La courbe s'achève ensuite par symétrie.

Assez bonnes solutions : MM. Beribbezé-Culi, lycée de Toulouse ; L. Simon, à Fourmies ; L. Naucelle, à la Châtre

---

2165. — *Un point se meut de telle façon que sa vitesse varie proportionnellement au rayon vecteur r issu d'un centre fixe, et que son accélération passe par ce centre. Exprimer, en fonction du temps, le rayon r et l'angle qu'il forme avec une direction fixe. Déterminer la trajectoire. Calculer, en fonction de r, la grandeur de l'accélération totale, celle de l'accélération centripète, celle du rayon de courbure. Trouver enfin l'hodographe.*

Pour traiter cette question, nous prendrons des coordonnées polaires ; le centre des forces sera le pôle, une demi-droite passant par ce point, l'axe polaire, et nous orienterons le plan dans le sens du mouvement. Le mouvement est alors défini par les circonstances initiales qui sont : les coordonnées polaires θ_0 et r_0 de la position initiale A, la vitesse initiale v_0, et l'angle α_0 qu'elle fait avec le rayon vecteur ; puis enfin par la relation donnée $v = kr$.

Si nous écrivons que le carré de la vitesse est égal à k^2r^2, nous aurons

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = k^2r^2 ;$$

d'autre part, nous avons l'équation des aires

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C.$$

Au départ, nous avons $v_0 = kr_0$, ce qui donne k, s'il n'est pas donné autrement; C est donné par le moment de la vitesse initiale par rapport au point O. On a :

$$C = r_0 v_0 \sin \alpha_0.$$

Nous savons d'ailleurs que C est positif, parce que $\frac{d\theta}{dt}$ est positif d'après le choix du sens des angles ; nous garderons la constante C.

Pour avoir le rayon vecteur en fonction du temps, nous éliminons l'angle θ, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$, et nous aurons

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = k^2r^2,$$

puis

$$\frac{rdr}{dt} = \sqrt{k^2r^4 - C^2}.$$

Nous nous placerons dans le cas où le rayon vecteur croît à partir de la position initiale ; alors $\frac{dr}{dt}$ est positif et le radical sera pris avec le signe plus. Il serait tout aussi facile d'étudier l'autre cas.

En séparant les variables, nous aurons alors

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{k^2r^4 - C^2}}.$$

Posons $u = kr^2$; nous aurons

$$du = 2krdr,$$

et, par suite,

$$dt = \frac{1}{2k} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - C^2}}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$2k(t - \tau) = L\frac{u + \sqrt{u^2 - C^2}}{C},$$

τ étant une constante qui est à déterminer.

Nous tirons de là $$u + \sqrt{u^2 - C^2} = Ce^{2k(t-\tau)};$$
le produit par la quantité conjuguée donne C^2; on peut donc écrire
$$u - \sqrt{u^2 - C^2} = Ce^{-2k(t-\tau)}$$
et par suite, $$u = C \operatorname{ch} 2k(t-\tau); \qquad \text{d'où} \qquad r^2 = \frac{C}{k} \operatorname{ch} 2k(t-\tau).$$

Telle est l'expression de r en fonction du temps. Pour déterminer τ, on écrira qu'au temps t_0, r est égal à r_0.

Nous avons à déterminer θ en fonction du temps. Pour cela nous partirons de
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{k}{\operatorname{ch} 2k(t-\tau)}.$$
Pour intégrer cette expression, j'exprime le cosinus hyperbolique en fonction de l'argument moitié et j'ai
$$d\theta = \frac{kdt}{\operatorname{ch}^2 k(t-\tau) + \operatorname{sh}^2 k(t-\tau)}.$$
Divisons haut et bas par $\operatorname{ch}^2 k(t-\tau)$, nous aurons $d\theta = \dfrac{dw}{1+w^2}$ en posant $w = \operatorname{th} k(t-\tau)$;
ceci nous donne $\theta - \alpha = \operatorname{arc\,tg} w$ et, par suite, $w = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \operatorname{th} k(t-\tau)$.

Ces deux relations nous donnent, aussi bien l'une que l'autre, la valeur de θ en fonction du temps.

Si nous voulons calculer α, nous exprimerons que pour $t = t_0$, on a $\theta = \theta_0$. Nous garderons la constante α.

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut remplacer, dans l'expression de r^2, la tangente hyperbolique par sa valeur. Or
$$r^2 = \frac{C}{k} \frac{\operatorname{ch}^2 k(t-\tau) + \operatorname{sh}^2 k(t-\tau)}{\operatorname{ch}^2 k(t-\tau) - \operatorname{sh}^2 k(t-\tau)} = \frac{C}{k} \frac{1+w^2}{1-w^2}.$$
Or $w = \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$; donc
$$r^2 = \frac{C}{k} \frac{1}{\cos 2(\theta - \alpha)}.$$

Ceci est l'équation de la trajectoire ; on reconnaît tout de suite une conique, une hyperbole équilatère.

Calculons maintenant l'accélération totale ; pour cela nous n'avons qu'à appliquer le théorème des forces vives, qui nous donne $$d\frac{mv^2}{2} = m\gamma dr,$$
puisque la force est centrale,
ou $$d\frac{k^2r^2}{2} = \gamma dr, \qquad \text{et} \qquad \gamma = k^2 r.$$

Ainsi l'accélération indique une répulsion proportionnelle à la distance.

L'accélération tangentielle est
$$\gamma' = \frac{dv}{dt} = \frac{dkr}{dt} = \frac{kdr}{dt}.$$

Pour calculer cette expression, revenons à l'expression du rayon vecteur. Nous aurons
$$2r\frac{dr}{dt} = \frac{C}{k} 2k \operatorname{sh} 2k(t-\tau).$$
Il reste $$\frac{dr}{dt} = \frac{C}{r} \operatorname{sh} 2k(t-\tau).$$
Or $$\operatorname{sh} 2k(t-\tau) = \sqrt{\operatorname{ch}^2 2k(t-\tau) - 1} = \sqrt{\frac{k^2r^2}{C^2} - 1}; \quad \text{par conséquent}$$
$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k^2r^2 - C^2}{r^2}} = \sqrt{k^2r^2 - \frac{C^2}{r^2}} \qquad \text{et} \qquad \gamma' = k\sqrt{k^2r^2 - \frac{C^2}{r^2}}.$$
Nous savons maintenant que $\gamma'^2 + \gamma_n^2 = \gamma^2$; par conséquent
$$\gamma_n^2 = \frac{k^2C^2}{r^2} \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = \frac{kC}{r}.$$

Il est facile d'avoir le rayon de courbure, en partant de la formule $\frac{v^2}{\rho} = \gamma_n$, ce qui donne

$$\frac{k^2r^2}{\rho} = \frac{kC}{r} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{k}{C}r^3.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel au cube du rayon vecteur.

Pour trouver l'hodographe, il suffit de remarquer que la vitesse est parallèle au diamètre conjugué de OM, et, comme dans l'hyperbole équilatère, la longueur du diamètre imaginaire est égale à ri, le lieu de l'extrémité du vecteur équipollent à la vitesse, qui a pour longueur kr, s'obtient en multipliant ri par $\frac{k}{i}$. Ce lieu est donc homothétique de l'hyperbole dans le rapport $\frac{k}{i}$ ou de l'hyperbole conjuguée dans le rapport k. L'hodographe est donc aussi une hyperbole équilatère.

Pour trouver l'hodographe par le calcul, il n'y a qu'à remarquer que les coordonnées polaires d'un point de l'hodographe sont $\rho = kr$, $\omega = \theta + V$, avec $\operatorname{tg} V = \frac{rd\theta}{dr}$.

Or
$$r^2 = \frac{C}{k}\operatorname{ch} 2k(t-\tau), \qquad r\frac{dr}{dt} = C\operatorname{sh} 2k(t-\tau)$$

et
$$r\frac{dr}{d\theta} = \frac{C\operatorname{sh} 2k(t-\tau)}{\frac{d\theta}{dt}} = r^2\operatorname{sh} 2k(t-\tau);$$

donc
$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\operatorname{sh} 2k(t-\tau)} = \frac{\operatorname{ch}^2 k(t-\tau) - \operatorname{sh}^2 k(t-\tau)}{2\operatorname{sh} k(t-\tau)\operatorname{ch} k(t-\tau)}, \qquad r\frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg} V = \frac{1-w^2}{2w}.$$

D'autre part, $\omega - \alpha = \theta - \alpha + V$, $\quad \operatorname{tg}(\omega - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\theta-\alpha) + \operatorname{tg} V}{1 - \operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg} V}$,

$$\operatorname{tg}(\omega - \alpha) = \frac{w + \frac{1-w^2}{2w}}{1 - \frac{1-w^2}{2}} = \frac{1}{w} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta-\alpha)}.$$

On a ensuite
$$r^2 = \frac{C}{k}\,\frac{\cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha)}{\cos^2(\theta-\alpha) - \sin^2(\theta-\alpha)} = \frac{C}{k}\,\frac{1+w^2}{1-w^2},$$

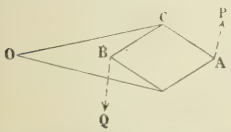
$$r^2 = -\frac{C}{k\cos 2(\omega-\alpha)},$$

et, comme $r = \frac{\rho}{k}$,
$$\rho^2 = \frac{-Ck}{\cos 2(\omega-\alpha)}.$$

Telle est l'équation polaire de l'hodographe. Elle représente bien une hyperbole équilatère.

Bonnes solutions : MM. P. Margaud, élève à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne ; Bethbézé-Culi, lycée de Toulouse ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; G. Lach, à Douai.

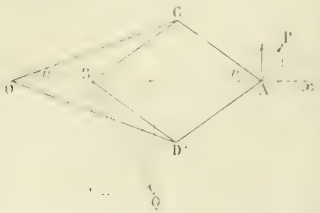
2166. — *Sur un plan horizontal parfaitement poli repose un système de six tiges dont quatre constituent un losange* ABCD, *tandis que les deux autres,* OC *et* OD, *égales entre elles, peuvent tourner autour du point fixe* O. *Des articulations placées aux divers points d'assemblage permettent au système de se déformer librement. On applique en* A, *dans le plan de la figure, une force donnée* P, *et l'on demande quelle force* Q *il faut en même temps appliquer en* B *pour que ce système demeure en équilibre.*



Calculer les tensions des six tiges.

[*On admet que la présence de chaque tige équivaut à deux forces, égales et opposées appliquées à ses deux extrémités, et l'on appelle tension de la tige la valeur commune de ces forces*]

La figure est évidemment symétrique par rapport à la droite OAB. Nous prendrons cette droite pour axe des x, et, pour axe des y, la perpendiculaire à cette droite menée par le point O. Nous désignerons par $2u$ l'angle des tiges OC et OD, par $2v$ l'angle des tiges AC et AD et nous nous placerons dans le cas de figure où OC est plus grand que AC, c'est-à-dire $u < v$.



Appelons X et Y les composantes données de la force P et X′, Y′ celles inconnues de la force Q. Les cosinus directeurs de la direction AC sont $-\cos v$ et $\sin v$; ceux de AD, $-\cos v$ et $-\sin v$. Si nous appelons T la valeur algébrique de la tension le long de AC et T′ celle de la tension le long de AD, les composantes de ces forces seront $-T\cos v$, $T\sin v$ et $-T'\cos v$, $-T'\sin v$; les deux équations d'équilibre du point A donnent donc

$$-\cos v(T+T') = X, \qquad \sin v(T-T') = Y;$$

par suite,

$$2T = -\frac{X}{\cos v} + \frac{Y}{\sin v}, \qquad 2T' = -\frac{X}{\cos v} - \frac{Y}{\sin v};$$

ce sont les tensions le long de AC et de AD.

De même, au point B, en appelant T_1 et T'_1, les tensions le long de BC et de BD,

$$T_1 + T'_1 = \frac{X'}{\cos v}, \qquad T_1 - T'_1 = \frac{Y'}{\sin v},$$

et

$$2T_1 = \frac{X'}{\cos v} + \frac{Y'}{\sin v}, \qquad 2T'_1 = \frac{X'}{\cos v} - \frac{Y'}{\sin v}.$$

Au point C, les deux forces T et T_1 se réduisent à une force unique qui doit avoir la direction OC ou CO; les composantes de cette force sont

$$-T\cos v + T_1\cos v = -\frac{1}{2}(Y\cot v - X) + \frac{1}{2}(Y'\cot v + X'),$$

$$T\sin v + T_1\sin v = \frac{1}{2}(Y - X\operatorname{tg} v) + \frac{1}{2}(Y' + X'\operatorname{tg} v);$$

le rapport de ces composantes doit être égal à $\operatorname{tg} u$, ce qui donne une première équation linéaire entre X′ et Y′:

$$\frac{Y' + X'\operatorname{tg} v + Y - X\operatorname{tg} v}{Y'\cot v + X' + X - Y\cot v} = \operatorname{tg} u,$$

$$(Y' + X'\operatorname{tg} v)(\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u) = (X\operatorname{tg} v - Y)(\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} u).$$

Au point D, les deux forces T′ et T'_1 ont de même pour résultante une force qui doit être dirigée suivant OD, et dont les composantes sont

$$-T'\cos v + T'_1\cos v = \frac{1}{2}(X + Y\cot v) + \frac{1}{2}(X' - Y'\cot v),$$

$$-T'\sin v - T'_1\sin v = \frac{1}{2}(Y + X\operatorname{tg} v) + \frac{1}{2}(Y' - X'\operatorname{tg} v);$$

le rapport des deux doit être égal à $\operatorname{tg} u$:

$$\frac{Y' - X'\operatorname{tg} v + Y + X\operatorname{tg} v}{X'\operatorname{tg} v - Y' + X\operatorname{tg} v + Y} = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} v},$$

$$(Y' - X'\operatorname{tg} v)(\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u) = -(X\operatorname{tg} v + Y)(\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} u).$$

Ces équations linéaires en X′ et Y′ donnent de suite X′ et Y′ :

$$X'(\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u) = X(\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} u),$$

$$Y'(\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u) = -Y(\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} u).$$

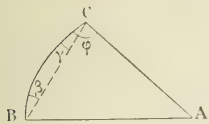
Nous voyons au surplus que $\frac{Y'}{X'} = -\frac{Y}{X}$, ce qui montre que, sur la figure, ζ est égal à $-z$.

Il reste à calculer T_1 et T'_1, ainsi que les composantes le long de OC et de OD, ce qui est facile.

Bonnes solutions : MM. F. Margand, élève à l'École des Mines de St-Etienne ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; G. Lach et A. Rousseau.

Calcul.

2167. — *Dans la figure* ABC, *on donne :*



$$AB = 252^m,35$$
$$AC = 195^m,28$$
$$\widehat{A} = 31^\circ,4265$$

La courbe BC *est un arc de parabole ayant* B *pour sommet et* BA *pour axe.*

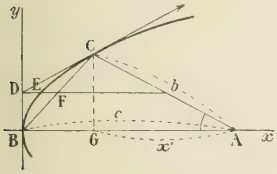
Calculer :

1° *La surface* ABC ;

2° *L'angle* φ *que fait en* C *l'arc de parabole avec la droite* AC ;

3° *Les angles* β *et* γ *que fait en* B *et* C *l'arc de parabole avec la corde* BC.

Axes de coordonnées : Bx et By, Bx coïncidant avec BA.



Notations :

$b = 195^m,28$, $c = 252^m,35$, $A = 31^\circ 42' 65''$,

x et y coordonnées de C, et $x' = GA = b \cos A$.

Nous avons de suite :

$$x = c - x', \qquad y = b \sin A, \qquad y^2 = 2px,$$

$$p = \frac{y^2}{2x}.$$

Calcul de x et y.

$$\log \sin 31^\circ 42' = \bar{1},67555 \qquad \Delta = 13$$
$$65'' \qquad 8$$
$$\log \sin A = \bar{1},67563$$

$$\log \cos 31^\circ 43' = \bar{1},94477 \qquad \Delta = 1$$
$$35'' \qquad 1$$
$$\log \cos A = \bar{1},94478$$

$$\log 195,2 = 2,29048 \qquad \Delta = 22$$
$$8 \qquad 18$$
$$\log b = 2,29066$$

$$2,29066$$
$$\bar{1},67563$$
$$\log y = 1,96629 \qquad \Delta = 5$$
$$1,96628 \qquad 92,53$$
$$1 \qquad 2$$
$$y = 92,532$$

$$\begin{array}{rl} & 2{,}29066 \\ & \bar{1}{,}94478 \\ \hline \log x = & 2{,}23544 \\ & 2{,}23528 \\ \hline & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 171{,}9 \\ 6 \\ \hline x' = 171{,}96 \end{array} \qquad \Delta = 25$$

$$\begin{array}{r} c = 252{,}35 \\ x' = 171{,}96 \\ \hline x = 80{,}39 \\ \log x = 1{,}90520 \end{array}$$

1. *Aire* ABC. DF $= \frac{x}{2}$. Triangle DBC $= \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4}$; Aire BFCEB $= \frac{2}{3}$ tr. DBC $= \frac{xy}{6}$; Tr. ABC $= \frac{cy}{2} = \frac{3cy}{6}$.

L'aire demandée ABC est donc $A = \frac{y}{6}(x + 3c) = \frac{yz}{6}$;

$$z = x + 3c \qquad x = 80.39$$
$$c = 252{,}35, \qquad 3c = 757{,}05$$
$$z = 837.44$$

$$\begin{array}{rl} \log 837{,}4 = & 2{,}92293, \\ 4 & 2 \\ \hline \log z = & 2{,}92295 \\ \log b = & 0{,}77815 \\ \text{colog } b = & \bar{1}{,}22185 \end{array} \qquad \Delta = 5$$

$$\begin{array}{r} 2{,}92295 \\ 1{,}96629 \\ \bar{1}{,}22185 \\ \hline \log A = 4{,}11109 \\ 4{,}11093 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12910 \\ 5 \\ \hline A = 12915^{m^2} \end{array} \qquad \Delta = 33$$

2. *Calcul de* φ. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m' - m}{1 + mm'}$. m coeff^t ang. de DC, m' coeff^t ang. de AC: $m = \frac{p}{y} = \frac{y}{2x}$, $m' = -\operatorname{tg} A$, posons $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{2x}$; alors

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} \theta} = -\operatorname{tg}(\theta + A).$$

Donc $\varphi = 200 - A - \theta$

$$\begin{array}{rl} \log y = & 1{,}96629 \\ \text{colog } x = & \bar{2}{,}09480 \\ \text{colog } 2 = & \bar{1}{,}69897 \\ \hline \log \operatorname{tg} \theta = & \bar{1}{,}76006 \\ & \bar{1}{,}75997 \\ \hline & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33^\circ 24' \\ 54'' \\ \hline \theta = 33^\circ 24' 54'' \\ A = 31^\circ 42' 65'' \\ \hline \theta + A = 64^\circ 67' 19'' \end{array} \qquad \Delta = 16$$

$$\varphi = 200 - 64{,}6719 = 135^\circ 32' 81''$$

3. *Calcul des angles* β *et* γ.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cot\beta=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned}\log x &= 1{,}90520\\ \operatorname{colog} y &= \bar{2}{,}03371\\ \hline \log\operatorname{tg}\beta &= \bar{1}{,}93891\\ &\ 1{,}93881\\ \hline &\ \ 10\end{aligned}\qquad \Delta = 14$$

$$\begin{aligned}&45^\circ 53'\\ &71''\\ \hline \beta &= 45^\circ 53' 71''\end{aligned}$$

L'angle de Ox avec BC est donc

$$100 - 45^\circ 53' 71'' = 54^\circ 46' 29''.$$

L'angle de DC avec Ox est donné par $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{2x}$; il a été calculé :

$$\theta = 33^\circ 24' 54''.$$

L'angle γ est donc

$$\gamma = 54^\circ 46' 29'' - 33^\circ 24' 54'' = 21^\circ 21' 75''.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

2233. — *a*) On considère une courbe (C) rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, et dans laquelle le rayon de courbure R en un point, la longueur N de la normale limitée à Ox, et l'angle θ de la tangente avec ce même axe sont liés par la relation

$$(1)\qquad N - R = 4a\cos^2\theta,$$

a étant une longueur donnée. On sait de plus que, pour $\theta = 0$, la normale coïncide avec Oy et que l'on a

$$N_0 = -2a.$$

1. Trouver les coordonnées d'un point de C en fonction de θ et construire la courbe.

2. Quelle courbe (Γ) faut-il faire rouler sur Ox pour qu'un de ses points décrive (C) ? — Cette courbe (Γ) a un axe de symétrie Δ et un point double A. Trouver, dans le mouvement de roulement, les enveloppes (E) et (E') de Δ et de la perpendiculaire Δ' élevée en A à Δ.

3. Construire graphiquement la courbe roulante dans une de ses positions successives quelconques.

b) Montrer que, quelle que soit la relation entre R, N et θ, la recherche de la courbe (C) peut toujours se ramener à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à des quadratures.

Etudier succinctement le cas $R = (k+1)N$.

P. P.

2234. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° Former l'équation de la surface (Σ) engendrée par un cercle (C) de rayon constant a, s'appuyant sur les deux bissectrices de l'angle xOy, de manière que son plan soit parallèle au plan yOz. En déduire une représentation paramétrique en posant $x = a\cos u$, $y = a\cos v$.

2° Etudier les contours apparents de la surface sur les plans de projections et les sections faites parallèlement à ces plans.

3° Mettre en évidence un nouveau mode de génération de la surface par un cercle.

4° Trouver le lieu des points de (Σ) par où passent deux cercles de cette surface s'y coupant sous un angle donné θ.

5° Trajectoires orthogonales des cercles de la surface appartenant à l'un des systèmes.

6° Démontrer que les lignes asymptotiques de (Σ) peuvent être définies par la relation suivante entre les paramètres u et v :

$$\pm 2(\sin u - \sin v) = \operatorname{ch}\alpha\,(1 + \sin u\sin v) + \operatorname{sh}\alpha\cos u\cos v,$$

α étant une constante arbitraire.

J. Lebel, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

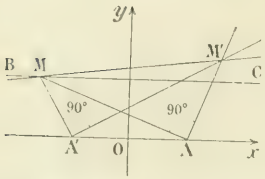
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1913.

Géométrie analytique.

2177. — *Soient deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy : sur Ox, un point A d'abscisse positive donnée a et un point A′ d'abscisse négative $-a$. On considère la droite BC dont l'équation est $y - a = 0$, et un point M d'abscisse λ sur cette droite. On mène la droite MA et, en A, la perpendiculaire AM′ à AM ; puis la droite MA′ et, en A′, la perpendiculaire A′M′ à MA′. On demande de résoudre, dans l'ordre que l'on voudra, les deux questions suivantes :*



1° Lorsque λ varie, trouver et construire le lieu du point M′ ;

2° Exprimer en fonction de λ les coordonnées du point de contact de la droite MM′ avec son enveloppe, et construire cette enveloppe en faisant varier λ.

1. Le point M est le point de rencontre des rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets A et A′ : il engendre donc une conique passant par les points A et A′, admettant comme tangentes en ces points les droites PA, PA′ perpendiculaires aux diagonales D′A et DA′ du rectangle ADD′A′ ; l'axe des y est visiblement axe de symétrie. Enfin le point M′ ne peut aller à l'infini que dans cette direction Oy, lorsque le point M est lui-même rejeté à l'infini sur la droite BC. Le lieu est donc une parabole dont l'axe est Oy ; le paramètre (sous-normale) est $OI = \frac{a}{2}$ et le sommet est S, milieu de OP ($OP = 2a$, $OS = a$).

Ces résultats se trouvent aisément par le calcul. Les coordonnées de M étant λ et a, le coefficient angulaire de AM est $\frac{a}{\lambda - a}$, celui de AM′ $-\frac{\lambda - a}{a}$ et l'équation de AM′ est

$$ay + (\lambda - a)(x - a) = 0;$$

celle de A′M′ est de même

$$-ay + (\lambda + a)(x + a) = 0.$$

Les coordonnées du point M′ sont $x = -\lambda$, $y = \frac{\lambda^2 - a^2}{a}$ et le lieu de ce point est la parabole $x^2 - ay - a^2 = 0$.

2. La droite MM′ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & a & 1 \\ -\lambda & \frac{\lambda^2 - a^2}{a} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$(2a^2 - \lambda^2)x - 2a\lambda y + \lambda^3 = 0.$$

Le point de contact de cette droite avec son enveloppe est le point de rencontre avec la droite

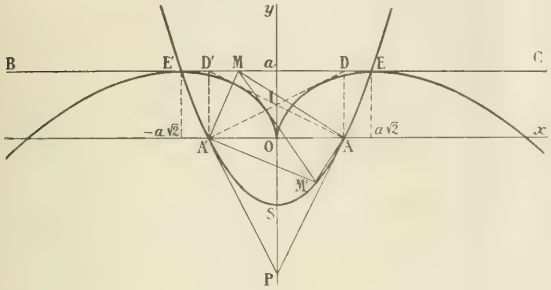
$$-2\lambda x - 2ay + 3\lambda^2 = 0;$$

il a pour coordonnées $x = \frac{2\lambda^2}{2a^2 - \lambda^2}$, $y = \frac{\lambda^2(6a^2 - \lambda^2)}{a(2a^2 + \lambda^2)}$.

Si dans ces formules, on change λ en $-\lambda$, x se change en $-x$, y ne change pas ; la courbe enveloppe est donc elle aussi symétrique par rapport à Oy ; il suffit pour la discuter de faire varier λ de 0 à $+\infty$.

La dérivée de x, $\dfrac{dx}{d\lambda} = \dfrac{16a^2\lambda^2 + 2\lambda^4}{(2a^2+\lambda^2)^2}$ est toujours positive ; x croît donc constamment de 0 à $+\infty$.

La dérivée de y, $\dfrac{dy}{d\lambda} = \dfrac{1}{2a}\,\dfrac{2\lambda(12a^4 - 4a^2\lambda^2 - \lambda^4)}{(2a^2+\lambda^2)^2}$ commence par être positive, s'annule pour $\lambda = a\sqrt{2}$ ($x = a\sqrt{2}$, $y = a$), puis devient négative ; y croît depuis 0 jusqu'à un maximum égal à a, puis décroît jusqu'à $-\infty$.



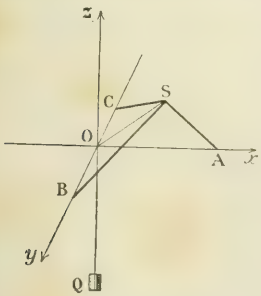
On en déduit aisément la forme de la courbe. — Le point O est un point de rebroussement et la tangente en ce point est Oy ; les branches infinies sont paraboliques dans la direction Oy ; enfin les points où la tangente est parallèle à l'axe des x sont précisément les points de rencontre E, E' de la courbe enveloppe avec la parabole lieu du point M.

P. L.

Bonnes solutions de MM. E.-N. Barisien ; A. Berlande, école normale de Saint-Cloud ; E. Dion, école normale de Saint-Cloud ; H. Japhet, collège Chaptal ; G. Lach, à Douai ; A. Le Marchand, Paris ; Marescalchi ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Roux, le Creusot ; Topin, à Grandvilliers ; M. Ullmann, 47e d'artillerie à Héricourt.

Mécanique.

2178. — *Soient trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *dont l'un* Oz *est vertical et dirigé positivement en sens contraire de la pesanteur. On donne, sur* Ox, *le point* A *d'abscisse positive* a ; *sur* Oy, *le point* B *d'ordonnée positive* $\frac{a}{2}$ *et le point* C *d'ordonnée négative* $-\frac{a}{3}$. *Soit, en outre, un point* S *de coordonnées* $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{a}{2}$. *On considère trois barres* SA, SB, SC, *rectilignes, homogènes, de poids respectifs connus* P, P', P'' *et dont on néglige les épaisseurs. Elles sont soudées en* S *et forment un trièdre de figure invariable qui s'appuie sur le plan* xOy, *supposé non-déformable, aux points* A, B, C. — *Au point* S *est attaché un cordon de poids négligeable qui passe en* O, *sans frottement, sur une petite poulie fixe que l'on supposera réduite à ce point* O. *Ce fil est tendu par un poids* Q. *Il n'y a pas de frottement en* B *et en* C, *mais il y a en* A *un frottement coefficient* $f = 1$.



Trouver en fonction de P, P', P'', *la plus grande valeur de* Q *pour laquelle le trièdre peut rester en équilibre dans la position donnée et, pour cette valeur de* Q, *calculer les réactions du plan* xOy *en* B *et en* C.

Effectuer les calculs à un gramme près, sachant que $a = 60^{cm}$ *et qu'un centimètre de longueur de chaque barre pèse* 10^g.

Le fil SO étant tendu par le poids Q, l'action du fil sur le point S équivaut à une force Q dirigée suivant SO. Désignons par R (de composantes R_x, R_y, R_z) la réaction du plan horizontal en A, par R′ et R″ les réactions (normales au plan) en B et C. Nous aurons les projections et les moments par le tableau suivant :

	x	y	z	X	Y	Z	L	M	N
P	$3\frac{a}{4}$	0	$\frac{a}{4}$	0	0	$-P$	0	$P\frac{3a}{4}$	0
P	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$	0	0	$-P'$	$-P'\frac{a}{4}$	$P'\frac{a}{4}$	0
P	$\frac{a}{4}$	$-\frac{a}{6}$	$\frac{a}{4}$	0	0	$-P''$	$P''\frac{a}{6}$	$P''\frac{a}{4}$	0
R	a	0	0	R	R_y	R_z	0	$-R_z a$	$R_y a$
R′	0	$\frac{a}{2}$	0	0	0	R′	$R'\frac{a}{2}$	0	0
R″	0	$-\frac{a}{3}$	0	0	0	R″	$R''\frac{a}{3}$	0	0
Q	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	$-\frac{Q}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{Q}{\sqrt{2}}$	0	0	0

d'où les six équations d'équilibre :

(1) $$R_z - \frac{Q}{\sqrt{2}} = 0,$$

(2) $$R_y = 0,$$

(3) $$-P - P' - P'' + R_x + R' + R'' - \frac{Q}{\sqrt{2}} = 0,$$

(4) $$P'\frac{a}{4} + P''\frac{a}{6} + R'\frac{a}{2} - R''\frac{a}{3} = 0,$$

(5) $$P\frac{3a}{4} + P'\frac{a}{4} + P''\frac{a}{4} - R_z a = 0,$$

(6) $$R_y a = 0.$$

Des équations (1), (2), (5) et (6), on déduit

$$R_y = 0 \text{ (évident à priori)},$$

$$R_z = \frac{Q}{\sqrt{2}},$$

$$R_x = \frac{3P + P' + P''}{4}.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut et il suffit que la réaction R au point A ne soit pas extérieure au cône de frottement en ce point, c'est-à-dire que $\left|\frac{R_x}{R_z}\right| \leqq f = 1$, et, par conséquent,

$$Q \leqq \frac{\sqrt{2}}{4}(3P + P' + P'').$$

$\frac{\sqrt{2}}{4}(3P + P' + P'')$ est la plus grande valeur de Q pour laquelle le trièdre peut rester en équilibre. Si cette valeur est dépassée, le trièdre SABC glissera sur le plan horizontal

Calculons les réactions pour cette valeur limite de Q ; il nous reste les équations (3) et (4) qui deviennent, pour $Q = \frac{\sqrt{2}}{4}(3P + P' + P'')$,

$$R' + R'' = P + P' + P'',$$

$$3R' - 2R'' = \frac{3}{2}P' - P'';$$

d'où

$$R' = \frac{4P + 7P' + 2P''}{10},$$

$$R'' = \frac{6P + 3P' + 8P''}{10}.$$

Application numérique. — On a immédiatement

$$SA = a\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad SB = a\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad SC = a\frac{\sqrt{22}}{6},$$

et, puisque $a = 60^{cm}$,

$$SA = 30\sqrt{2}, \qquad SB = 30\sqrt{3}, \qquad SC = 10\sqrt{22} \quad \text{(en cm)}$$

Les poids P, P′, P″, à raison de 10^g par cm. de longueur, sont

$$P = 300\sqrt{2} = 424{,}3 \qquad \text{(en grammes)}$$

$$P' = 300\sqrt{3} = 519{,}6, \qquad —$$

$$P'' = 100\sqrt{22} = 469{,}0. \qquad —$$

Les valeurs de Q, R′, R″ sont

$$Q = (900\sqrt{2} + 300\sqrt{3} + 100\sqrt{22})\frac{\sqrt{2}}{4} = 25(18 + 3\sqrt{6} + 2\sqrt{11}) = 799{,}5.$$

$$R' = (120\sqrt{2} + 210\sqrt{3} + 20\sqrt{22}) = 10(12\sqrt{2} + 21\sqrt{3} + 2\sqrt{22}) = 627{,}2,$$

$$R'' = (180\sqrt{2} + 90\sqrt{3} + 80\sqrt{22}) = 10(18\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 8\sqrt{22}) = 785{,}6,$$

d'où, à un gramme près,

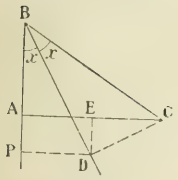
$$Q = 800^g, \qquad R' = 627^g, \qquad R'' = 786^g.$$

P. L.

Solutions de MM. G. Lach, à Douai ; Marescalchi.

Trigonométrie.

2179. — *On considère un triangle* ABC *rectangle en* A *dont l'hypoténuse* BC *est égale à une longueur donnée a, et on prend sur la bissectrice intérieure de l'angle* ABC *une longueur* BD *égale à une longueur donnée l ; on désigne par x la moitié de l'angle* ABC.



1° *Etudier la variation de la distance* DE *du point* D *au côté* AC *quand on fait varier x de* 0 *à* $\frac{\pi}{4}$.

2° *Déterminer l'angle x de façon que le rapport* $\frac{DC}{DP}$ *des distances du point* D *au point* C *et au côté* AB *soit égal à un nombre donné k. Discuter.*

Nota. — *On pourra traiter ces deux parties dans l'ordre que l'on voudra.*

1. Désignons par y la valeur algébrique du segment $\overline{DE}$, en adoptant comme direction positive la

direction AB. Nous aurons

$$y = \overline{DE} = \overline{PA} = \overline{PB} - \overline{AB} = l\cos x - a\cos 2x,$$

ou encore

$$y = a + l\cos x - 2a\cos^2 x.$$

La dérivée est

$$y' = -l\sin x + 4a\cos x\sin x = \sin x(4a\cos x - l):$$

x variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, le premier facteur reste positif, le second ne peut changer de signe que si $\frac{l}{4a}$ est compris entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1, c'est-à-dire si $2a\sqrt{2} < l < 4a$.

1° $0 < l \leqq 2a\sqrt{2}$: la dérivée est constamment positive ; y croît constamment de $l - a$ à $l\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2° $2a\sqrt{2} < l < 4a$: la dérivée d'abord positive s'annule pour $\cos x = \frac{l}{4a}$ et devient négative ; y part de la valeur $l - a$, croît jusqu'à un maximum égal à $a + \frac{l^2}{8a}$, puis décroît jusqu'à $\frac{l\sqrt{2}}{2}$.

3° $4a \leqq l$: la dérivée est constamment négative ; la fonction décroît de $l - a$ à $l\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Evaluons maintenant les distances DC et DP, en fonction de l'angle x :

$$DC = \sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos x},$$
$$DP = l\sin x.$$

On doit déterminer l'angle x $\left(\text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{4}\right)$ de façon que le rapport $\frac{DC}{DP} = k$. L'équation du problème est

$$k^2 = \frac{a^2 + l^2 - 2al\cos x}{l^2\sin^2 x}.$$

Pour discuter aisément cette équation, nous allons étudier les variations de la fonction

$$u = \frac{a^2 + l^2 - 2al\cos x}{l^2\sin^2 x}$$

quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. La dérivée est

$$u' = 2\,\frac{(a\cos x - l)(l\cos x - a)}{l^2\sin^3 x}.$$

Avant d'en étudier le signe, il faut classer les valeurs $\frac{l}{a}$ et $\frac{a}{l}$ par rapport aux valeurs extrêmes du cosinus, savoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1.

1° $0 < l < a\frac{\sqrt{2}}{2}$: on a $\frac{l}{a} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 < \frac{a}{l}$; la dérivée u' est constamment négative, et u décroît de $+\infty$ à $2\,\frac{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}}{l^2}$; le problème proposé n'est possible que si

$$k \geqslant \frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}}.$$

Il admet alors une solution.

2° $a\frac{\sqrt{2}}{2} < l < a$: on a $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{l}{a} < 1 < \frac{a}{l}$; la dérivée u', d'abord négative, s'annule pour

$\cos x = \frac{l}{a}$, puis devient positive ; u décroît de $+\infty$ jusqu'à un minimum égal à $\frac{a^2}{l^2}$, puis croît jusqu'à $2\frac{a^2+l^2-al\sqrt{2}}{l^2}$; donc pour $\frac{a}{l} < k \leqslant \frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2+l^2-al\sqrt{2}}$, on aura deux solutions et pour $\frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2+l^2-al\sqrt{2}} < k$, une seule.

3° $a < l < a\sqrt{2}$: on a $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{a}{l} < 1 < \frac{l}{a}$; la dérivée u', d'abord négative, s'annule pour $\cos x = \frac{a}{l}$, puis devient positive ; u décroît de $+\infty$ jusqu'à un minimum égal à 1, puis croît jusqu'à $2\frac{a^2+l^2-al\sqrt{2}}{l^2}$; donc pour $1 < k \leqslant \frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2+l^2-al\sqrt{2}}$, on aura deux solutions et pour $\frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2+l^2-al\sqrt{2}} < k$, une seule.

4° $a\sqrt{2} < l$: on a $\frac{a}{l} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 < \frac{l}{a}$; u' est constamment négative et u décroît de $+\infty$ jusqu'à $2\frac{a^2+l^2-al\sqrt{2}}{l^2}$. Le problème n'est possible que pour $\frac{\sqrt{2}}{l}\sqrt{a^2+l^2-al\sqrt{2}} < k$ et il n'admet alors qu'une solution.

Pour $l = a$, transition entre le 2e et le 3e cas, l'équation du problème se simplifie. On a en effet $DC = 2a\sin\frac{x}{2}$. On doit donc poser

$$k = \frac{2a\sin\frac{x}{2}}{a\sin x} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}},$$

d'où $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{k}$ $\left(\text{en supprimant la solution } \sin\frac{x}{2} = 0,\ x = 0\ \ DC = 0,\ \ DP = 0\right.$ qui correspond à une indétermination$\left.\right)$. On en déduit

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2-k^2}{k^2},$$

valeur qui ne peut convenir que si $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2-k^2}{k^2} < 1$ et par suite

$$1 < k \leqslant \sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

Ce sont les valeurs que prennent les limites trouvées pour k dans le deuxième et le troisième cas, lorsque le problème admet deux solutions.

Nous allons retrouver ces résultats par la discussion de l'équation du problème, savoir

$$f(\cos x) = k^2l^2\cos^2 x - 2al\cos x + a^2 + l^2 - k^2l^2 = 0.$$

Les substitutions de 1 et de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donnent

$$f(1) = (a-l)^2,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a^2 + l^2 - al\sqrt{2} - \frac{k^2l^2}{2}.$$

1° Condition pour une solution unique : $f(1)f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$, d'où

$$k^2 > \frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}).$$

2° Conditions pour deux solutions :

a) réalité : $(1 - k^2)(a^2 - k^2l^2) > 0$;

b) 1 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont extérieurs à l'intervalle des racines : $f(1)f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$,

$$k^2 < \frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}) ;$$

c) la demi-somme des racines est comprise entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1 :

$$\frac{a}{l} < k^2 < \frac{a}{l}\sqrt{2}.$$

Soit d'abord $l < a\left(\frac{a}{l} > 1\right)$; d'après la condition (c), k^2 sera plus grand que 1 ; la condition de réalité exigera $k^2 > \frac{a^2}{l^2}$. Or $\frac{a^2}{l^2} > \frac{a}{l}$; donc la condition qui l'emporte est $k^2 > \frac{a^2}{l^2}$.

D'autre part, on a toujours $\frac{a^2}{l^2} < \frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2})$, car cette inégalité équivaut à

$$a^2 + 2l^2 - 2al\sqrt{2} = (a - l\sqrt{2})^2 > 0 ;$$

mais pour que $\frac{a^2}{l^2} < \frac{a}{l}\sqrt{2}$, il faut et suffit que $l > a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si cette hypothèse est vérifiée, on aura

$$\frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}) < \frac{a}{l}\sqrt{2},$$

car cela équivaut à

$$2a^2 - 3al\sqrt{2} + 2l^2 < 0,$$

$$(l - a\sqrt{2})\left(l - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0.$$

Le premier facteur est négatif ($l < a$) et le second positif.

Donc, si $l < a\frac{\sqrt{2}}{2}$, on n'aura jamais deux solutions, et si $a\frac{\sqrt{2}}{2} < l < a$, on aura deux solutions lorsque

$$\frac{a^2}{l^2} < k^2 < \frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}).$$

Soit maintenant $a < l\left(\frac{a}{l} < 1\right)$; k^2 supérieur à $\frac{a}{l}$, d'après la condition (c), sera à plus forte raison supérieur à $\frac{a^2}{l^2}$; donc la condition de réalité exigera $k^2 > 1$ et on aura

$$k^2 > 1 > \frac{a}{l} > \frac{a^2}{l^2}.$$

D'autre part, on a $\frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}) > 1$, car cela équivaut à

$$2a^2 - 2al\sqrt{2} + l^2 = (a\sqrt{2} - l)^2 > 0,$$

mais on n'aura $\frac{a}{l}\sqrt{2} > 1$ que si $l < a\sqrt{2}$. Enfin, cette dernière condition remplie, on aura encore

$$\frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}) < \frac{a}{l}\sqrt{2},$$

c'est-à-dire

$$(l - a\sqrt{2})\left(l - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0,$$

car le premier facteur est négatif et le second positif $(l > a)$.

Donc : si $a < l < a\frac{\sqrt{2}}{2}$, on aura deux solutions pourvu que

$$1 < k^2 < \frac{2}{l^2}(a^2 + l^2 - al\sqrt{2}),$$

et si $a\sqrt{2} < l$, on n'aura jamais deux solutions.

Résumé de la discussion.

$$0 < l < a\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{cases} k < \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} : & \text{0 solution} \\ \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} < k : & \text{1 —} \end{cases}$$

$$a\frac{\sqrt{2}}{2} < l < a\begin{cases} k < \frac{a}{l} : & \text{0 —} \\ \frac{a}{l} < k < \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} : & \text{2 solutions} \\ \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} < k : & \text{1 solution} \end{cases}$$

$$a < l < a\sqrt{2}\begin{cases} k < 1 : & \text{0 solution} \\ 1 < k < \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} : & \text{2 solutions} \\ \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} < k : & \text{1 solution} \end{cases}$$

$$a\sqrt{2} < l\begin{cases} k < \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} : & \text{0 —} \\ \frac{2}{l}\sqrt{a^2 + l^2 - al\sqrt{2}} < k : & \text{1 —} \end{cases}$$

P. L.

Bonne solution de M.-E. Dion, école normale de Saint-Cloud.

Autres solutions de MM. E. N. Barisien ; G. Lach, à Douai ; Maresgalchi ; Sergescu, université de Bucarest ; Topin, à Grandvilliers.

Calcul.

2180. — *On donne*

$$a = 223,$$
$$b = 283,$$
$$c = 324,$$
$$m = 830.$$

Calculer au moyen de la règle à calcul :

1° *Les nombres r, u, v, w définis par*

$$r = \sqrt{\frac{abc}{m}}, \qquad u = \sqrt{\frac{mbc}{a}}, \qquad v = \sqrt{\frac{mca}{b}}, \qquad w = \sqrt{\frac{mab}{c}};$$

les cubes r^3, u^3, v^3, w^3 et les inverses $\frac{1}{r}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}$, de ces quatre nombres ;

2° *Les plus petits angles positifs x, y, z tels que* $\operatorname{tg} x = \frac{r}{a}$, $\operatorname{tg} y = \frac{r}{b}$, $\operatorname{tg} z = \frac{r}{c}$;

3° *Les sinus et cosinus de ces trois angles x, y, z.*

Avis : *La composition de calcul est faite avec une règle à calcul de 26^{cm} environ. Défense d'apporter en même temps une table de logarithmes.*

Posant $s = \sqrt{mabc}$, on aura $r = \frac{s}{m}$, $u = \frac{s}{a}$, $v = \frac{s}{b}$, $w = \frac{s}{c}$; amenant le curseur devant le nombre s, on obtient immédiatement

$$r = 157, \qquad u = 584, \qquad v = 460, \qquad w = 402 ;$$

d'où

$$r^2 = 3\,870\,000, \qquad \frac{1}{r} = 0{,}00637,$$

$$u^2 = 199\,000\,000, \qquad \frac{1}{u} = 0{,}00171,$$

$$v^2 = 97\,500\,000, \qquad \frac{1}{v} = 0{,}00217,$$

$$w^2 = 65\,000\,000, \qquad \frac{1}{w} = 0{,}00249.$$

Pour les angles x, y, z, on obtient

$$x = 35^\circ\,10', \qquad y = 29^\circ, \qquad z = 25^\circ\,50';$$

d'où

$$\sin x = 0{,}575, \qquad \cos x = \sin 54^\circ\,50' = 0{,}817,$$

$$\sin y = 0{,}485, \qquad \cos y = \sin 61^\circ = 0{,}870,$$

$$\sin z = 0{,}435, \qquad \cos z = \sin 64^\circ\,10' = 0{,}900.$$

Remarque. — r, u, v, w sont les rayons des cercles inscrit et ex-inscrits ; x, y, z, les demi-angles d'un triangle dont le demi-périmètre serait 830 et les côtés 607, 547 et 506. D'où les vérifications suivantes :

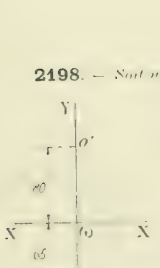
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w},$$

$$x + y + z = 90^\circ.$$

P. L.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2198. — *Soit un point (o, o') situé sur le grand axe YY de la feuille et dont les coordonnées par rapport au petit axe XX sont $oo = 65^{cm}$, $oo' = 80^{mm}$.*



Ce point est le centre d'un carré dont une diagonale est une droite de front de 16 centimètres de longueur inclinée à 45° sur l'horizon, sa trace horizontale étant à gauche de YY.

L'autre diagonale a sa projection verticale réduite à 13 centimètres, sa trace verticale étant à gauche de YY.

1° *Construire les projections de ce carré.*

2° *Si l'on porte sur deux côtés consécutifs de ce carré et de part et d'autre de leurs milieux des longueurs égales à la demi-diagonale, on obtient deux segments de droites égaux entre eux et à la diagonale de carré.*

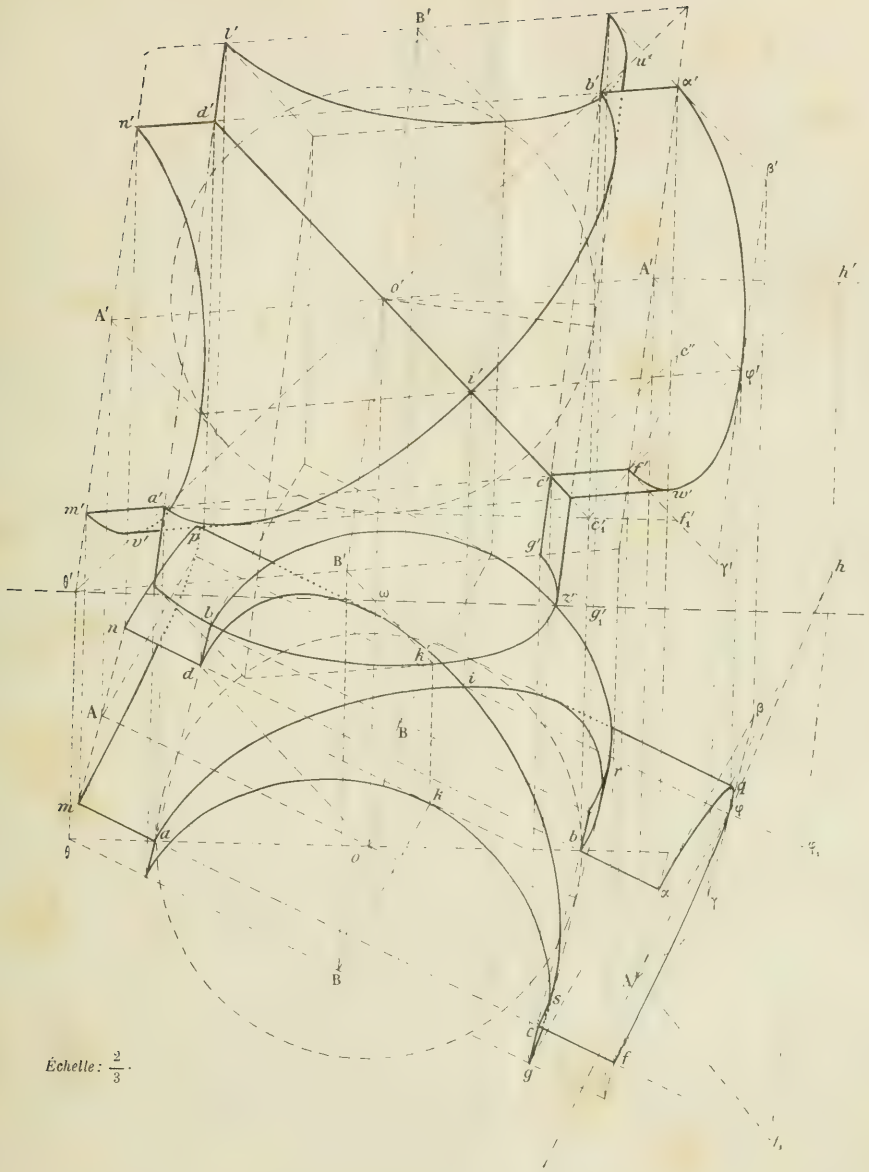
On fait tourner chacun d'eux autour de l'axe du carré qui lui est parallèle. Ils engendrent ainsi deux cylindres de révolution.

Représenter la surface supposée sans épaisseur obtenue en ne conservant de ces deux surfaces cylindriques que les parties situées en dessous du plan du carré et extérieures à leur intersection.

On représentera les parties vues en trait plein noir, les parties cachées en pointillé, les principales lignes de construction en rouge.

École des ponts et chaussées, cours préparatoires, concours de 1913.

Soit $a'b'$, ab la ligne de front qui définit la diagonale du carré, nous avons immédiatement un troisième sommet c'_1 de ce carré rabattu sur le plan de front de la diagonale, et comme on nous donne la projection verticale de ce sommet à 65^{mm} du point o' sur la seconde diagonale perpendiculaire à $a'b'$, nous en déduisons son éloignement $c'c''$ par rapport au plan de front ab et par suite la projection horizontale c, d'où les deux projections du carré $abcd$, $a'b'c'd'$.


B'
l'
u'
b'
α'
n'
d'
β'
A''
h'
o'
A'
c''
i'
φ'
f''
c'
w'
m'
a'
v'
p
f'₁
c'₁
g'
γ'
B'
h
θ'
ω
z'
g'₁
n
l
k
d
i
A
β
B
r
m
k
q
φ
a
b
θ
o
x
γ
B
A''
s
c
f
g
Échelle : 2/3.

En prolongeant $a'c'_1$ et $b'c'_1$ de manière à ce que l'extrémité de chaque ligne se trouve à 8cm du milieu du côté correspondant, nous obtenons deux points f'_1 et g'_1 qu'il suffit de relever autour de la frontale (ab, $a'b'$) pour définir les extrémités des génératrices des deux cylindres considérés (f', f) et (g', g) et dont les axes sont respectivement (oA, o'A') et (oB, o'B'), le point (o, o') étant un centre de symétrie pour les portions de cylindres limitées aux deux plans de section droite dont les distances au point o sont pour chaque cylindre égales à 8 centimètres

Projections des demi-cylindres. — Considérons par exemple le cylindre dont l'axe est (oA, o'A'). Le plan du carré donné oAF le divise en deux parties dont nous devons conserver seulement celle qui est au-dessous du carré : le plan de section droite passant par (A, A') a son horizontale Ah perpendiculaire sur oA et si nous le rabattons autour de cette horizontale, le point (f, f') vient en f_1 sur la perpendiculaire à Ah à une distance du point A égale à la moitié du côté du carré donné. Par suite Af_1 est le rabattement du diamètre de la section droite projeté en Af, et en menant la perpendiculaire Aφ_1 de même longueur il suffira de relever φ_1 en φ pour obtenir deux diamètres conjugués Af et Aφ de la section droite en question. On peut donc construire l'ellipse ou plutôt la demi-ellipse dont on a ces demi-diamètres conjugués Af et Aφ dont les projections verticales sont A'f' et A'φ', l'extrémité (φ, φ') étant précisément celle qui est au-dessous du plan du carré.

La section droite du même cylindre menée par l'autre extrémité de l'axe se projette suivant les mêmes ellipses que celle-ci en projection horizontale et en projection verticale, puisque c'est un cercle égal au premier et dont le plan lui est parallèle.

Pour obtenir les sections droites du second cylindre par les points tels que (B, B'), remarquons que dans l'espace ce sont des cercles égaux aux sections droites du premier cylindre. De plus si nous considérons le diamètre de la section qui est perpendiculaire à BG, il est par cela même perpendiculaire au plan oBG, c'est-à-dire au plan oAF. Il est donc parallèle au diamètre (Aφ, A'φ') de la section droite du premier cylindre, et comme il a la même longueur que lui, leurs projections sont égales et parallèles. On a donc immédiatement deux diamètres conjugués de cette section droite, dont les moitiés utiles sont Bk égal et parallèle à Aφ et B'k' égal et parallèle à A'φ', puis (Bg, B'g'). Nous remarquons de plus qu'en projection verticale les quatre sections droites des deux cylindres se projettent suivant des ellipses égales, à cause de la symétrie du carré donné par rapport à la diagonale de front.

Nous obtenons ainsi sans difficulté les projections des deux demi-cylindres : en projection horizontale nous avons pour chaque cylindre une génératrice de contour apparent qui est pq pour le cylindre d'axe oA et rs pour le cylindre d'axe oB. De même en projection verticale nous voyons la génératrice $v'w'$ du premier cylindre et $u'z'$ pour le second. Ces génératrices sont toutes tangentes à la circonférence de centre (o, o') et dont le diamètre est le côté du carré donné, cette circonférence représentant les contours apparents d'une sphère inscrite dans le cylindre.

Intersection des deux cylindres. — Ces deux cylindres circonscrits à la même sphère se coupent suivant deux courbes planes. On voit d'ailleurs immédiatement, si l'on considère la figure dans l'espace, que deux cylindres circonscrits à la même sphère et dont les axes sont rectangulaires ont en commun les sections planes qui passent par les diagonales du carré situé dans le plan des axes et circonscrit au grand cercle correspondant de la sphère, parallèlement aux axes, sections dont les plans sont perpendiculaires au plan des axes.

Ici ces plans passent donc par les diagonales $a'b'$ et $c'd'$; l'un d'eux est précisément le plan de bout $c'd'$ en sorte qu'on a immédiatement la projection verticale, qui se réduit à la droite $c'd'$, et la projection horizontale, qui est une ellipse dont cd est un diamètre. Le demi-diamètre conjugué est la projection du demi-petit axe de l'espace ; or celui-ci est perpendiculaire au plan du carré et égal au demi-côté du carré : il se projette donc suivant une droite égale et parallèle à Bk, en sorte qu'on peut construire l'ellipse dont on a les deux demi-diamètres conjugués oc et oi.

La seconde section est une ellipse dont le grand axe de front $a'b'$ se projette en vraie grandeur.

Le demi-petit axe, pour les mêmes raisons que dans la première section, se projette suivant la droite oi qui est le demi-diamètre conjugué de ab et achève de déterminer les deux projections de l'ellipse.

Les points de contact de chaque section avec les génératrices de contour apparent se déterminent sans difficulté par une construction bien connue et que nous n'avons pas reproduite sur l'épure. Il faut supprimer sur chaque cylindre le segment de génératrice compris entre les deux points de contact.

En raison des données numériques, les deux projections de la surface proposée empiètent l'une sur l'autre ; nous avons représenté, pour la visibilité, chacune d'elles comme si l'autre n'existait pas.

CONCOURS DE 1913 (*Suite*).

ÉCOLE SUPÉRIEURE D'AÉRONAUTIQUE (*1re année spéciale*).

Composition de mathématiques.

I. — Courbure d'une courbe plane. Cas d'une courbe représentée par les équations paramétriques

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

II. — **2235**. Faire la sommation de la suite

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}.$$

Si on suppose que n croisse indéfiniment, déterminer les limites entre lesquelles x doit être compris pour que la série ainsi obtenue soit convergente. Représenter par une courbe les variations de la fonction définie par cette série et former une équation différentielle du premier ordre qu'elle doit vérifier, équation ne contenant pas la variable indépendante x.

Composition de Mécanique et de Résistance des Matériaux.

I. *Mécanique.* — Du point O, un point pesant M est lancé dans le vide avec une vitesse initiale v, inclinée d'un angle α au-dessus de l'horizon. A l'instant où ce mobile M atteint sa position culminante, on lance, du même point O et dans le même plan vertical, un second point pesant M_1. On propose de déterminer sa vitesse initiale v_1, et l'inclinaison α_1 de cette vitesse sur l'horizon, de telle sorte que les deux points mobiles viennent se rencontrer sur la droite horizontale menée par O dans le plan vertical des deux mouvements.

Est-il possible que les deux vitesses v et v_1 soient égales entre elles ?

II. — *Résistance des matériaux.* — Moments d'inertie d'une plaque rectangulaire homogène, par rapport à des axes situés dans le plan de cette plaque, dont l'épaisseur est considérée comme négligeable.

Composition de Physique et de Chimie.

Physique. — Lunette terrestre.

Chimie. — Anhydride et acide sulfuriques. Principes de la préparation industrielle. Propriétés principales.

Calcul logarithmique.

Sur un terrain horizontal, trois points A, O, B sont placés de telle sorte que l'angle O est droit ; $OA = 310^m$, $OB = 100^m$.

Des points A et B, en visant un quatrième point, M, on a déterminé les angles obtus $AOM = \alpha$ et $OBM = \beta$.

Sachant que $\sin\alpha = 0{,}9756$ et $\sin\beta = 0{,}8$, calculer les distances de M aux trois points A, B, O, à 1 centimètre près.

QUESTIONS PROPOSÉES

2236. — Etant donnée l'équation différentielle

$$f(x)y'' + \frac{f'(x)}{2}\, y' + y + g(x) = 0,$$

montrer que par un changement de variable convenable on peut intégrer cette équation en la ramenant à

une équation linéaire à coefficients constants avec second membre. Appliquer à l'équation

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Trouver les courbes intégrales et, en particulier, celle qui coupe l'axe des y au point d'ordonnée 1 et dont la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}$. Construire cette courbe lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Etudier l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x.

PETITJEUNE, à Voiron.

2237. — On considère la fonction

$$y = \frac{(1 + x)^2 - \mathrm{L}x}{x},$$

et on demande :

1° D'établir une relation entre deux dérivées consécutives de cette fonction, $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$, et de calculer les trois premières dérivées, y', y'', y''' ;

2° De calculer $y^{(n)}$, en fonction x ;

3° D'étudier les variations de cette fonction, y, et de comparer la courbe qui la représente à la droite $y = x + 2$; puis, de donner l'aire de cette courbe, depuis $x = 1$, jusqu'à $x = e$.

E. H.

BIBLIOGRAPHIE

1° **Le Hasard,** par Emile BOREL, professeur à la Faculté des sciences de Paris. 1 volume in-16 de la *Nouvelle Collection scientifique*, avec figures dans le texte, 3 fr. 50 (Librairie Félix ALCAN).

Dans ce nouveau livre de la *Collection scientifique*, M. Emile Borel met à la portée du grand public les parties les plus intéressantes de son enseignement et de ses recherches sur la théorie des probabilités.

L'ouvrage est divisé en trois parties : la première est un exposé très large, sans formules superflues, des principes de la théorie du hasard ; la deuxième est consacrée aux applications des lois du hasard aux diverses sciences ; on y a fait place aux théories physiques récentes, à l'irréversibilité en thermodynamique et à la radioactivité ; la troisième partie enfin a pour objet la portée philosophique des lois du hasard ; les relations entre ces lois et certaines questions classiques y sont mises en évidence d'une manière neuve et suggestive ; le problème du libre arbitre, en particulier, est partiellement renouvelé par la critique approfondie, mais nullement abstraite, grâce au curieux mythe des singes dactylographes, à laquelle l'auteur soumet le déterminisme mécanique.

2° Même collection, même format, même prix :

Henri Poincaré. — *L'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique*, par Vito VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome, correspondant de l'Institut ; Jacques HADAMARD, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'Ecole Polytechnique ; Paul LANGEVIN, professeur au Collège de France ; Pierre BOUTROUX, professeur à l'Université de Poitiers.

Ce livre renferme quatre études sur l'œuvre de Poincaré, primitivement écrites pour la *Revue du Mois*, et réunies ici en un seul volume. Elles sont suivies d'un résumé de la carrière scientifique et universitaire de Henri Poincaré.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET. *Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

24e Année. Juin 1914. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

NOTE D'ANALYSE

par M. **R. Dontot**, élève de l'Ecole normale supérieure.

M. Morel a montré dans le numéro de mars de la Revue, que le calcul des intégrales

$$\int f(x)\sin ax\,dx, \qquad \int f(x)\cos ax\,dx,$$

se ramène à la recherche d'une solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+a^2z=\pm af(x).$$

C'est là un fait, qui n'a rien de surprenant, puisqu'on sait qu'inversement la recherche de cette solution particulière se ramène aisément au calcul de ces intégrales. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}+a^2z=af(x),$$

et cherchons une solution particulière de la forme

$$z=C_1\cos ax+C_2\sin ax,$$

C_1 et C_2 étant deux fonctions inconnues de x : un calcul classique amène à choisir pour C_1 et C_2 des fonctions vérifiant les équations

$$\frac{dC_1}{dx}\cos ax+\frac{dC_2}{dx}\sin ax=0, \qquad -\frac{dC_1}{dx}\sin ax+\frac{dC_2}{dx}\cos ax=f(x),$$

d'où

$$C_1=-\int f(x)\sin ax\,dx, \qquad C_2=\int f(x)\cos ax\,dx.$$

Une solution particulière, z, sera donc toujours de la forme

$$(1)\qquad z=-\cos ax\int_\alpha^x f(x)\sin ax\,dx+\sin ax\int_\beta^x f(x)\cos ax\,dx,$$

α et β étant deux constantes.

Inversement, z étant donnée, il suffit d'adjoindre à l'identité (1) celle qu'on obtient en la dérivant,

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx}=a\sin ax\int_\alpha^x f(x)\sin ax\,dx+a\cos ax\int_\beta^x f(x)\cos ax\,dx,$$

pour obtenir deux équations, qui déterminent $\int_\alpha^x f(x)\sin ax\,dx$ et $\int_\beta^x f(x)\cos ax\,dx$, en fonction de z et de $\frac{dz}{dx}$.

On retrouve par ce procédé la formule donnée par M. Morel :

$$\int_a^x f(x)\cos ax\,dx=z\sin ax+\frac{1}{a}\frac{dz}{dx}\cos ax.$$

Je ferai d'ailleurs remarquer que la recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle, sera en général plus longue que la simple application des méthodes connues : dans l'exemple du précédent article, le calcul de $\int x^2e^x\cos 2x\,dx$ devient extrêmement simple, quand on remplace $\cos 2x$ par $\frac{e^{2ix}+e^{-ix}}{2}$.

On peut cependant, en considérant la question à un point de vue un peu différent, généraliser le résultat obtenu et l'étendre à des cas où il présente un très réel intérêt. Supposons, par exemple, que

y soit une fonction de x vérifiant l'équation différentielle

$$(3) \qquad y = ay' + by'.$$

a et b étant des fonctions quelconques de x, et considérons l'intégrale $\int uy\,dx$.

Remplaçons y par sa valeur donnée par (3) en fonction de y', y'' et intégrons par parties :

$$\int u(ay' + by'')dx = y\left[au - \frac{d(bu)}{dx}\right] - y'.bu - \int y\left[\frac{d(au)}{dx} - \frac{d^2(bu)}{dx^2}\right].$$

Il en résulte que

$$(4) \qquad \int y\left[u + \frac{d(au)}{dx} - \frac{d^2(bu)}{dx^2}\right]dx = y\left(au - \frac{d(bu)}{dx}\right) + uby'.$$

Donc, en particulier, si l'on peut connaître une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2(bu)}{dx^2} - \frac{d(au)}{dx} - u + f(x) = 0,$$

on saura trouver l'intégrale $\int f(x)y\,dx$.

Je me bornerai à appliquer les méthodes précédentes à la démonstration de la propriété suivante :

Considérons l'équation $y''(1 - x^2) - 2xy' + n(n+1)y = 0$;

on vérifiera sans peine qu'elle admet comme solution particulière un polynome $P_n(x)$ de degré n.

Remplaçons dans (4) a, b par les valeurs $a = \frac{2x}{n(n+1)}$, $b = \frac{x^2 - 1}{n(n+1)}$ et y par P_n ; il vient

$$\int P_n[u''(1 - x^2) - 2u'x + n(n+1)u]dx = +(1 - x^2)(P_n u' - uP'_n).$$

Pour que cette identité ait un sens précis nous l'écrirons

$$\int_{-1}^{1} P_n[u''(1 - x^2) - 2u'x + n(n+1)u]dx = [(1 - x^2)(P_n u' - uP'_n)]_{-1}^{1}.$$

Choisissons pour u le polynome P_m solution de l'équation

$$y''(1 - x^2) - 2xy' + m(m+1)y = 0;$$

on voit qu'on aura $(m - n)(m + n + 1)\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = [(1 - x^2)(P_n P'_m - P_m P_n)]_{-1}^{1}$.

Par exemple $\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$ si $m \neq n$.

Les polynomes P_n sont les polynomes de Legendre, dont il est fait grand usage en analyse.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1913.

Groupe I.

Mathématiques.

2170. — *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère la surface* (S) *définie par l'équation*

$$z = xy + x$$

et la droite (D) *définie par les équations*

$$y = b, \qquad z = c,$$

où b *et* c *sont deux constantes données, la seconde n'étant pas nulle. Dans tout ce qui suit, cette droite* (D) *restera fixe.*

1° *Montrer que la surface* (S) *est réglée et trouver ses génératrices.*

2° *A chaque génératrice rectiligne* (G) *de la surface* (S) *on fait correspondre le plan* (P) *mené par la droite* (D) *et parallèle à la symétrique de* (G) *par rapport au plan* xOy. *Déterminer le lieu du point d'intersection de* (G) *et de* (P), *quand la droite* (G) *décrit la surface* (S).

Montrer que ce lieu est une courbe (C) *située sur une quadrique* (Q) *et déterminer cette quadrique.*

3° *Former l'équation du quatrième degré donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe* (C) *avec un plan donné par son équation* $ux + vy + wz + s = 0$.

Calculer les fonctions symétriques élémentaires des racines en fonction de u, v, w, s. *En déduire la relation à laquelle doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3, x_4, *de quatre points de la courbe* (C) *pour que ces quatre points soient dans un même plan.*

Cette relation sera utile dans la plupart des questions qui vont suivre.

4° *Déduire de la relation précédente les relations auxquelles doivent satisfaire les abscisses* x_1, x_2, x_3 *de trois points de la courbe* (C) *pour que ces trois points soient en ligne droite.*

Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points en ligne droite de la courbe (C). *Montrer que les droites qui coupent* (C) *en trois points engendrent l'une des familles de génératrices rectilignes de la quadrique* (Q).

5° *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les plans osculateurs à la courbe* (C) *en trois points donnés se coupent sur la courbe* (C) *est que ces trois points soient en ligne droite.*

6° *Par un point quelconque* M *de la courbe* (C) *il passe deux plans jouissant de la propriété d'être tangents à la courbe* (C) *au point* M *et en un autre point (c'est-à-dire d'être bitangents à la courbe). Soient* M′ *et* M″ *les seconds points de contact de ces deux plans. Montrer qu'il existe un plan bitangent à la courbe* (C) *en* M′ *et* M″.

A quelles relations doivent satisfaire les abscisses de trois points M, M′, M″ *de la courbe* (C) *pour que deux quelconques d'entre eux soient les points de contact d'un plan bitangent à la courbe* (C)?

7° *Former l'équation générale du troisième degré dont les racines sont les abscisses de trois points,* M, M′, M″, *de la courbe* (C) *satisfaisant aux conditions précédentes. Exprimer les coefficients de cette équation au moyen de l'abscisse* ξ *du quatrième point d'intersection* μ *de la courbe* (C) *avec le plan* (Π) *déterminé par les points* M, M′, M″.

Calculer, en fonction de ξ, *les coefficients de l'équation du plan* (Π) *et les coordonnées du point de concours* A *des tangentes à la courbe* (C) *aux points* M, M′, M″. *Ce point* A *sera dit le point associé au point* μ *de la courbe* (C).

8° *Montrer qu'il existe une infinité de quadriques, ne dépendant que de* b *et de* c, *par rapport auxquelles le point* A *est le pôle du plan* (Π); *déterminer ces quadriques et montrer que l'une d'elles est la quadrique* (Q) *déjà considérée.*

Déterminer le lieu (Γ) *du point* A, *ainsi que l'enveloppe du plan* (Π), *quand le point* μ *décrit la courbe* (C).

9° *A trois points quelconques en ligne droite* μ_1, μ_2, μ_3, *pris sur la courbe* (C) *sont associés les trois sommets* A_1, A_2, A_3, *d'un triangle inscrit dans la courbe* (Γ). *Déterminer, en supposant* $b = 0$, *l'enveloppe des côtés de ce triangle quand la droite* $\mu_1\mu_2\mu_3$ *varie. Montrer que, dans la même hypothèse* $b = 0$, *le cercle circonscrit au triangle* $A_1A_2A_3$ *passe par deux points fixes.*

1. Les génératrices rectilignes de la surface (S) sont évidemment les parallèles au plan yOz d'équations

$$(G) \qquad X = x, \qquad Z = xY + z,$$

où x désigne un paramètre variable.

2. x désignant toujours le paramètre variable relatif à la génératrice (G), le plan (P) contiendra évidemment la parallèle (G′) à la symétrique de la génératrice (G) par rapport au plan xOy, menée par le point (x, b, c), où le plan mené par (G) parallèle au plan yOz perce la droite (D). Le point d'intersection (M) du plan (P) et de la génératrice (G) est donc le point d'intersection des droites (G) et (G′).

Les équations de (G′) sont

(G') $$X = x, \qquad Z - c = -x(Y - b).$$

Donc les coordonnées du point M sont données par les équations

$$X = x, \qquad Z - c = -x(Y - b), \qquad Z = xY + x^2.$$

En résolvant ces équations par rapport à X, Y, Z on a les coordonnées d'un point quelconque de la courbe (C) en fonction du paramètre x :

(C) $$X = x, \qquad Y = \frac{-x^2 + bx + c}{2x}, \qquad Z = \frac{x^2 + bx + c}{2}.$$

La droite (G') engendre le paraboloïde hyperbolique (Q) de plan directeur yOz, contenant la droite D et qui a pour équation

(Q) $$Z - c + X(Y - b) = 0.$$

La surface (S) et le paraboloïde (Q) ont d'abord en commun la courbe du 4e degré (C) et de plus la droite à l'infini du plan yOz qui compte double car c'est une génératrice double de la surface (S).

3. L'équation est

$$ux + \frac{v(-x^2 + bx + c)}{2x} + \frac{w(x^2 + bx + c)}{2} + s = 0,$$

ou $$wx^4 - vx^3 + (2u + bw)x^2 + (bv + cw + 2s)x + cv = 0.$$

Si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les racines de cette équation, p_1, p_2, p_3, p_4 leurs fonctions symétriques élémentaires, on a

$$\begin{cases} p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{v}{w}, \\ p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{2u + bw}{w}, \\ p_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{bv + cw + 2s}{u}, \\ p_4 = x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{cv}{w}; \end{cases}$$

on en tire

$$\begin{cases} v = wp_1, \\ u = \dfrac{w(p_2 - b)}{2}, \\ s = \dfrac{w(p_3 + bp_1 + c)}{2}, \\ p_4 = cp_1 \end{cases}$$

Donc pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 d'abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 de la courbe (C) soient dans un même plan, il faut et il suffit qu'ils vérifient l'équation

(1) $$p_4 = cp_1, \qquad \text{ou} \qquad x_1x_2x_3x_4 = c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Si cette condition est remplie l'équation du plan passant par ces quatre points est

(2) $$(p_2 - b)X + 2p_1Y + 2Z - (p_3 + bp_1 + c) = 0$$

4. Étant données les abscisses x_1, x_2, x_3 de trois points M_1, M_2, M_3 de la courbe (C), on obtiendra l'abscisse x_4 du quatrième point M_4 où cette courbe rencontre le plan $M_1M_2M_3$ en résolvant l'équation précédente (1) par rapport à x_4. Pour que les trois points M_1, M_2, M_3 soient en ligne droite, il faut et il suffit que l'équation (1) soit une identité en x_4, c'est-à-dire que l'on ait les deux égalités

(3) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = c. \end{cases}$$

L'équation du troisième degré demandée est donc

(4) $$x^3 + px - c = 0, \quad (p \text{ constante arbitraire}).$$

Pour avoir les équations de la droite $M_1M_2M_3$, cherchons l'équation du plan passant par cette droite et le point $M_4(x_4)$ de la courbe (C). On a actuellement

$$p_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_4,$$
$$p_2 = x_4x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p,$$
$$p_3 = x_1x_2x_3 + x_4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = c + px_4.$$

Donc l'équation (2) du plan est

$$(p - b)X + 2x_4Y + 2Z - 2c - (p + b)x_4 = 0.$$

Lorsque x_4 varie, ce plan passe toujours par la droite $M_1M_2M_3$ qui a pour équations

$(M_1M_2M_3)$ $\qquad 2Y = p + b, \qquad (p - b)X + 2Z - 2c = 0.$

C'est bien une génératrice du paraboloïde (Q), car en éliminant p entre ces deux équations on trouve l'équation de ce paraboloïde.

Cela était évident *a priori*, car la droite $M_1M_2M_3$ rencontrant la courbe (C) en trois points, a en commun avec le paraboloïde (Q) ces trois points. Donc elle est nécessairement sur ce paraboloïde.

5. Pour le plan osculateur au point M d'abscisse x de la courbe (C) on a

$$x_1 = x_2 = x_3 = x,$$

et la relation (1) donne pour l'abscisse x_4 du quatrième point d'intersection du plan osculateur avec la courbe (C) l'équation $\qquad x^3x_4 = c(3x + x_4).$

Cette équation, où l'on considère x comme inconnu, donne les abscisses des points de contact des plans osculateurs à la courbe (C) passant par le point M_4 d'abscisse x_4 de la courbe (C). Elle est du troisième degré et de la forme (4)

$$x^3 - px - c = 0, \qquad \text{où} \qquad p = -\frac{3c}{x_4}.$$

Donc il y a bien trois plans osculateurs à la courbe (C) passant par le point M_4 et ces trois points sont bien en ligne droite. Réciproquement, si on se donne l'équation (4), c'est-à-dire trois points en ligne droite de la courbe (C), on en tire pour x_4 la valeur $x_4 = \dfrac{-3c}{p}$.

Donc les plans osculateurs en ces trois points à la courbe (C) se coupent bien sur la courbe (C) au point M_4 d'abscisse $\dfrac{-3c}{p}$.

6. Soit x l'abscisse d'un point M de la courbe (C), x' l'abscisse d'un autre point M′ de cette courbe tel qu'il existe un plan bitangent à la courbe en M et M′. Il faut donc supposer, dans la relation (1), $x_1 = x_2 = x$ et $x_3 = x_4 = x'$, et réciproquement. Cette relation (1) s'écrit alors

$$x^2x'^2 = 2c(x + x').$$

Elle est du second degré en x', donc il y a bien deux plans bitangents à la courbe (C) passant par M. Soient x' et x'' les racines de l'équation

$$x^2X^2 = 2c(x + X)$$

où X est l'inconnue. Pour montrer qu'il y a un plan bitangent aux deux points correspondants M′ et M″, il suffit de prouver que les racines x' et x'' de cette dernière équation satisfont à la relation

$$x'^2x''^2 = 2c(x' + x'').$$

Cela est évident car

$$x'x'' = -\frac{2c}{x} \qquad \text{et} \qquad x' + x'' = \frac{2c}{x^2}.$$

Les abscisses des trois points M, M′, M″ satisfont aux égalités

$$x'x'' = -\frac{2c}{x}, \qquad x' + x'' = \frac{2c}{x^2},$$

qui peuvent s'écrire

$$xx'x'' = -2c, \qquad x' + x'' = -\frac{x'x''}{x}.$$

ou encore

$$(5) \qquad \begin{cases} xx'x'' = -2c, \\ xx' + xx'' + x'x'' = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si les abscisses de trois points vérifient les deux égalités (5) précédentes, ils vérifient aussi les trois égalités

$$x^2x'^2 = 2c(x + x'), \qquad x^2x''^2 = 2c(x + x'') \qquad \text{et} \qquad x'^2x''^2 = 2c(x' + x''),$$

et il existe bien trois plans bitangents à la courbe (C) respectivement en deux quelconques des trois points M, M′, M″.

7. L'équation demandée est évidemment

$$(6) \qquad X^3 - qX^2 + 2c = 0 \qquad \text{où} \qquad q = x + x' + x'',$$

et, réciproquement, les racines x, x', x'' de l'équation (6) sont bien les abscisses de trois points de la courbe (C) jouissant des propriétés du n° 6.

Faisons, dans l'équation (1), $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$, $x_4 = \xi$.

Nous avons

$$xx'x''\xi = c(x + x' + x'' + \xi),$$

ou

$$-2c\xi = c(q + \xi).$$

Donc

$$q = -3\xi$$

et l'équation demandée est

$$(6) \text{ bis} \qquad X^3 + 3\xi X^2 + 2c = 0.$$

Pour avoir l'équation du plan (Π), il suffit de calculer les fonctions symétriques p_1, p_3, p_2 :

$$p_1 = x + x' + x'' + \xi = -3\xi + \xi = -2\xi,$$
$$p_2 = xx' + xx'' + x'x'' + \xi(x + x' + x'') = -3\xi^2,$$
$$p_3 = xx'x'' + \xi(xx' + xx'' + x'x'') = -2c.$$

En remplaçant dans l'équation (2) du n° 3, on a l'équation du plan (Π) :

$$(\Pi) \qquad -(3\xi^2 + bX - 4\xi Y + 2Z + (2b\xi + c) = 0.$$

Les trois plans bitangents respectivement en deux des points M, M′, M″ se coupent deux à deux suivant les tangentes à la courbe (C) aux points M, M′, M″. Donc ces trois tangentes se coupent au point A commun à ces trois plans. D'ailleurs ces trois plans bitangents sont distincts, sinon chacun coïnciderait avec le plan (Π).

Pour calculer les coordonnées X, Y, Z du point A, écrivons que ces coordonnées vérifient les équations de la tangente à la courbe (C) au point M(x). On a donc les équations

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - \dfrac{-x^3 + bx + c}{2x}}{-\dfrac{2x^2 + c}{2x^2}} = \frac{Z - \dfrac{x^3 + bx + c}{2}}{\dfrac{3x^2 + b}{2}}.$$

En égalant le premier et le dernier rapport, on a l'équation

$$2x^3 - 3Xx^2 + (2Y - bX - c) = 0.$$

C'est une équation du troisième degré en x de la forme (6) bis qui doit être vérifiée par les abscisses x, x', x'' des trois points M, M′, M″. Donc cette équation doit être identique à l'équation (6) bis, ce qui donne

$$X = -2\xi, \qquad Z = \frac{5c}{2} - b\xi.$$

Remplaçons X par -2ξ et égalons le premier et le second rapport ; nous en tirons

$$Y = \frac{-x^3 + bx + c}{2x} + \frac{(2\xi + x)(2x^3 + c)}{2x^2} = \frac{-x^3 + bx + c}{2x} + \frac{2x^3 + c}{2x} + \frac{\xi(2x^3 + c)}{2x^2},$$

$$Y = \frac{x^3 + bx + 2c}{2x} + \frac{\xi(2x^3 + c)}{x^2}$$

Mais de l'équation (6) bis on tire $x^3 + 2c = -3\xi x^2$.

Donc $$Y = \frac{b}{2} - \frac{3\xi x^2}{2x} + \frac{\xi(2x^3 + c)}{x^2} = \frac{b}{2} + \frac{\xi(x^3 + 2c)}{2x^2} = \frac{b}{2} + \frac{\xi(-3\xi x^2)}{2x^2} = \frac{b - 3\xi^2}{2}.$$

Ainsi les coordonnées du point A sont

$$\text{(A)} \qquad X = -2\xi, \qquad Y = \frac{b - 3\xi^2}{2}, \qquad Z = \frac{5c - 2b\xi}{2}.$$

8. En éliminant ξ entre les équations précédentes qui donnent les coordonnées du point A on trouve pour le lieu (Γ) les équations

$$(\Gamma) \qquad Z = \frac{5c + bX}{2}, \qquad Y = \frac{4b - 3X^2}{8}.$$

Donc (Γ) est une parabole située dans un plan parallèle au plan zOx.

L'équation du plan (Π) contient le paramètre ξ au deuxième degré, donc son enveloppe a pour équation

$$(2Y - b)^2 - 3X(bX - 2Z - c) = 0.$$

C'est un cône ayant pour sommet le point $T\left(0, \frac{b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$.

Le paraboloïde (Q) est évidemment une des quadriques répondant à la question, car les tangentes à la courbe (C) aux points M, M′, M″ sont aussi tangentes à ce paraboloïde, donc leur point de rencontre A est bien le pôle du plan MM′M″. Cette remarque donne un moyen très rapide pour calculer les coordonnées du point A.

Deux quadriques n'ont en général que quatre points ayant mêmes plans polaires, les sommets des quatre cônes du second degré passant par leur courbe d'intersection. Comme toutes les quadriques considérées doivent avoir une infinité de points, situés dans un même plan, ayant mêmes plans polaires, ce ne peuvent être que les quadriques circonscrites au paraboloïde (Q) le long de la courbe de contact de ce paraboloïde et du cône circonscrit de sommet $T\left(0, \frac{b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$. Tout point du plan de cette courbe de contact a en effet même plan polaire par rapport à toutes ces quadriques. On vérifie que le plan de la parabole (Γ), lieu du point A, est le plan polaire du point T par rapport au paraboloïde (Q).

Mais on peut trouver par le calcul, sans aucune considération géométrique, toutes les quadriques répondant à la question.

Soit

$$f(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2CX + 2C'Y + 2C''Z + D = 0,$$

l'équation d'une de ces quadriques. Ecrivons que le plan polaire du point $A\left(-2\xi, \frac{b - 3\xi^2}{2}, \frac{5c - 2b\xi}{2}\right)$ coïncide avec le plan (Π). On doit donc avoir, quel que soit ξ, les égalités

$$\frac{-2A\xi + \frac{B''(b - 3\xi^2)}{2} + \frac{B'(5c - 2b\xi)}{2} + C}{-(3\xi^2 + b)} = \frac{-2B''\xi + \frac{A'(b - 3\xi^2)}{2} + \frac{B(5c - 2b\xi)}{2} + C'}{-4\xi}$$

$$= \frac{-2B'\xi + \frac{B(b - 3\xi^2)}{2} + \frac{A''(5c - 2b\xi)}{2} + C''}{2} = \frac{-2C\xi + \frac{C'(b - 3\xi^2)}{2} + \frac{C''(5c - 2b\xi)}{2} + D}{2b\xi + c}.$$

Les numérateurs sont des polynomes du second degré au plus par rapport à ξ.

Pour que ces égalités soient des identités en ξ, il faut que les numérateurs soient respectivement divisibles par les dénominateurs correspondants. Mais alors la première fraction doit être de degré zéro en ξ. Donc les quatre fractions doivent être égales à la même constante. En écrivant ces identités on trouve d'abord

$$A' = 0, \qquad B = 0, \qquad C' = 0,$$

puis

$$2A + bB' = 0, \qquad 2B' + bA'' = 0$$

et

$$\frac{\frac{bB''}{2} + \frac{5cB'}{2} + C}{-b} = \frac{-2B''}{-4} = \frac{\frac{5cA''}{2} + C''}{2} = \frac{\frac{5cC''}{2} + D}{c};$$

on en tire

$$A = -\frac{bB'}{2}, \qquad A'' = \frac{-2B'}{b}, \qquad C = -\frac{5cB'}{2} - bB'', \qquad C'' = \frac{5cB'}{b} + B', \qquad D = -\frac{25c^2B'}{2b} - 2cB''.$$

L'équation générale de toutes les quadriques répondant à la question est donc

$$-\frac{bB'}{2}X^2 - \frac{2B'}{b}Z^2 + 2B'ZX + 2B''XY - (5cB' + 2bB'')X + \left(\frac{10cB'}{b} + 2B''\right)Z - \frac{25c^2B'}{2b} - 2cB'' = 0,$$

ou

$$2B''[Z - c + X(Y - b)] - \frac{B'}{2b}(bX - 2Z + 5c)^2 = 0.$$

Ce sont bien les quadriques circonscrites au paraboloïde (Q) le long de la courbe d'intersection du paraboloïde par le plan de la parabole (Γ).

Il est évident que la parabole (Γ) et la section du cône (T) par le plan de cette parabole sont polaires réciproques par rapport à la section du paraboloïde (Q) par le même plan. Cela se vérifie facilement par le calcul.

9. Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les abscisses des trois points μ_1, μ_2, μ_3. Ces trois points étant en ligne droite, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les racines de l'équation (n° 4)

$$(4) \qquad x^3 + px - c = 0.$$

Si $b = 0$, les équations de la parabole (Γ) sont (n° 8)

$$(\Gamma) \qquad Z = \frac{5c}{2}, \qquad Y = -\frac{3X^2}{8}.$$

Dans le plan de cette parabole l'équation de la droite passant par les points $A_2\left(-2\xi_2, \ -\frac{3\xi_2^2}{2}\right)$, $A_3\left(-2\xi_3, \ -\frac{3\xi_3^2}{2}\right)$ est

$$\left(-\frac{3}{2}\xi_2^2 + \frac{3}{2}\xi_3^2\right)X - (-2\xi_2 + 2\xi_3)Y + (-2\xi_2)\left(-\frac{3}{2}\xi_3^2\right) - (-2\xi_3)\left(-\frac{3}{2}\xi_2^2\right) = 0,$$

ou

$$(A_2A_3) \qquad \frac{3}{2}(\xi_2 + \xi_3)X - 2Y + 3\xi_2\xi_3 = 0.$$

Mais ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant racines de l'équation (4), on a

$$\xi_2 + \xi_3 = -\xi_1 \qquad \text{et} \qquad \xi_2\xi_3 = \frac{c}{\xi_1}.$$

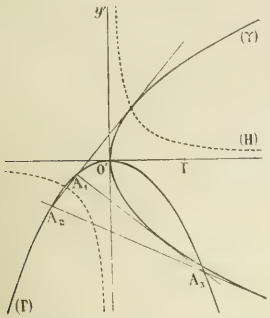
Donc l'équation de la droite A_2A_3 est, en fonction du paramètre variable ξ_1,

$$(A_2A_3) \qquad -\frac{3}{2}\xi_1X - 2Y + \frac{3c}{\xi_1} = 0$$

On en déduit que l'enveloppe de cette droite A_2A_3 est la parabole (γ) située dans le plan de la parabole (Γ) et d'équation

$$(\gamma) \qquad Y^2 = \frac{-9c}{2}X.$$

On constate que cette seconde parabole (γ) est la section par le plan de la parabole (Γ) du cône T enveloppe du plan (Π). Le plan de la parabole (Γ) coupe le paraboloïde (Q) suivant l'hyperbole équilatère (H) d'équation



$$(H) \qquad XY = \frac{-3c}{2}.$$

D'après ce qui a été vu (n° 8), les deux paraboles (Γ) et (γ) sont polaires réciproques par rapport à l'hyperbole (H). Le triangle $A_1A_2A_3$ est donc inscrit dans la parabole (Γ), circonscrit à la parabole (γ) et conjugué par rapport à l'hyperbole (H).

Etant circonscrit à la parabole (γ), il en résulte que le cercle circonscrit à ce triangle passe par le foyer F de cette parabole, d'après le théorème de Simson. Ce triangle étant conjugué par rapport à l'hyperbole (H), il en résulte que les directions $O'A_1$ et A_2A_3 sont conjuguées par rapport à cette hyperbole et font des angles égaux avec les asymptotes. Donc les cordes $O'A_1$ et A_2A_3 sont également inclinées sur l'axe de la parabole (Γ). Donc les quatre points O', A_1, A_2 et A_3 sont sur un cercle. Ainsi le cercle $A_1A_2A_3$ passe par les deux points fixes

$$F\left(-\frac{9c}{2},\ 0,\ \frac{5c}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad O'\left(0,\ 0,\ \frac{5c}{2}\right).$$

On peut montrer par le calcul que la droite $O'A_1$ est inclinée sur l'axe de la parabole (Γ) du même angle que la droite A_2A_3. Car la pente de la droite $O'A_1$ est $\dfrac{\frac{-3\xi_1^2}{2}}{-2\xi_1} = \dfrac{3}{4}\xi_1$; c'est bien la pente de A_2A_3 changée de signe.

Remarque. — On déduit de là le théorème suivant : *Si deux paraboles ont même sommet et leurs axes perpendiculaires, il existe une infinité de triangles inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre et le cercle circonscrit à ce triangle passe par le sommet commun et par le foyer de la seconde parabole.*

On peut aussi vérifier facilement que les trois points A_1, A_2, A_3 sont les pieds des normales menées à la parabole (Γ) par un point de la parallèle à Oy d'équation

$$X = \frac{-9c}{4} \text{ (cela fournirait une seconde solution du n° 9).}$$

Très bonne solution par M. François Margand, élève à l'école des mines de Saint-Etienne.
Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Douai ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies.

2171. — *On donne deux axes rectangulaires et on considère l'équation différentielle*

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

1° *Montrer que cette équation admet une infinité de courbes intégrales* C, *dont l'équation est de la forme* $y^2 = f(x)$, $f(x)$ *désignant un polynome en* x. *Ecrire l'équation générale des courbes* C ; *montrer que, par tout point du plan, il passe soit une, soit trois courbes* C, *et déterminer la région du plan où doit se trouver le point pour que le nombre des courbes qui y passent soit égal à trois ; déterminer le lieu des points tels que deux des courbes* C *qui passent par l'un d'eux soient orthogonales.*

2° *On donne le point* $A(x = 0{,}5;\ y = 0)$. *Soit* P *celle des courbes* C *qui passe par* A *et tourne*

sa concavité vers la partie positive de l'axe Ox *; soit* B *le point de la courbe* P *qui a pour ordonnée* $\sqrt{6}$. *Soit* Q *celle des courbes* C *passant par* B *et qui tourne sa concavité vers les* x *négatifs; soit enfin* A′ *le point où cette courbe coupe l'axe* Ox. *Calculer l'aire limitée par les arcs de courbes* AB, BA′, *et l'axe* Ox.

3° *Un point mobile, partant de* A, *parcourt successivement l'arc* AB *de* P, *puis l'arc* BA′ *de* Q. *Son accélération tangentielle est constamment égale à sa vitesse, et sa vitesse initiale est égale à* 1 ; *au point* B *on supposera que la vitesse ne subit pas de changement de grandeur, mais seulement un changement de direction. Calculer à* 0,1 *près le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc* ABA′.

4° *Au point* B, *l'accélération du mobile subit une discontinuité. Calculer par ses projections sur les deux axes de coordonnées la variation géométrique du vecteur-accélération au point* B.

1. Multiplions l'équation par y, nous obtenons

$$y^2 - 2xyy' + y^4y'^3 = 0,$$

ou, en posant $y^2 = u$,

$$u = ux - \frac{u'^3}{8}.$$

Nous reconnaissons une équation de Clairaut, dont l'intégrale générale est

$$u = \mu x - \frac{\mu^3}{8};$$

μ désignant une constante arbitraire, ou en posant $\mu = 2\lambda$,

$$(1) \qquad y^2 = 2\lambda x - \lambda^3.$$

Telle est l'équation générale des courbes (C); ce sont des paraboles ayant pour axe Ox.

En outre, l'équation différentielle admet une intégrale singulière, représentée géométriquement par l'enveloppe des courbes (C). Cette enveloppe est la courbe

$$(E) \qquad 27y^4 - 32x^3 = 0;$$

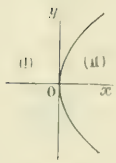


Fig. 1

elle est symétrique par rapport à Ox, touche Oy à l'origine et a des branches paraboliques dans la direction Ox (*fig.* 1).

Ecrivons que la courbe (1) passe par le point $M(x_0, y_0)$; nous avons l'équation

$$\lambda^3 - 2\lambda x_0 + y_0^2 = 0,$$

qui détermine trois valeurs pour λ.

Ces valeurs sont réelles si $27y_0^4 - 32x_0^3 \leq 0$, c'est-à-dire si le point M est dans la région négative de la courbe (E), c'est la région (II).

Par tout point M de cette région passent trois courbes (C) réelles.

Si le point M est dans la région (I), région positive de la courbe (E), l'équation en λ a une seule racine réelle ; par ce point passe une seule courbe (C) réelle.

Les pentes des tangentes aux paraboles passant par le point (x_0, y_0) sont racines de l'équation

$$(2) \qquad y_0y'^3 - 2x_0y' + y_0 = 0;$$

soient y'_1, y'_2, y'_3 les trois racines. Deux des paraboles seront orthogonales au point (x_0, y_0), si l'on a $y'_1y'_2 = -1$. Or le produit des racines, $y'_1y'_2y'_3$ est égal à $\frac{-1}{y_0}$; si $y'_1y'_2 = -1$, on aura $y'_3 = \frac{1}{y_0}$. Tout revient donc à écrire que $\frac{1}{y_0}$ est racine de l'équation (2). Nous obtenons ainsi $y_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$, et ceci nous montre que le lieu demandé est la parabole

$$(P) \qquad y^2 - 2x + 1 = 0;$$

c'est la courbe (C) relative à $\lambda = 1$.

2. Pour $x = 0{,}5$, $y = 0$, l'équation (1) donne $\lambda^3 - \lambda = 0$; elle a comme racines $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$. La parabole cherchée devant tourner sa concavité vers les x positifs, on doit prendre

$\lambda = 1$; la courbe cherchée a donc pour équation

$$y^2 - 2x + 1 = 0 ;$$

c'est la parabole (P) précédemment trouvée

Le point B de cette courbe qui a pour ordonnée $\sqrt{6}$ a pour abscisse $\frac{7}{2}$; en remplaçant x par $\frac{7}{2}$ et y par $\sqrt{6}$ dans l'équation (1), nous avons

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

qui admet la racine $\lambda = 1$, puisque (P) passe par le point B, et dont les deux autres racines sont 2 et -3. Pour que la courbe (C) tourne sa concavité vers les x négatifs, il faut que λ soit négatif ; on doit donc prendre $\lambda = -3$. Par suite, l'équation de la courbe (Q) est

$$y^2 + 6x - 27 = 0.$$

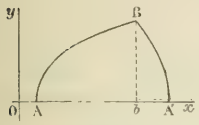


Fig. 2.

On construit aisément ces courbes ; on a

$$OA = \frac{1}{2}, \qquad Ob = \frac{7}{2}, \qquad OA' = \frac{9}{2}, \qquad Bb = \sqrt{6} = 2{,}4.$$

L'aire limitée par les arcs de courbe AB, BA' et par la droite AA' est égale aux $\frac{2}{3}$ du rectangle qui a pour côtés $AA' = 4$, et $Bb = \sqrt{6}$. Cette aire est donc $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ ou, à $\frac{1}{10}$ près, 6,4.

3. On doit avoir $\frac{dv}{dt} = v$, ou $\frac{dv}{v} = dt$; on en tire $Lv = t + C$, et $v = e^{t+C}$. Comme pour $t = 0$, v doit être égal à 1, on a $C = 0$ et $v = e^t$. On en déduit $\frac{ds}{dt} = e^t$, $s = e^t + C'$, et comme pour $t = 0$, on a $s = 0$, on obtient $s = e^t - 1$.

Le temps mis par le mobile pour parcourir l'arc ABA' sera donc défini par l'égalité

$$e^t = 1 + \text{arc AB} + \text{arc BA}'.$$

Or étant donnée une parabole $y^2 - 2px = 0$, on sait que la longueur de l'arc qui va de l'origine à un point d'ordonnée positive y_0 est égale à

$$\frac{y_0}{2p}\sqrt{y_0^2 + p^2} + \frac{p}{2} L\frac{y_0 + \sqrt{p^2 + y_0^2}}{p}.$$

On aura la valeur de l'arc AB en faisant $p = 1$, $y_0 = \sqrt{6}$, et celle de l'arc AB' en faisant $p = 3$, $y_0 = \sqrt{6}$. On obtient ainsi

$$s_1 = \text{arc AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{42} + L(\sqrt{6} + \sqrt{7})),$$

$$s_2 = \text{arc A'B} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{10} + 3L\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3}\right]$$

et t sera déterminé par l'équation $e^t = s_1 + s_2 + 1$, ou $t = L(s_1 + s_2 + 1)$.

Posons $s_1 + s_2 + 1 = u$, et proposons-nous de déterminer avec quelle approximation il faut calculer u pour obtenir t à $\frac{1}{10}$ près. Soient $t - \alpha$, $u - \beta$ les valeurs approchées correspondantes par défaut, nous avons $e^t = u$, $e^{t-\alpha} = u - \beta$; nous en tirons

$$\beta = e^t - e^{t-\alpha} = e^t(1 - e^{-\alpha}).$$

Or si $\qquad \alpha < \frac{1}{10}, \qquad 1 - e^{-\alpha} < 1 - e^{-\frac{1}{10}} < \frac{1}{10} \qquad$ et $\qquad \beta < \frac{e^t}{10}$;

on voit aisément que $e^t < 8$, donc $\beta < \frac{8}{10}$.

Donc en calculant u à $\frac{1}{10}$ près, on aura t à $\frac{1}{10}$ près.

Nous avons $\sqrt{42} = 6,48$, $\sqrt{6} = 2,45$, $\sqrt{7} = 2,64$, $\sqrt{6}+\sqrt{7} = 5,09$,

$$L5,09 = 2,3 \log 5,09 = 2,3 \times 0,706 = 1,62;$$

donc

$$s_1 = \frac{1}{2}(6,48 + 1,62) = 4,05$$

D'autre part, $\sqrt{10} = 3,16$, $\sqrt{15} = 3,87$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3} = 2,11$,

$$L2,11 = 0,745, \qquad 3L2,11 = 2,23,$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(3,16 + 2,23) = 2,69,$$

$$v' = 4,05 + 2,69 + 1 = 7,74,$$

$$t = 2,3 \log 7,74 = 2,3 \times 0,888 = 2, \qquad \text{à } \frac{1}{10} \text{ près.}$$

4. Soient J_t et J_n les accélérations tangentielle et normale au point B sur la parabole AB, et soit α l'angle aigu que fait avec Ox la tangente en B à cette courbe.

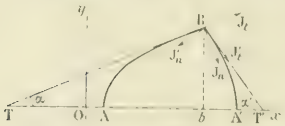


Fig. 3.

Nous avons $J_t = \frac{dv}{dt} = v = v' = s_1 + 1 = 5,05$,

$$J_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\overline{5,05}^2}{7\sqrt{7}},$$

puis $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Les projections X, Y de cette accélération sur les axes Ox, Oy sont alors

$$X = J_t \cos\alpha + J_n \sin\alpha = \frac{5,05[7\sqrt{42} + 5,05]}{49} = \frac{5,05 \times 50,41}{49} = 5,19,$$

$$Y = J_t \sin\alpha - J_n \cos\alpha = \frac{5,05(7\sqrt{7} - 5,05\sqrt{6})}{49} = 0,63.$$

Sur la parabole BA' nous aurons

$$J'_t = J_t = 5,05, \qquad J'_n = \frac{v'^2}{\rho_1} = \frac{\overline{5,05}^2}{\frac{5\sqrt{15}}{3}}, \qquad \cos\alpha' = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}, \qquad \sin\alpha' = \frac{3}{\sqrt{15}},$$

$$X' = J'_t \cos\alpha' - J'_n \sin\alpha' = \frac{5,05[5\sqrt{90} - 5,05 \times 9]}{5 \times 15} = 0,13,$$

$$Y' = J'_t \sin\alpha' - J'_n \cos\alpha' = -\frac{5,05[15\sqrt{15} + 5,05 \times 3\sqrt{6}]}{5 \times 15} = -6,40.$$

On en déduit

$$X' - X = 0,13 - 5,19 = -5,06, \qquad Y' - Y = -6,40 - 0,63 = -7,03.$$

François MARGAND, élève à l'école des mines de Saint-Etienne.

Bonnes solutions par MM. Berbeze Gelt, lycée de Toulouse ; R. Dethou, école normale de Nancy ; G. Lach, à Douai ; L. Rouge, à Sainte-Barbe ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Simon, à Fourmies.

Épure.

2173. — Solide de révolution engendré par une ellipse. — *L'ellipse est horizontale ; son centre est situé à 10^m de chaque plan de projection. Sur l'épure, les projections de ce centre sont sur le grand axe de la feuille, symétriques par rapport au petit axe. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à la ligne de terre ; il vaut 20^cm ; le petit axe vaut 8^cm.*

L'axe de révolution passe par le centre de l'ellipse. Il est de front, incliné à 45° sur le plan horizontal. On s'élève sur cet axe de droite à gauche.

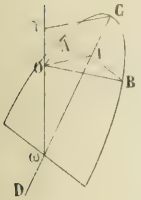
1° *Représenter le* volume *engendré par la* surface *de l'ellipse.*

2° *Déterminer les ombres produites sur ce solide, tant à l'extérieur qu'à l'intérieur. Les rayons lumineux sont perpendiculaires au second bissecteur. La lumière vient d'en haut.*

Faire un cadre de 28×44^{cm}.

On ne demande aucune explication écrite.

Considérons un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution et coupant la surface de l'ellipse suivant une corde AB dont le milieu I est sur le grand axe de l'ellipse. Tous les points de la corde AB décriront des circonférences concentriques dont la plus petite a pour rayon OI, et la plus grande OA ou son égal OB. Le solide sera donc limité intérieurement par la surface lieu de toutes les circonférences telles que OI et qui n'est autre que la surface conique enveloppe du plan mobile, limitée aux circonférences décrites par les extrémités C et D du grand axe de l'ellipse, puis extérieurement par la surface engendrée par l'ellipse elle-même et qui est ici une quadrique parce que l'axe passe par le centre de la courbe, et se projette sur son plan suivant son axe de symétrie.



Comme la distance du sommet C à l'axe de révolution est ici supérieure au petit axe de l'ellipse, la méridienne de la surface sera une hyperbole et par suite le solide considéré sera compris entre un cône et un hyperboloïde de révolution à une nappe, ces deux surfaces ayant en commun les deux parallèles limites décrits par les extrémités du grand axe de l'ellipse.

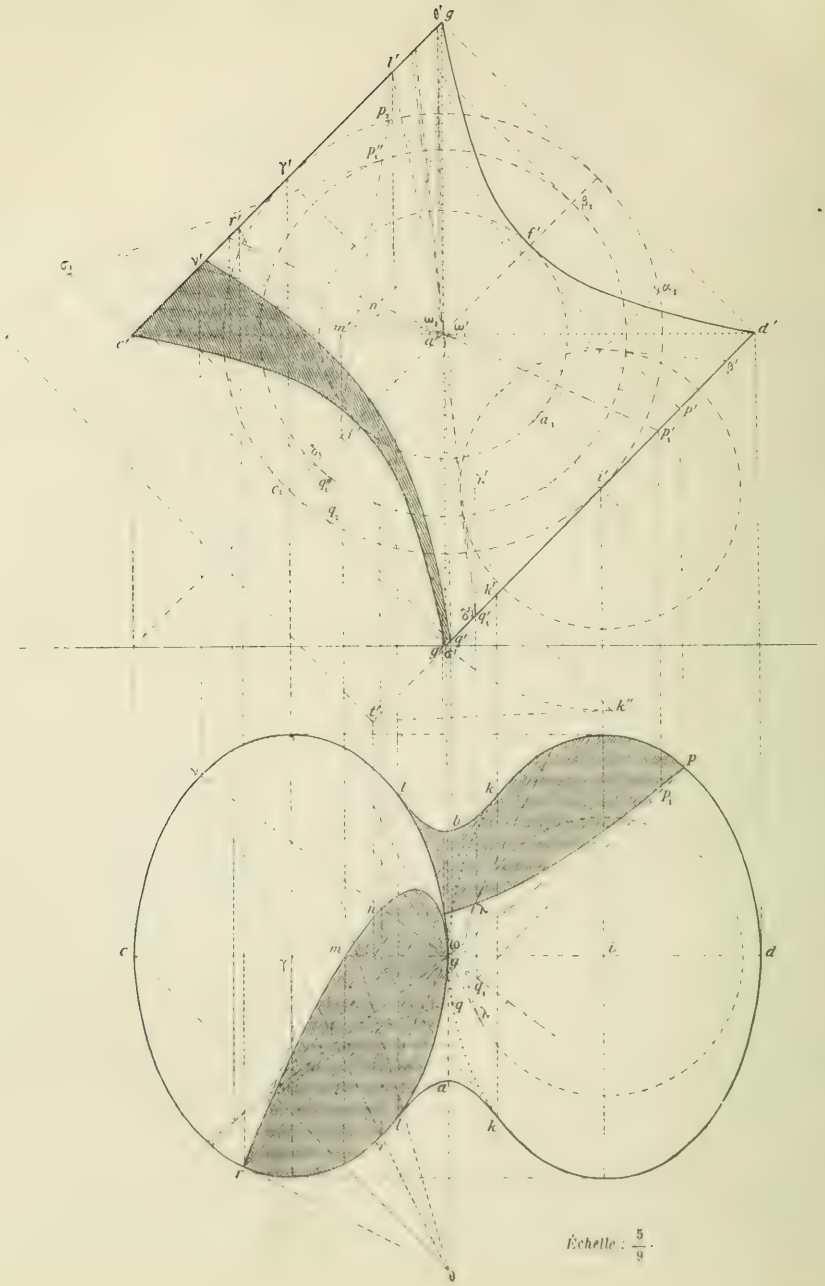
Connaissant le cercle de gorge de l'hyperboloïde et un second parallèle on peut immédiatement en déduire le cône asymptote de la surface. Pour cela, projetons la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre de l'ellipse : le cercle de gorge a pour projection la circonférence de rayon $\omega' a_1 = 4^{cm}$ et le parallèle décrit par le point C se projette suivant le cercle de rayon $\omega' c_1$. Si nous menons en a_1 une tangente au cercle de gorge, nous pouvons la regarder comme la projection d'une génératrice de front dont la trace horizontale est en α_1. Nous avons donc en $\omega'\beta_1$ la génératrice de front du cône asymptote dont la projection verticale $\omega'\beta'$ donne une asymptote de l'hyperbole méridienne, et on a de même la seconde asymptote $\omega'\delta'$.

Connaissant alors les sommets f' et les asymptotes de l'hyperbole méridienne, nous pouvons construire le contour apparent vertical du solide, qui se compose d'abord des deux parallèles limites projetés suivant deux droites égales et parallèles telles que $c'\gamma'g'$, puis des deux arcs d'hyperbole méridienne compris entre ces deux parallèles, et enfin des génératrices cachées de la surface conique intérieure $c'd'$ et $g'\omega'g'$.

Le contour apparent horizontal se compose des deux ellipses projections des circonférences qui limitent le solide et dont on a les deux demi-axes, puis de deux arcs d'hyperbole qui appartiennent à la section de l'hyperboloïde par le plan diamétral conjugué des cordes verticales. On connaît les sommets a et b de cette hyperbole, et ses asymptotes sont les génératrices de contour apparent du cône asymptote de l'hyperboloïde. On obtient ces génératrices en considérant une sphère de centre (i, i') inscrite dans ce cône et en menant par ω les tangentes $\omega\lambda$ à son contour apparent horizontal. On peut alors déterminer autant de points qu'on veut de l'hyperbole, et en particulier on a les points k et l où elle se raccorde avec les deux ellipses en prenant la trace, telle que kk, du plan de bout $\omega\lambda' k'$ sur chacun des plans de base du solide. La tangente en k peut s'obtenir en rabattant le plan du parallèle sur le plan de front de son centre, et menant la tangente $k''t'$ au cercle rabattu.

Le cône intérieur, ayant une génératrice verticale $(\omega g, \omega' g')$ et étant limité aux deux sections parallèles, n'a d'autre contour apparent que ces sections elles-mêmes.

Ombres produites sur le solide. — Considérons d'abord la surface extérieure du solide, c'est-à-dire l'hyperboloïde de révolution ; il est éclairé par des rayons lumineux perpendiculaires au second bissecteur : la courbe d'ombre propre est donc la ligne d'intersection du plan diamétral conjugué de cette direction. Pour obtenir ce plan, remarquons qu'il est le même pour le cône asymptote ; or le plan diamétral conjugué d'une direction donnée n'est autre, pour ce cône, que le plan des génératrices de contact des plans tangents au cône parallèles à cette direction. Nous le construisons en menant par le sommet du cône la parallèle aux rayons lumineux jusqu'à ce qu'elle perce le plan de base, et par le point ainsi obtenu nous menons les tangentes au cercle de base. Il y a avantage, pour effectuer cette construction, à prendre comme plan horizontal auxiliaire de projection le plan $\omega' f'$: la parallèle aux rayons lumineux menée par le sommet (ω, ω') du cône a pour nouvelle projection horizontale $\omega_1\sigma_1$ qu'on obtient en portant l'éloignement $c_1\sigma_1$ égal à $\sigma'\omega'$. Les tangentes, telles que $\sigma_1 p_1''$, à la base du cône asymptote déterminent la trace $p_1''q_1''$ du plan diamétral sur le plan de base du cône et cette trace coupe le parallèle qui limite l'hyperboloïde aux points p_2 et q_2 qui font connaître les points (p, p')


Échelle : $\frac{5}{9}$.

et (q, q') où la courbe d'ombre coupe le parallèle de base. Cette courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les génératrices du cône asymptote définies par leurs traces p_1'' et q_1'', soient $\omega' p_1'$ et $\omega' q_1'$. On en déduit les asymptotes ωp_1 et ωq_1 de la projection horizontale.

On obtient par symétrie les points où l'hyperbole d'ombre coupe le second parallèle.

L'ombre produite sur le cône intérieur est l'intersection de sa surface par le cylindre qui a pour base le cercle $(\gamma c, \gamma' c')$ et pour génératrices des parallèles aux rayons lumineux. Ce cône et ce cylindre, ayant en commun ce cercle $(\gamma c, \gamma' c')$, se coupent suivant une seconde courbe plane. Si nous menons par le sommet du cône la parallèle aux génératrices du cylindre et si nous prenons son intersection (θ, θ') avec le plan de la base commune, la tangente θr à cette base et la droite $\omega\theta$ définissent un plan qui est tangent à la fois au cône et au cylindre. D'ailleurs le plan vertical $\omega\theta$ est aussi un plan tangent commun aux deux surfaces ; donc gr est l'intersection du plan de la seconde section plane commune au cône et au cylindre, et, d'après un théorème connu, la tangente en r à cette seconde courbe plane est conjuguée harmonique de la tangente $r\theta$ par rapport aux deux directions gr et rr' des génératrices du cône et du cylindre.

On obtient autant de points que l'on veut de cette courbe d'ombre en menant par $\omega\theta$ des plans auxiliaires dont les traces sur le plan de la base commune pivotent autour du point θ. Par exemple le plan $\omega\theta c$ donne le point (m, m') sur la génératrice de contour apparent vertical du cône.

Nous avons utilisé l'asymptote $q_1\omega$ pour obtenir un point courant (n, n') sur la génératrice $\omega\nu$ qui a la même projection horizontale que cette asymptote. On a d'ailleurs tous les points et tangentes remarquables que l'on désire en employant la méthode classique qui consiste à mener à une section plane d'un cône à base circulaire une tangente parallèle à une direction donnée.

On reconnaît sans difficulté que la courbe d'ombre produite à l'intérieur du cône est entièrement cachée sur la projection verticale et vue sur la projection horizontale.

Assez bonne solution : M. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

Groupe II.

Mathématiques.

2174. — *On considère dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy. *Un point matériel* M, *de masse égale à* 1, *est mobile dans ce plan sous l'action d'une force* (F) *dont les projections* X *et* Y *sur les axes sont* $X = x$, $Y = y - 4x$, *x et y désignant les coordonnées du point* M.

1° *Former et intégrer les équations différentielles du mouvement du point* M.

2° *Déterminer le mouvement du point* M *en supposant qu'à l'origine du temps ses coordonnées sont* $(\alpha, 0)$ *et que sa vitesse a pour projections sur les axes* $(-\alpha, 2\alpha)$. *Construire la trajectoire* (T) *correspondant à ce mouvement.*

3° *Evaluer le temps mis par le mobile pour aller d'un point quelconque* M *de sa trajectoire* (T) *au point* M′ *où la tangente à la trajectoire est parallèle au rayon vecteur* OM.

4° *Démontrer que l'hodographe du mouvement est une courbe homothétique de la trajectoire* (T) *et calculer à* 0,01 *près le rapport d'homothétie.*

5° *La trajectoire* (T) *passe par le point* O. *Evaluer, en fonction de l'abscisse du point* M, *l'aire limitée par l'arc de courbe* OM *et la corde* OM, *ainsi que le volume engendré par cette aire tournant autour de* Oy.

1. Les équations différentielles du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y - 4x.$$

La première a pour intégrale générale

$$(2) \qquad x = Ae^t + Be^{-t},$$

A et B étant des constantes arbitraires ; et en remplaçant x par cette valeur la seconde devient

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - y = -4Ae^t - 4Be^{-t}.$$

L'équation sans second membre a pour intégrale générale $A'e^t + B'e^{-t}$, et pour avoir l'intégrale générale de l'équation avec second membre il suffit d'ajouter à $A'e^t + B'e^{-t}$ une intégrale particulière de chacune des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = -4Ae^t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - y = -4Be^{-t}.$$

Comme 1 et -1 sont racines simples de l'équation caractéristique $f(r) \equiv r^2 - 1 = 0$, la première de ces équations a pour intégrale $-\frac{4Ate^t}{f'(1)}$, ou $-2Ate^t$, et la seconde $-\frac{4Bte^{-t}}{f'(-1)}$, ou $+2Bte^{-t}$.

L'intégrale générale de l'équation (3) est donc

(4) $$y = A'e^t + B'e^{-t} - 2Ate^t + 2Bte^{-t}.$$

Le système (1) est intégré par les relations (2) et (4).

2. Nous en tirons $$\frac{dx}{dt} = Ae^t - Be^{-t},$$

$$\frac{dy}{dt} = A'e^t - B'e^{-t} - 2A(e^t + te^t) + 2B(e^{-t} - te^{-t}).$$

Ecrivons que, pour $t = 0$, on a $x = \alpha$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = -\alpha$, $\frac{dy}{dt} = 2\alpha$; nous obtenons

$$A + B = \alpha, \qquad A' + B' = 0, \qquad A - B = -\alpha, \qquad A' - B' - 2A + 2B = 2\alpha.$$

Nous en tirons aisément $A = 0$, $B = \alpha$, $A' = 0$, $B' = 0$, et par suite le mouvement du point M est défini par les équations $x = \alpha e^{-t}$, $y = 2\alpha te^{-t}$: ce sont les équations paramétriques de la trajectoire.

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha e^{-t}, \qquad \frac{dy}{dt} = -2\alpha e^{-t}(t-1), \qquad \frac{dy}{dx} = 2(t-1).$$

On en déduit les variations de x et y :

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	↘	α	↘	$\frac{\alpha}{e}$	↘	0
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2\alpha}{e}$	↘	0

et la forme de la trajectoire (T).

Quand t varie de 0 à $+\infty$, le point M décrit cette trajectoire dans le sens $M_0MM'O$. La tangente au point M_0 a pour pente -2, et la vitesse initiale M_0V_0 a pour extrémité le point $(0, 2\alpha)$. D'ailleurs, le vecteur vitesse MV en un point M quelconque a son extrémité V sur Oy, puisqu'on a

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha e^{-t} = -x.$$

La tangente en O est Oy, puisque $\frac{dy}{dx}$ est infini pour t infini.

3. Soit $M(x, y)$, la position du mobile à l'instant t ; la pente de la droite OM est

$$\frac{y}{x} = \frac{2\alpha te^{-t}}{\alpha e^{-t}} = 2t.$$

D'autre part, soit t' l'instant où le mobile occupe la position M' où la tangente est parallèle à OM. La tangente au point M' a pour pente $2(t'-1)$; on doit donc avoir $2(t'-1) = 2t$, ou $t' = t + 1$. Par suite, le temps mis par le mobile pour aller du point M au point M' est égal à 1. Il est indépendant de la position du point M.

4. Les équations paramétriques de l'hodographe (H) relatif au point O sont

$$\xi = -\alpha e^{-\theta}, \qquad \eta = -2\alpha e^{-\theta}(\theta - 1).$$

On en déduit

$$\frac{\xi}{x} = -\frac{e^{-\theta}}{e^{-t}}, \qquad \frac{\eta}{y} = -\frac{e^{-\theta}(\theta - 1)}{te^{-t}}.$$

A toute valeur de t faisons correspondre la valeur θ définie par l'égalité $\theta - 1 = t$, ou $\theta = t + 1$; les formules précédentes deviennent

$$\frac{\xi}{x} = -\frac{1}{e}, \qquad \frac{\eta}{y} = -\frac{1}{e}.$$

On en conclut que l'hodographe (H) est homothétique de la trajectoire (T), le centre d'homothétie étant l'origine et le rapport d'homothétie étant égal à $-\frac{1}{e}$.

Pour calculer $\frac{1}{e}$ à 0,01 près par défaut, considérons une valeur approchée de e par excès, $e + \alpha$. Si on remplace e par $e + \alpha$, l'erreur commise sur $\frac{1}{e}$ est $\frac{1}{e} - \frac{1}{e+\alpha} = \frac{\alpha}{e(e+\alpha)}$; elle est moindre que $\frac{\alpha}{e^2}$. Donc si on prend $\alpha < 0{,}01$, on a $\frac{1}{e} - \frac{1}{e+\alpha} < 0{,}01$.

La valeur de e à 0,01 près par excès est 2,72. Divisons 1 par 2,72 et prenons les deux premiers chiffres décimaux, nous obtenons 0,36 qui est la valeur de $\frac{1}{e}$ à 0,01 près par défaut.

Donc le rapport d'homothétie demandé est $-0{,}36$.

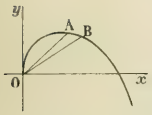
5. L'aire limitée par l'arc de courbe OM et la corde OM a pour valeur

$$A = \frac{1}{2}\int_t^{t+\alpha}(xdy - ydx).$$

Un calcul facile donne $xdy - ydx = 2\alpha^2 e^{-2t}dt$: on a donc

$$A = \alpha^2\int_t^{t+\alpha} e^{-2t}dt = -\frac{\alpha^2}{2}\left|e^{-2t}\right|_t^{t+\alpha} = \frac{\alpha^2 e^{-2t}}{2}, \qquad \text{ou} \qquad A = \frac{x^2}{2}.$$

Calculons maintenant le volume V engendré par cette aire en tournant autour de Oy. Pour cela, nous décomposons cette aire en secteurs infiniment petits, tels que OAB, et nous remplaçons chacun de ces secteurs par le triangle OAB qui est un infiniment petit équivalent.



Le volume engendré par le triangle en tournant autour de Oy est égal au produit de l'aire de ce triangle par la circonférence que décrit le centre de gravité, c'est-à-dire à

$$\text{aire OAB} \times 2\pi d,$$

d désignant la distance du centre de gravité à Oy.

On a aire OAB $= \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \alpha^2 e^{-2t}dt$; on peut remplacer d par les $\frac{2}{3}$ de l'abscisse du point A, c'est-à-dire par $\frac{2}{3}\alpha e^{-t}$; par suite le volume engendré par le triangle est $\frac{4\pi\alpha^3}{3}e^{-3t}dt$, et le volume cherché est

$$V = \frac{4\pi\alpha^3}{3}\int_t^{t+\alpha} e^{-3t}dt = \frac{4\pi\alpha^3}{9}e^{-3t} = \frac{4\pi x^3}{9},$$

x désignant l'abscisse du point M.

BETBÉZÉ-CULI, lycée de Toulouse.

Bonnes solutions par MM. E. Berlande, école normale de Saint-Cloud ; R. Dufour, école normale de Nancy ; L. Naucelle, à La Châtre ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

2175. — *Evaluer à 0,01 près les intégrales*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}.$$

Par le changement de variable $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, la première intégrale devient

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{5}}\right|_0^{+\infty}$$

ou

$$I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}.$$

Soient α et β les erreurs par défaut commises sur π et $\sqrt{5}$; l'erreur commise sur I sera

$$\frac{\pi\sqrt{5}}{5} - \frac{(\pi-\alpha)(\sqrt{5}-\beta)}{5} = \frac{\beta\pi + \alpha\sqrt{5} - \alpha\beta}{5};$$

elle est plus petite que

$$\frac{\beta\pi + \alpha\sqrt{5}}{5}.$$

Or nous avons $\pi = 3{,}141\ldots$, $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$

Si nous prenons π et $\sqrt{5}$ avec deux décimales, nous avons $\alpha < 0{,}002$, $\beta < 0{,}007$ et l'erreur est moindre que $\frac{0{,}007 \times 3{,}2 + 0{,}002 \times 2{,}3}{5}$ ou que $\frac{6}{1000}$.

On trouve $\frac{3{,}14 \times 2{,}23}{5} = \frac{7{,}0022}{5} = 1{,}40$ à $\frac{1}{100}$ près.

La seconde intégrale s'écrit, au moyen du même changement de variables,

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)dt}{(t^2+5)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2+5-4}{(t^2+5)^2}dt,$$

ou

$$I_2 = I_1 - 8\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+5)^2}.$$

Or on sait que

$$\int \frac{dt}{(t^2+5)^2} = \frac{1}{10}\left[\frac{t}{t^2+5} + \int \frac{dt}{t^2+5}\right];$$

on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+5)^2} = \frac{1}{20} I_1$$

et par suite $I_2 = \frac{3}{5} I_1 = \frac{3 \times 1{,}40}{5} = 0{,}84$, à $\frac{1}{100}$ près.

Emile DION, École normale supérieure de St-Cloud.

Bonnes solutions par MM. A. Berlande, école normale supérieure de St-Cloud ; G. Lacu, à Douai ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Topin, à Grandvilliers ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

PHYSIQUE

2168. — *Une sphère conductrice de 1m de rayon, éloignée de tout autre conducteur, est portée à un potentiel de 50 unités électrostatiques C. G. S, par rapport au sol. On demande :*

1° *La charge en coulombs prise par la sphère ;*

2° *L'intensité du champ électrique en unités C. G. S. dans le voisinage immédiat de la sphère et à une distance de 10cm du centre de la sphère ;*

3° *La valeur de la pression électrostatique sur la sphère, évaluée en millimètres de mercure ;*

4° *La force en grammes qui tendrait à séparer sous l'action de cette pression les deux moitiés de la sphère, si celle-ci était coupée suivant un plan diamétral.*

(*Ecole des mines, 1913.*)

1. La charge Q est donnée par la relation $Q = CV$, C étant la capacité et V le potentiel. Pour une sphère conductrice, éloignée de tout autre conducteur, $C = R$, R étant le rayon, ici égal à l'unité. Donc $Q = 50$ C. G. S. Mais le coulomb vaut 3×10^9 C. G. S. Le nombre demandé est donc

$$\frac{50}{3 \times 10^9} = 16{,}7 \times 10^{-9}.$$

2. Le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur couvert d'électricité de densité σ, dans un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique k, est

$$H = \frac{4\pi\sigma}{k}.$$

Dans le cas qui nous occupe, le diélectrique est de l'air et $k = 1$, $\sigma = \frac{50}{4\pi}$, donc

$$H = 50.$$

En un point extérieur, la sphère agit comme si toute la charge était au centre et le champ est $\frac{Q}{r^2}$, r étant la distance du point considéré au centre. Pour $Q = 50$ et $r = 10$ on a

$$H' = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

Ce mode de calcul s'appliquerait d'ailleurs tout aussi bien dans le voisinage immédiat de la sphère.

3. La pression électrostatique à la surface d'un conducteur électrisé est donnée par la formule $p = 2\pi\sigma^2$ et l'application numérique donne ici

$$p = 2\pi\left(\frac{50}{4\pi}\right)^2 = \frac{2\,500}{8\pi} = 99{,}5.$$

Identifions avec la pression produite par n millimètres de mercure, évaluée en unités C. G. S.

$$\frac{n}{10} \times 13{,}6 \times 981 = \frac{2\,500}{8\pi}.$$

$$n = 0{,}07.$$

4. On sait que la pression qui agit sur un hémisphère produit la même force que sur la surface d'un grand cercle. Ici cette surface est égale à π, donc la force, en unités C. G. S., vaut

$$f = \frac{2\,500}{8\pi} \times \pi = \frac{2500}{8}.$$

Or le poids d'un gramme vaut 981 C. G. S. Le nombre cherché m est donc

$$m = \frac{2500}{8 \times 981} = 0{,}3.$$

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions de MM. Topin, à Grandvilliers ; M. Ullmann, à Héricourt.

CHIMIE

2169. — *On fait passer un mélange de formène et d'éthylène dans un tube contenant de l'oxyde de cuivre chauffé au rouge, puis dans une série de tubes à ponce sulfurique et à potasse.*

On observe une augmentation de poids de 3 grammes pour les tubes à ponce sulfurique, et de 6 grammes pour les tubes à potasse.

On demande de déduire de ces résultats :

1° Le volume du mélange gazeux initial, mesuré à 0° et sous la pression de 760mm,

2° La composition en volume de ce mélange.

(On prendra pour poids atomiques : O = 16 ; H = 1 ; C = 12 ; *pour densité de l'oxygène :* 1,1052 ; *pour poids du litre d'air à 0° et 760mm :* 1g,293 .

(École des mines, 1913.)

L'oxyde de cuivre chauffé cède son oxygène et l'oxydation des deux carbures donne de l'eau et de l'anhydride carbonique.

Soient x et y les nombres respectifs de molécules-grammes de formène et d'éthylène contenus dans le mélange. Les combustions seront représentées par les équations

$$x(CH^4 + 4CuO = CO^2 + 2H^2O + 4Cu),$$

$$y(C^2H^4 + 6CuO = 2CO^2 + 2H^2O + 6Cu).$$

L'augmentation de poids des tubes à ponce indique qu'il s'est formé 3 grammes d'eau.

Le poids moléculaire de l'eau étant 18, on a donc

$$(1) \qquad 2(x+y)18 = 3, \qquad \text{d'où} \qquad x+y = \frac{1}{12}.$$

Le volume total du mélange gazeux initial est $(x+y)V$, V désignant le volume moléculaire. Or l'oxygène étant diatomique, son poids moléculaire est 32 et le volume moléculaire, à 0° et sous la pression 760mm, sera

$$V = \frac{32}{1,293 \times 1,1052} = 22^l,4.$$

Le volume du mélange était donc

$$\frac{1}{12}\,22,4 = 1^l,867.$$

D'autre part, l'augmentation de poids des tubes à potasse étant de 6 grammes et le poids moléculaire de l'anhydride carbonique égal à 44, on a

$$(2) \qquad (x+2y)44 = 6, \qquad \text{d'où} \qquad x+2y = \frac{3}{22}.$$

Des deux équations (1) et (2) on tire $x = \frac{4}{132}$ et $y = \frac{7}{132}$.

On a donc, pour les volumes respectifs des deux gaz :

Formène : $\frac{4}{132} \times 22,4 = 0^l,679.$

Éthylène : $\frac{7}{132} \times 22,4 = 1,188$

G. LACH, à Douai.

Assez bonnes solutions de MM. Maurice Roi et Marcel Ullmann.

QUESTIONS PROPOSÉES

2238. — I. Intégration de l'équation linéaire du premier ordre par la méthode de variation des constantes ; donner un exemple.

II. Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires et C une courbe tracée dans l'angle positif de ces axes. On désigne par P le pied de l'ordonnée d'un point quelconque M de cette courbe, par T le point de rencontre de la tangente en M avec l'axe Ox et on suppose $\overline{OT} = \overline{OP}$.

1° Déterminer les courbes C pour lesquelles l'aire comprise entre l'axe Ox, la courbe C, l'axe Oy et l'ordonnée PM est égale à l'aire du triangle PMT. Construire les courbes C.

2° Démontrer que les deux aires précédentes supposées homogènes ont par rapport à l'axe Oy des moments d'inertie dont le rapport est constant quel que soit le point M sur une quelconque des courbes C.

(*Certificat de Mathématiques générales, Nancy, juillet 1912.*)

2239. — On considère l'un des deux systèmes de sphères qui soit tangentes à deux sphères données; démontrer que le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné se compose de deux quadriques. Solution analytique; solution géométrique.

G. Fontené.

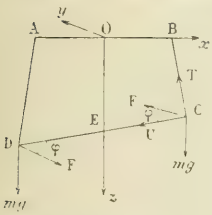
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1910.

Mathématiques.

2129. — a) *Un quadrilatère articulé* ABCD, *dont les côtés ont des longueurs invariables* $AB = 2a$, $BC = AD = c$, $DC = 2b$, *se déforme de sorte que le côté* AB *reste horizontal et fixe et que le milieu* E *du côté* DC *reste sur la verticale* Oz *du milieu* O *de* AB.



1° *Définir la courbe* (C) *lieu du sommet* $C(x, y, z)$ *par les équations de ses projections* (C_z), (C_y), (C_x) *sur le plan horizontal* xOy *et sur les plans verticaux rectangulaires* xOz, yOz (*l'axe* Ox *est dirigé suivant le côté fixe* AB).

2° *Calculer les coordonnées* x, y, z *de* C *en fonction de l'angle* θ *des plans* xOz *et* COD. *Montrer que dans le cas particulier où* a, b, c *sont liés par une certaine relation* R *telle que la courbe* (C_x), *projection de* (C) *sur* yOz, *passe par le point* O, *ces coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un même paramètre.*

3° *Nature des courbes* (C_y) *et* (C_z).

Construire la courbe (C_x); *étudier sa déformation lorsque* c *varie,* a *et* b *gardant des valeurs constantes.*

4° *Calculer l'aire de la courbe* (C_x) *dans le cas où* a, b, c *sont liés par la relation* R.

Calculer la longueur de (C_x) *pour* $\frac{a}{8} = \frac{c}{9} = h$; *vérifier que cette longueur est quadruple de celle de la courbe* (C_z).

b) *Aux sommets* C *et* D *du même quadrilatère articulé, constitué par des barres rigides non pesantes et dont le côté* AB *est maintenu horizontal et fixe, sont fixés deux points matériels de masses égales* m, *soumis à l'action de la pesanteur dirigée suivant* Oz *et d'accélération* g.

1° *Etablir que les configurations du quadrilatère dépendent de trois paramètres dans le cas général, mais que les configurations, telles que* C *et* D *soient symétriques par rapport à* Oz, — *ou «* configurations θ » (θ, *angle de* xOz *avec* COD) — *dépendent du seul paramètre* θ.

2° *On applique en* C *et* D *deux forces horizontales* F, F *constamment perpendiculaires à la droite* CD *et formant un couple. Déterminer* F *par la condition que la* configuration θ *soit une configuration d'équilibre; on déterminera les expressions en fonction de* θ *des forces* F *et des tensions* T, U *des lignes* CB *et* CD.

3° *Même question, lorsque les forces* F, F, *horizontales et formant toujours un couple, font un angle quelconque* φ *avec* CD.

4° *Vérifier que lorsqu'on passe de la configuration* θ *d'équilibre à la configuration* $\theta + d\theta$, *la somme algébrique des travaux des forces* F (*définies comme au* 3°) *et* mg, *appliquées aux points* C *et* D, *est nulle.*

a) **Première partie.** — Nous prendrons pour axes de coordonnées les trois axes indiqués dans l'énoncé : le point O est le milieu de AB, l'axe des x est dirigé suivant OB, l'axe des z est la verticale descendante, et l'axe des y en découle.

1. Désignons par x, y, z les coordonnées du point C, par x', y', z' celles de D ; nous aurons successivement, en exprimant que les deux points C et D décrivent des sphères de centres B et A et que le milieu de CD est sur Oz,

$$(x-a)^2+y^2+z^2=c^2,$$
$$(x+a)^2+y^2+z^2=c^2,$$
$$x+x'=0,$$
$$y+y'=0.$$

Remplaçons maintenant x' par $(-x)$, y' par $(-y)$ et retranchons ensuite les deux premières équations l'une de l'autre ; nous aurons

$$z^2-z'^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(z-z')(z+z')=0.$$

Nous sommes donc conduits à prendre

$$z=z' \qquad \text{ou} \qquad z=-z'.$$

La deuxième solution correspond au cas où les deux points C et D sont symétriques par rapport au point O ; dans ce cas, OC et BC étant constants tous les deux, le point C décrit un cercle dont le centre est sur Ox et le plan perpendiculaire à Ox ; le point D décrit le cercle symétrique par rapport au point O. La première solution, $z=z'$, est donc la seule intéressante. Ajoutons maintenant aux équations du début l'équation

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=4b^2,$$

qui exprime que la distance DC est constante et égale à $2b$; remplaçons-y x' par $(-x)$, y' par $(-y)$ et z' par z ; elle deviendra

$$x^2+y^2=b^2.$$

Le lieu du point C est donc la courbe d'intersection des deux surfaces

$$(x-a)^2+y^2+z^2=c^2,$$
$$x^2+y^2=b^2.$$

Ce lieu est une biquadratique, intersection de la sphère et du cylindre droit d'axe Oz.

Les projections de cette courbe sur les plans de coordonnées sont : d'abord, dans le plan des xy, le cercle

$$x^2+y^2=b^2;$$

ensuite, dans le plan des zx, la parabole

$$z^2-2ax+a^2+b^2-c^2=0,$$

parabole dont l'axe est situé sur Ox et dont la concavité est tournée vers les x positifs ; enfin, sur le plan des yz, la courbe du quatrième degré

$$(z^2+2za^2+b^2-c^2+a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2-4a^2y^2.$$

Il s'agit d'étudier cette dernière courbe.

2. Pour que le quadrilatère ABCD soit possible, il faut d'abord que le côté AB soit plus petit que la somme des trois autres, ce qui donne

$$a<b+c;$$

il faut aussi que le côté CD soit plus petit que la somme des trois autres, donc

$$b<a+c.$$

Si on a fixé laquelle des deux longueurs a et b est la plus grande, il suffit d'envisager une seule de ces inégalités ; ainsi, si on sait que $a>b$, la seconde inégalité est évidente, et la première seule est à considérer.

Soit θ l'angle que fait le plan COD avec le plan des zx, c'est-à-dire l'angle que fait la droite EC avec Ox ; les coordonnées du point C sont

$$x=b\cos\theta, \qquad y=b\sin\theta, \qquad z=\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab\cos\theta}.$$

Pour que la courbe C_x passe par l'origine des coordonnées, il faut que l'on ait

$$(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2,$$

c'est-à-dire

$$a^2+b^2-c^2=\pm 2ab,$$

qui se décompose en quatre relations :

$$a+b=\pm c \qquad \text{et} \qquad a-b=\pm c.$$

La relation $a+b=-c$ est inacceptable, ainsi que les relations $b=a+c$ et $a=b+c$; reste donc la relation

$$c=a+b,$$

telle est la relation B.

Portons alors la valeur de c dans z, nous aurons

$$z=\sqrt{2ab(1+\cos\theta)};$$

or, $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$; donc nous aurons

$$z = 2\sqrt{ab}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Il est inutile de prendre le double signe, car en changeant θ en $(\theta + 2\pi)$, x et y ne changent pas et z change simplement de signe. Il suffit alors de prendre pour variable

$$t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{4}$$

pour obtenir, pour x, y, z, des fonctions rationnelles du paramètre t.

3. La nature des courbes C_z et C_y est évidente et a été indiquée; il reste à étudier la courbe C_x. Pour étudier cette courbe, lorsque c varie, nous remplacerons y^2 par u et z^2 par v; l'équation deviendra ainsi

$$4a^2u = -v^2 - 2v(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires Ou et Ov, cette courbe représente une parabole dont l'axe est parallèle à Ou, dont la concavité est tournée vers les u négatifs et qui rencontre l'axe Ov aux points dont les ordonnées sont

$$v = \pm 2ab + c^2 - a^2 - b^2$$

c'est-à-dire

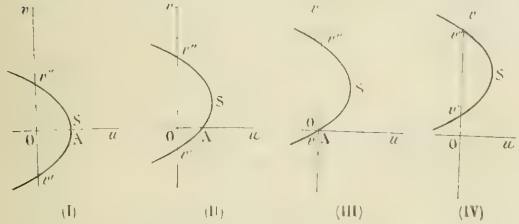
$$v' = c^2 - (a+b)^2 \qquad \text{et} \qquad v'' = c^2 - (a-b)^2 :$$

or, nous avons vu que

$$a < b + c \qquad \text{ou} \qquad b < a + c ;$$

donc sûrement on a $c > |a - b|$; la seconde racine est toujours positive.

Si $c < a + b$, la première est négative et on a la disposition (I) si l'ordonnée du sommet est négative c'est-à-dire si $|c'| > c''$; on a la disposition (II) dans le cas contraire, avec, comme cas intermédiaire, le cas où le sommet est sur Ou.



Si la relation R est vérifiée, la parabole passe à l'origine et on a la disposition (III). Enfin, on a la disposition (IV) quand v' et v'' sont positifs.

Si nous rappelons maintenant que

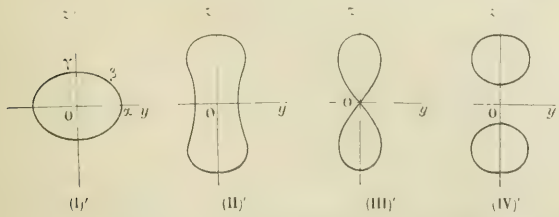
$$u = y^2 \qquad \text{et} \qquad v = z^2,$$

nous remarquons que le seul arc utilisable de la courbe est celui du premier angle des axes :

Av'' dans le cas de la figure (I);
ASv'' dans le cas de la figure (II);
OSv'' dans le cas de la figure (III);
$v'Sv''$ dans le cas de la figure (IV).

En suivant alors un point qui se meut sur la parabole et qui décrit les arcs signalés, nous aurons les diverses formes de la courbe C_x. Nous ne construirons d'ailleurs que la partie qui correspond à z et y positifs, c'est-à-dire qui est dans le premier angle des axes.

Cas I : Considérons un point M qui aille de A en v'', en décrivant l'arc Av'' d'une manière continue ; alors y^2 part de OA, z est nul, puis y^2 diminue, z^2 augmente, et en v'', y est nul et z est maximum. Nous obtenons donc un arc de la forme $\alpha\beta\gamma$ qu'il suffit de répéter par symétrie par rapport aux deux axes ; la courbe est dans ce cas un ovale qui ne présente pas de sinuosités [*fig.* (I)'].



Cas II : y^2 part de OA et z de 0; z croît toujours, mais y passe par un maximum, puis décroît jusque 0. On a alors la figure (II)'; la courbe est encore une courbe fermée, mais qui a des points d'inflexion.

Cas III : z part encore de 0, les deux sommets situés sur Oy sont confondus en O et la courbe a un point double en O. La forme de cette courbe rappelle celle de la lemniscate [*fig.* (III)'].

Cas IV : z ne peut varier que de $\sqrt{Oc'}$ à $\sqrt{Oc''}$ et la courbe se compose de deux ovales symétriques par rapport à l'axe Oy (*fig.* (IV)).

4. Lorsque la relation R est vérifiée, les équations paramétriques de la courbe C_x sont

$$x = b\cos\theta,$$
$$y = b\sin\theta,$$
$$z = 2\sqrt{ab}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Pour avoir l'aire de la boucle de cette courbe, il faut calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\sqrt{ab}} y\,dz,$$

$2\sqrt{ab}$ étant la valeur maximum de z, puis multiplier par 2 et encore par 2, si on veut l'aire des deux boucles ; donc l'aire totale est

$$4\int_0^{2\sqrt{ab}} y\,dz.$$

Remplaçons y et z par leurs valeurs en fonction de θ ; on a $y = b\sin\theta$, $dz = -\sqrt{ab}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$ et, pour les limites, on a les valeurs π et 0, de sorte que l'aire sera égale à

$$-4b\sqrt{ab}\int_\pi^0 \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

L'intégrale indéfinie est immédiate : si on remplace en effet $\sin\theta$ par $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, cette intégrale devient

$$\int 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\int \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\sin\frac{\theta}{2};$$

l'intégrale indéfinie est donc

$$\frac{4}{3}\sin^3\frac{\theta}{2},$$

et, prise entre les limites π et 0, elle donne $\left(-\frac{4}{3}\right)$; donc l'aire totale A est égale à

$$\frac{16b\sqrt{ab}}{3}.$$

Proposons-nous maintenant de calculer la longueur de la courbe C_x pour

$$\frac{a}{8} = \frac{c}{9} = b,$$

c'est-à-dire pour $a = 8b$ et $c = 9b$.

Dans ce cas, on a bien $c = a + b$, c'est-à-dire la relation R ; on est donc dans le cas où la courbe est unicursale, où C_x a un point double à l'origine des coordonnées.

Dans ce cas, on a

$$y = b\sin\theta \qquad \text{et} \qquad z = 4\sqrt{2}\,b\cos\frac{\theta}{2},$$

et nous aurons l'arc de cette courbe en calculant $ds^2 = dy^2 + dz^2$.

Or,
$$dy = b\cos\theta\,d\theta, \qquad dz = -2\sqrt{2}\,b\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\ ;$$

donc,
$$ds^2 = b^2\left(\cos^2\theta + 8\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta^2.$$

et comme
$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = (1 - \cos\theta),$$
$$ds^2 = b^2(\cos^2\theta - 4\cos\theta + 4)d\theta^2\ ;$$

ds^2 est donc un carré parfait et on a

$$ds = b(2 - \cos\theta)d\theta,$$

différentielle qui s'intègre immédiatement et qui donne $s = b(2\theta - \sin\theta) + C^{te}$.

Nous aurons la longueur de la moitié de la boucle en prenant les limites 0 et π, ce qui nous donne $2\pi b$. La longueur totale est donc $8\pi b$. C'est bien quatre fois la longueur du cercle C_x.

b) **Deuxième partie.** — 1. Les diverses positions du quadrilatère dépendent évidemment des coordonnées

du point C et de celles du point D. Il existe entre elles les trois relations

$$(x-a)^2+y^2+z^2-c^2=0,$$
$$(x'+a)^2+y'^2+z'^2-c^2=0,$$
$$x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=4b^2;$$

donc les configurations générales du quadrilatère dépendent de trois paramètres variables et arbitraires ; s'il s'agit d'une configuration 0, les coordonnées du point C et celles du point D s'expriment toutes à l'aide de l'angle θ et il n'y a plus qu'un seul paramètre arbitraire :

C $\quad x=b\cos\theta, \quad y=b\sin\theta, \quad z=\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab}\cos\theta;$

D $\quad x'=-b\cos\theta, \quad y'=-b\sin\theta, \quad z'=z.$

2. Le point C est en équilibre sous l'action des quatre forces mg, F, T et U; les cosinus directeurs de ces forces sont :

pour mg,	0,	0,	1 ;
pour F,	$-\sin\theta$,	$\cos\theta$,	0 ;
pour T,	$\frac{a-x}{c}$,	$\frac{-y}{c}$,	$\frac{-z}{c}$;
pour U,	$-\cos\theta$,	$-\sin\theta$,	0.

Il n'y a plus qu'à projeter sur trois axes rectangulaires et écrire à chaque fois que la somme des projections est nulle. Nous choisirons les axes horizontaux θ, $\theta+\frac{\pi}{2}$ et l'axe vertical. Sur l'axe θ nous avons

$$T\cos V-U=0,$$

cos V étant le cosinus de l'angle des deux axes CB et DC ; cos V a donc pour valeur

$$\frac{a-x}{c}\cos\theta-\frac{y}{c}\sin\theta,$$

et la relation est

$$U=T\,\frac{(a-x)\cos\theta-y\sin\theta}{c}.$$

Sur l'axe $\theta+\frac{\pi}{2}$, nous avons

$$F+T\cos V'=0,$$

cos V' étant le cosinus de l'angle que font entre eux l'axe CB et l'axe $\theta+\frac{\pi}{2}$,

$$\cos V'=-\frac{a-x}{c}\sin\theta-\frac{y}{c}\cos\theta,$$

et la relation devient

$$F=T\,\frac{(a-x)\sin\theta+y\cos\theta}{c}.$$

Enfin, sur l'axe des z nous avons

$$mg-T\frac{z}{c}=0.$$

Cette dernière relation donne T en fonction de mg et les autres donnent de suite F et U, c'est-à-dire la condition d'équilibre et l'autre tension :

$$T=\frac{mgc}{z},$$
$$F=mg\,\frac{(a-x)\sin\theta+y\cos\theta}{z},$$
$$U=mg\,\frac{(a-x)\cos\theta-y\sin\theta}{z}.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer dans ces équations x, y, z par leurs valeurs en fonction de θ, et nous avons définitivement

$$T=\frac{mgc}{\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab\cos\theta}},\qquad F=\frac{mag\sin\theta}{\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab\cos\theta}},$$
$$U=mg\,\frac{a\cos\theta-b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2+2ab\cos\theta}}.$$

3. Si les forces F, F' font un angle φ avec CD, il faudra remplacer F dans la question précédente par F sin φ et U par U — F cos φ. La modification à apporter aux calculs est donc insensible.

4. Si enfin on applique le principe des vitesses virtuelles au point matériel C, on voit que les deux forces T et U ont un travail nul, puisqu'elles sont perpendiculaires au déplacement infiniment petit du point C,

lequel est situé à la fois sur une sphère de centre B et sur un cylindre de révolution autour de Oz ; les travaux de mg et de F restent seuls et on a

$$mgdz + Fbd\theta = 0.$$

Or

$$dz = \frac{-ab\sin\theta d\theta}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\theta}};$$

par conséquent,

$$F = \frac{mag\sin\theta}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\theta}}.$$

Nous retrouvons ainsi plus rapidement la condition d'équilibre.

Bonnes solutions MM. Bertrézé-Celi Octave, à Toulouse ; A. Rousseau, à Fournes-en Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2127. — *La tangente en un point* M *quelconque d'une ellipse rencontre le diamètre passant par le centre* C *de courbure en* M, *au point* P. *Lieu de ce point* P. *Son degré. Construire la courbe.*

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes, et soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point M ; on sait que les coordonnées du centre de courbure C au point M sont $x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi$, $y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi$.

La droite OC a donc pour équation $\frac{y}{x} = -\frac{a\sin^3\varphi}{b\cos^3\varphi}$,

et la tangente au point M, $\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi - 1 = 0$.

En résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on obtient

$$x = \frac{ab^2\cos^3\varphi}{b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi}, \qquad y = \frac{-a^3b\sin^3\varphi}{b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi};$$

ce sont les équations paramétriques du lieu demandé.

On voit aisément que ce lieu est symétrique par rapport aux deux axes, et que pour en avoir le quart il suffit de faire varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Dans cet intervalle x et y sont des fonctions continues sauf pour la valeur α définie par l'équation

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

On a

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{ab^2\sin\varphi\cos^2\varphi\,[3a^2\sin^4\varphi + 4a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b^2\cos^4\varphi]}{(b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{-a^2b\cos\varphi\sin^2\varphi\,[a^2\sin^4\varphi + 4b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 3b^2\cos^4\varphi]}{(b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi)^2}.$$

On en conclut que, dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, x est une fonction croissante et y une fonction décroissante.

φ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
x	a	croît	$+\infty$	$-\infty$ croît	0
y	0	décroît	$-\infty$	$+\infty$ décroît	b

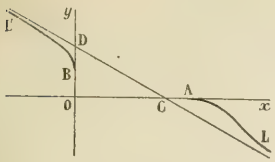


Fig. 1.

On en déduit les deux branches de courbe AL et L'B. Au point $A(a, 0)$, $\frac{dy}{dx}$ est nul, la tangente est Ox ; au point $B(0, b)$, $\frac{dy}{dx}$ est infini, la tangente est Oy.

Cherchons l'asymptote. Nous avons

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{b}\operatorname{tg}^3\varphi.$$

et pour $\varphi = \alpha$, $\lim \frac{y}{x} = -\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$.

La direction asymptotique a pour pente $-\sqrt{\frac{b}{a}}$. Pour avoir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, nous formons

$$y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{-a^2b\sin^3\varphi + \sqrt{\frac{b}{a}}\,ab^2\cos^3\varphi}{b^2\cos^4\varphi - a^2\sin^4\varphi} = \frac{b}{\cos\varphi}\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \operatorname{tg}^3\varphi}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \operatorname{tg}^4\varphi},$$

ou, en divisant haut et bas par $\sqrt{\frac{b}{a}} - \operatorname{tg}\varphi$,

$$y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{b}{\cos\varphi}\cdot\frac{\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \operatorname{tg}\varphi\right)\left(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}^2\varphi\right)}.$$

Pour $\varphi = \alpha$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$,

donc $$\lim\left(y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right) = \frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)}.$$

Donc l'équation de l'asymptote est

$$Y + \sqrt{\frac{b}{a}}\,x = \frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)}.$$

Pour déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote, étudions le signe de la différence

$$y - Y = \frac{b}{\cos\varphi}\cdot\frac{\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \operatorname{tg}\varphi\right)\left(\frac{b}{a} + \operatorname{tg}^2\varphi\right)} - \frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)},$$

qu'on peut écrire, en posant $\operatorname{tg}\varphi = t$, $\sqrt{\frac{b}{a}} = m$,

$$y - Y = b\left[\frac{\sqrt{1+t^2}(t^2+mt+m^2)}{(t+m)(t^2+m^2)} - \frac{3\sqrt{1+m^2}}{4m}\right];$$

nous voyons ainsi qu'aux environs de $t = m$, $y - Y$ a le signe de

$$f(t) = 4\sqrt{1+t^2}(t^2+mt+m^2) - \frac{3\sqrt{1+m^2}}{m}(t+m)(t^2+m^2).$$

On vérifiera sans difficulté que pour $t = m$ $f'(t)$ est négatif, donc pour $t = m$ la fonction $f(t)$

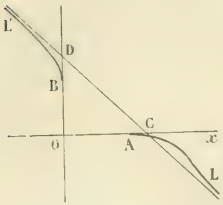


Fig. 2.

est décroissante ; on en conclut que si

$$\varphi < \alpha, \qquad y - Y > 0, \qquad \text{et si} \qquad \varphi > \alpha, \qquad y - Y < 0.$$

Par suite, la branche AL est au-dessus de l'asymptote, et la branche BL′ est au-dessous.

D'autre part, l'asymptote rencontre Oy en un point D dont l'ordonnée $\frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)}$ est supérieure à b ; elle rencontre Ox en un point C dont l'abscisse $\frac{3}{4}\sqrt{a(a+b)}$ est inférieure à a si $b < \frac{7a}{9}$ (c'est le cas de la figure 1) et est supérieure à a si $b > \frac{7a}{9}$ (figure 2).

Il n'y a plus qu'à achever par symétrie par rapport aux deux axes.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions par MM. Gaston Betier, 20e d'artillerie à Poitiers ; Gabriel Husson, lycée de Saint-Etienne ; G. Lach, à Douai ; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; Maurice Roi ; Marcel Ullmann et Jean Dodier, 47e d'artillerie, à Hericourt.

PHYSIQUE

2182. — *Une masse m de fer de chaleur spécifique c sortant d'un four à T degrés est plongée dans l'eau d'un calorimètre à zéro dont la masse en eau est M ; la température finale du système se fixe à θ degrés ; on néglige toutes les pertes par rayonnement et autres. Au moment de l'immersion une masse x de l'eau est vaporisée à une température que l'on admet être de cent degrés.*

S'il n'était pas tenu compte de cette évaporation le calcul donnerait une valeur erronée T′. On demande quel doit être le poids x pour que l'erreur commise ainsi soit de 5 % sur l'évaluation de T.

Etablir la formule définitive avant tout calcul numérique.

$m = 1\,400^{g}$. $M = 7\,534^{g}$. $c = 0{,}125$. $\theta = 15°$. *Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100° :* $l = 537$.

(*École centrale, 1913.*)

La masse de fer, en passant de la température T à la température θ, perd une quantité de chaleur égale à $mc(T - \theta)$. Cette chaleur est employée :

1° A élever de 0 à θ degrés la température d'une masse d'eau $M - x$,

2° A porter de 0 à 100 degrés et à vaporiser à cette température la masse x.

On a donc l'égalité

$$mc(T - \theta) = (M - x)\theta + x(100 + l).$$

S'il n'était pas tenu compte de l'évaporation de la masse x, on écrirait

$$mc(T' - \theta) = M\theta,$$

équation qui donne environ $T' = 661°$.

L'erreur commise, négative car T′ est plus petit que T, est, en valeur absolue, $T - T'$.

Retranchons la seconde équation de la première :

$$mc(T - T') = x(100 - \theta + l).$$

Prenons T′ pour *évaluation de* T. La seconde équation peut s'écrire

$$mcT' = (M + mc)\theta,$$

et, en divisant membre à membre les deux dernières égalités, on trouve

$$\frac{T - T'}{T'} = \frac{x(100 - \theta + l)}{(M + mc)\theta}.$$

Remplaçons $\frac{T - T'}{T'}$ par $\frac{5}{100}$, il vient

$$x = \frac{5}{100} \frac{(M + mc)\theta}{100 - \theta + l}.$$

L'application numérique donne

$$x = 9^g,3.$$

Si nous prenons T pour *évaluation de* T, nous écrirons la première équation

$$mcT = (M + mc)\theta + x(100 - \theta + l),$$

d'où

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{x(100 - \theta + l)}{(M + mc)\theta + x(100 - \theta + l)},$$

et, en remplaçant $\frac{T - T'}{T}$ par $\frac{5}{100}$,

$$x = \frac{1}{19} \frac{(M + mc)\theta}{100 - \theta + l}.$$

L'application numérique donne alors

$$x = 9^g,8.$$

Marcel GIRONNET, lycée Saint-Louis.

Bonnes solutions de MM. E. Dion, à Saint-Cloud ; R. Dufour à Nancy ; G. Lach, a Douai ; M. Ullmann, à Héricourt.

CHIMIE

2183. — Première opération. — *On prend un gramme d'un échantillon de fluorure de calcium naturel contenant comme seule impureté de la silice ; on le mélange intimement à un grand excès de silice. On ajoute au mélange de l'acide sulfurique concentré. On chauffe modérément ; il se dégage alors un gaz dont on mesure le volume :*

1re Question. — Formulez la réaction ; décrivez l'opération telle que vous proposez de la réaliser, et faites un croquis de votre appareil.

2e Question. — Sachant que le volume du gaz dégagé, supposé ramené par le calcul à 0° et 76cm, est égal à 100cm³, calculez le tant pour cent de fluor que contenait l'échantillon étudié.

Deuxième opération. — *On répète la première opération, avec le même poids de matière, mais la totalité du gaz que produit la réaction est amenée en présence d'une solution concentrée de fluorure de potassium qui l'absorbe. Il se produit un précipité formé d'un seul composé défini (et non d'un mélange de plusieurs composés).*

3e Question. — Formulez la réaction ; décrivez l'opération telle que vous proposez de la réaliser, et faites un croquis de votre appareil.

4e Question. — Admettez que l'on ait su peser ce précipité tout à fait insoluble, et calculez le poids que l'on a dû trouver.

(*Ecole centrale, 1913.*)

1. Lorsqu'on chauffe légèrement de l'acide sulfurique concentré avec un mélange de fluorure de calcium et de silice, celle-ci en excès, il se produit du fluorure de silicium et la formule de la réaction est la suivante :

$$SiO^2 + 2CaF^2 + 2SO^4H^2 = 2SO^4Ca + 2H^2O + SiF^4.$$

Pour faire l'opération, on place le mélange dans un ballon en verre muni d'un tube de sûreté où

l'on mettra un peu d'acide sulfurique. La silice étant en grand excès dans le mélange, le verre du ballon ne doit être que peu attaqué. On a soin de mettre un grand excès d'acide sulfurique afin de retenir l'eau formée, qui pourrait agir sur le fluorure de silicium. Enfin celui-ci sera recueilli sur la cuve à mercure.

2. Pour déterminer le poids de fluorure réel qui a été décomposé, remarquons que, d'après l'équation, deux molécules de ce fluorure, c'est-à-dire un poids égal à $2 \times 78 = 156$ grammes, dégageraient une molécule de gaz, c'est-à-dire un volume de $22^l,4$. Un volume de $0^l,1$ provient donc d'un poids

$$\frac{0,1}{22,4} \times 156 = 0,696.$$

L'échantillon employé contenait donc 69,6 °/₀ de fluorure.

3. Si on amène le gaz produit dans la réaction précédente au contact d'une solution de fluorure de potassium, il se forme un précipité d'hydrofluosilicate de potassium :

$$SiF^4 + 2KF = SiF^6K^2.$$

On pourra faire l'opération en faisant plonger dans la dissolution de fluorure le tube de dégagement de l'appareil précédent, mais on devra, pour chasser tout le gaz du ballon, munir celui-ci d'un tube à l'aide duquel on fera, à la fin de l'expérience, passer un courant d'air.

4. La formule de la réaction montre que, pour une molécule-gramme, soit $22^l,4$ de fluorure de silicium, on obtient une molécule-gramme, soit 220 grammes d'hydrofluosilicate. Le poids obtenu sera donc

$$\frac{0,1}{22,4} \times 220 = 0^g,982.$$

Émile LION, École normale supérieure de Saint-Cloud.

ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

Cours techniques supérieurs (*Première année*).

Deuxième session, 1913.

Algèbre et Analyse.

I. — On considère les séries

$$x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + x^3 \cos 3\alpha + \cdots + x^n \cos n\alpha + \cdots$$
$$x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + x^3 \sin 3\alpha + \cdots + x^n \sin n\alpha + \cdots$$

Montrer que ces séries sont convergentes pour toute valeur de x inférieure à 1 en valeur absolue. En est-il de même pour $x = \pm 1$?

Calculer les sommes S et T de ces deux séries, en formant l'expression $S + Ti$ et appliquant la formule de Moivre.

II. — Déterminer, sans se servir des dérivées, les maximums et minimums des deux fonctions

$$y = \frac{x^2 - a^2}{x^2} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{x^3 + a^3}{x^2}$$

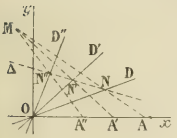
soit en utilisant les théorèmes élémentaires sur les maximums et minimums, soit en considérant y et z comme donnés et discutant la réalité des racines des équations du troisième degré en x qui lient les fonctions y et z à leur variable.

III. — Reprendre, à l'aide des dérivées cette fois, l'étude complète des fonctions y et z, dresser un tableau de leurs variations et construire leurs courbes représentatives.

(*Durée : 3 heures.*)

Géométrie et Géométrie analytique.

Etant donnés trois points A, A′, A″ situés sur l'axe Ox $OA = a$, $OA' = a'$, $OA'' = a''$) et trois droites D, D′, D″, passant par l'origine O (de coefficients angulaires m, m', m''), on joint un point M aux points A, A′, A″ et on prend les points de rencontre N, N′, N″ des droites ainsi obtenues avec les droites D, D′, D″ respectivement.



1° Trouver le lieu des points M du plan pour lesquels les trois points N, N′, N″ sont en ligne droite ; et, dans les mêmes conditions, l'enveloppe des droites Δ passant par les trois points N, N′, N″.

2° Examiner le cas particulier où l'on a :

$$a' = 2a, \qquad a'' = 3a\,; \qquad m' = \frac{m}{2}, \qquad m'' = \frac{m}{3}\,;$$

et vérifier que, dans ce cas, le lieu du point M, ainsi que l'enveloppe de la droite Δ ne changent pas quand la droite D tourne autour de O (c'est-à-dire quand m varie).

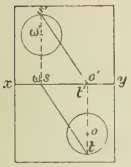
(On donnera d'abord une solution analytique de la question, et, si on a le temps, on cherchera une solution géométrique.)

(*Durée : 3 heures.*)

Géométrie descriptive.

Cadre de $440^{mm} \times 280^{mm}$. Ligne de terre xy au milieu de la feuille.

Deux cercles de 60^{mm} de rayon, le premier situé dans le plan horizontal de projection (centre o, o'), le second dans le plan vertical de projection (centre ω, ω') sont, l'un la base d'un cône de sommet s, s', l'autre la base d'un cylindre ayant pour génératrice la droite st, $s't'$.



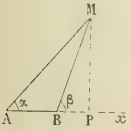
$$xo = xs = 75^{mm}, \qquad xo' = xt' = 205^{mm},$$
$$\omega\omega' = o'o = 140^{mm}, \qquad \omega s' = o't' = 200^{mm}.$$

Déterminer les deux projections de la courbe d'intersection du cône et du cylindre point courant avec la tangente, points remarquables, en particulier points sur les contours apparents) et représenter l'ensemble des deux corps, en ne conservant que la partie de chacun d'eux qui est au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical de projection.

(*Durée : 4 heures.*)

Calcul trigonométrique.

Des extrémités A et B d'une base de longueur connue $AB = a$, on a visé un point M, et mesuré les angles $\widehat{xAM} = \alpha$ et $\widehat{xBM} = \beta$ que font les droites AM et BM avec la direction Ax de la base AB. On demande d'établir les formules donnant l'abscisse $AP = x$ et l'ordonnée $PM = y$ du point M, en fonction de a, α et β.



Application numérique :

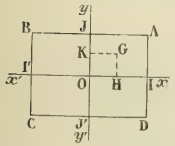
$$a = 1\,000^{m}, \qquad \alpha = 48^{\circ}\,29', \qquad \beta = 71^{\circ}\,35'.$$

(Effectuer les calculs avec les tables à 5 décimales, ou à défaut, avec des tables à 7 décimales, en supposant les données exactes, et déterminer les résultats avec la plus grande approximation possible.)

(*Durée : 1 h. 1/2.*)

Mécanique.

I. — Une table rectangulaire de poids p, dont les pieds sont projetés en A, B, C, D ($OI = OI' = a$, $OJ = OJ' = b$), supporte une série d'objets ayant pour poids total q et pour centre de gravité $G(OH = \alpha,\ OK = \beta)$.



Déterminer les grandeurs des pressions P, Q, R, S exercées sur le sol par les pieds A, B, C, D de la table.

On admettra la relation $P + R = Q + S$.

II. — Etudier complètement le mouvement défini par les équations

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t$$

a, b, ω désignant des constantes connues.

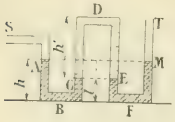
Trajectoire du point mobile M, loi de description de cette trajectoire, diagrammes des espaces, des vitesses et des accélérations.

(*Durée : 2 heures.*)

Physique et Chimie.

I. — Un manomètre à air libre est formé par un tube coudé SBDFT de section constante dans lequel un liquide de poids spécifique d' est interposé en CDE entre deux colonnes ABC, EFM d'un liquide de poids spécifique d. Lorsque les orifices ST sont à l'air libre les surfaces de séparation C, E d'une part, et A, M d'autre part, sont respectivement aux mêmes niveaux. La colonne intermédiaire a une hauteur h' et les colonnes extrêmes ont une hauteur h. Le niveau CE est déterminé par la hauteur l.

On met l'orifice S en communication avec une enceinte à la pression x et les niveaux ACEM se déplacent d'une même quantité u.



On demande de déterminer la relation donnant x en fonction de u et de la pression atmosphérique H qui permettra de graduer le manomètre.

II. — Mesure de la vitesse du son dans l'air, les liquides et les solides.

III. — Soit D la distance d'un objet lumineux à un écran. Quelles positions doit-on donner à une lentille convergente pour projeter l'image sur l'écran? On trouvera deux positions situées à une distance d l'une de l'autre. En déduire la distance focale f de la lentille.

IV. — Chlore. — Chlorures.

(*Durée : 3 heures.*)

QUESTIONS PROPOSEES

2240. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Ox d'abscisse a $(a > 0)$ et une droite (D) passant par le point A et ayant pour pente m.

1° Former l'équation de la conique (S) qui a pour foyer le point O, pour directrice correspondante la droite (D) et pour excentricité le nombre k, donné positif.

2° On fait varier m, les coniques (S) forment un faisceau. Montrer que par tout point du plan passent deux coniques de ce faisceau. Condition pour qu'elles soient réelles. Condition pour que les directrices (D) correspondantes soient perpendiculaires.

3° Montrer que les deux asymptotes de chaque conique (S) passent chacune par un point fixe.

4° Une conique (S) rencontre Ox en M et N. Un cercle quelconque passant par M et N rencontre (S) en deux points P et Q. Déterminer le cercle de façon que la droite PQ passe par le point O, et trouver le lieu du centre de ce cercle quand m varie.

5° Dans les mêmes conditions trouver le lieu des points P et Q. Construire ce lieu en coordonnées polaires.

G. P.

2241. — Le lieu du point de concours de deux normales rectangulaires et le lieu du point de concours des normales aux extrémités de deux rayons vecteurs centraux et rectangulaires, pour une même ellipse, sont deux courbes fermées qui ont la même aire.

Chacune d'elles a pour aire le double de l'aire de la podaire centrale de la développée de l'ellipse.

E.-N. Barisien.

Errata. — 1° Question **2222**. — Le dénominateur, dans la deuxième intégrale, est $(x+1)^3$ et non $(x^2+1)^3$.

2° Question **2234**. — Dans le premier membre de l'égalité qui figure dans la 6e partie, supprimer le facteur 2.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Juillet 1914. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Concours de 1913.

Mathématiques spéciales.

2204. — I. *Par deux points fixes* A *et* A′ (AA′ = 2*a*), *on fait passer un cercle variable de centre* C; *un cercle de rayon a passe par le point* C *et son centre* C′ *est sur la perpendiculaire à* AA′ *en son milieu, le vecteur* $\overline{CC'}$ *ayant toujours le même sens. Construire le lieu* Γ *des points communs aux deux cercles. (On pourra exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.)*

II. *Une droite variable* D *perpendiculaire à* AA′ *rencontre* Γ *en quatre points* M_1, M'_1, M_2, M'_2; *au point* M_1 *on peut associer un point* M'_1 *tel que le milieu du segment* $M_1M'_1$ *décrive un cercle* Γ_1; *montrer que les droites* AM_1, $A'M'_1$ *sont rectangulaires. Construire le lieu des milieux de tous les segments déterminés sur* D *par* Γ.

III. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *rencontrent* Γ *en quatre points formant deux couples de point associés* M_1 *et* M'_1; *si l'on suppose un de ces couples constitué par deux points fixes, le lieu des centres des hyperboles correspondantes est un cercle; quel est le lieu du centre de ce cercle et quelle est l'enveloppe de ce cercle, quand on fait varier les points associés supposés fixes primitivement?*

IV. *Les hyperboles équilatères qui passent par* A *et* A′ *et sont tangentes à* Γ *se distribuent en plusieurs faisceaux ponctuels et une famille constituée par des hyperboles bitangentes à* Γ.

On considère deux hyperboles H_1 *et* H_2 *qui font partie de cette famille et sont tangentes à* Γ, *l'une en* M_1 *et* M'_1, *l'autre en* M_2 *et* M'_2, *ces quatre points étant en ligne droite; montrer que la droite qui joint le milieu de* $M_1M'_1$ *au point de rencontre* M *des tangentes à* Γ *en* M_1 *et* M_1 *est tangente au cercle* Γ_1.

H_1 *et* H_2 *ont une corde commune qui ne passe par aucun des points* A, A′; *soit* P *le point où cette corde rencontre* AA′; *trouver l'enveloppe de* MP.

1. Prenons A′A pour axe des x et la perpendiculaire à A′A en son milieu pour axe des y. λ étant l'ordonnée du point C, l'équation du cercle (C) est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0. \tag{1}$$

L'ordonnée de C′ est $\lambda + a$, en choisissant $CC' = a$, et l'équation du cercle (C′) est

$$x^2 + y^2 - 2(\lambda + a)y + \lambda^2 + 2\lambda a = 0. \tag{2}$$

L'équation de l'axe radical de (C) et (C′) est

$$2ay = (\lambda + a)^2. \tag{3}$$

Des équations (1) et (3) on déduit

$$4a^2x^2 + (\lambda^2 - a^2)^2 - 4a^4 = 0. \tag{4}$$

Ainsi, à une valeur de λ il correspond deux points, M, N, communs à (C) et (C′). Ces points sont symétriques par rapport à $y'y$ et leurs coordonnées sont définies par les équations

$$y = \frac{(\lambda + a)^2}{2a} \tag{3}$$

et

$$x^2 = \frac{4a^4 - (\lambda^2 - a^2)^2}{4a^2}. \tag{4}$$

Remarque. — En prenant $\overline{CC'} = -a$ et en remplaçant λ par $-\lambda$, les deux cercles (C) et (C′) se trouvent remplacés par deux cercles (C_1) et (C'_1) respectivement symétriques de (C) et (C′) par rapport à $x'x$. Le lieu des points communs à (C_1) et (C'_1) est donc le symétrique par rapport à $x'x$ du lieu des points M et N.

Ceux-ci sont réels si on a

$$4a^4 - (\lambda^2 - a^2)^2 \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad 2a^2 - (\lambda^2 - a^2) \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad \lambda^2 \leqslant 3a^2.$$

Calcul de $\frac{dy}{dx}$. — De (3) et (4) on déduit

$$2a\,dy = 2(\lambda + a)\,d\lambda$$

et

$$8a^2x\,dx + 4\lambda(\lambda^2 - a^2)\,d\lambda = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{\lambda(a - \lambda)}.$$

Le tableau suivant indique la variation des coordonnées du point M dont l'abscisse est positive :

λ	$-a\sqrt{3}$		$-a$		0		a		$a\sqrt{3}$
$\lambda + a$	$a(1 - \sqrt{3})$	↗	0	↗	a	↗	$2a$	↗	$a(1 + \sqrt{3})$
$(\lambda + a)^2$	$2a^2(2 - \sqrt{3})$	↗	0	↗	a^2	↗	$4a^2$	↗	$2a^2(2 + \sqrt{3})$
y	$a(2 - \sqrt{3})$	↗	0	↗	$\frac{a}{2}$	↗	$2a$	↗	$a(2 + \sqrt{3})$
$\lambda^2 - a^2$	$2a^2$	↗	0	↗	$-a^2$	↗	0	↗	$2a^2$
$(\lambda^2 - a^2)^2$	$4a^4$	↗	0	↗	a^4	↘	0	↗	$4a^4$
$4a^2 - (\lambda^2 - a^2)^2$	0	↗	$4a^4$	↘	$3a^4$	↗	$4a^4$	↗	0
x^2	0	↗	a^2	↗	$\frac{3}{4}a^2$	↗	a^2	↘	0
x	0	↗	a	↗	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	↗	a	↘	0
$\frac{dy}{dx}$	0		-1		∞		∞		0

Le lieu Γ est la courbe ci-dessous (*fig.* 1) qui présente en A ou en A′ un rebroussement de première espèce.

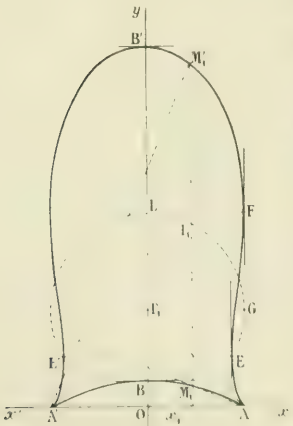


Fig. 1.

En posant $m = \frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{\lambda(a - \lambda)}$,

on a

$$\frac{dm}{d\lambda} = \frac{2a}{\lambda^2(a - \lambda)^2}\left[\lambda(a - \lambda)\frac{dx}{d\lambda} - x(a - 2\lambda)\right].$$

Pour $\lambda = -a$, on a $x = a$, $\frac{dx}{d\lambda} = 0$; donc $\frac{dm}{d\lambda} = -\frac{3}{2a}$; m est donc une fonction de λ décroissante pour $\lambda = -a$ et le rebroussement est de première espèce.

2. Soit $x = x_1$ l'équation d'une droite D. D rencontre Γ en des points qui correspondent aux valeurs de λ, racines de l'équation

$$(5) \qquad 4a^2(a^2 - x_1^2) = (\lambda^2 - a^2)^2.$$

A deux racines opposées $(\lambda_1, -\lambda_1)$ de cette équation bicarrée correspondent deux points M_1 et M_1' dont les ordonnées sont

$$y_1 = \frac{(\lambda_1 + a)^2}{2a} \quad \text{et} \quad y_1' = \frac{(-\lambda_1 + a)^2}{2a}.$$

Le milieu I_1 du segment M_1M_1' a pour ordonnée

$$(6) \qquad Y_1 = \frac{y_1 + y_1'}{2} = \frac{\lambda_1^2 + a^2}{2a}.$$

De (5) et (6) on déduit, en éliminant λ_1,

$$4a^2(a^2 - x_1^2) = (2aY_1 - 2a^2)^2.$$

Le point I_1 est donc un point du cercle Γ_1 qui a pour équation

$$X^2 + (Y - a)^2 = a^2 \quad (\textit{fig.}\ 1).$$

(C′) coïncide avec Γ_1, lorsque $\lambda = 0$.

Le minimum de Y_1 étant $\frac{a}{2}$ $(\lambda_1 = 0)$, le point I_1 ne décrit que la partie de Γ_1 située au-dessus de la droite EE′ d'équation $y = \frac{a}{2}$.

Le produit des coefficients angulaires de AM_1 et $A'M_1'$ est $\frac{y_1}{x_1 - a} \times \frac{y_1'}{x_1 + a}$ ou $\frac{y_1y_1'}{x_1^2 - a^2}$; or $y_1y_1' = \frac{(\lambda_1^2 - a^2)^2}{4a^2}$ et $x_1^2 - a^2 = -\frac{(\lambda_1^2 - a^2)^2}{4a^2}$ (équation 5). Ce produit est donc égal à -1 et les deux droites sont rectangulaires.

Pour que l'équation (5) ait quatre racines réelles $(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2)$, il faut et il suffit qu'on ait

$$x_1^2 \leqslant a^2,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2a^2 > 0,$$

et
$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = 4a^2x_1^2 - 3a^4 > 0,$$
ou, en résumé,
$$\frac{3a^2}{4} < x_1^2 < a^2.$$

Soit Y l'ordonnée du milieu J de M_1M_2 ;
$$Y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(\lambda_1 + a)^2 + (\lambda_2 + a)^2}{4a} = \frac{2a + \lambda_1 + \lambda_2}{2},$$
d'où
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2Y - a,$$
$$2a^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 4Y - a^2 - 2\lambda_1\lambda_2,$$
$$\lambda_1\lambda_2 = 2Y - a)^2 - a^2$$
et enfin
$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = 4a^2\left(x_1^2 - \frac{3a^2}{4}\right) = 4\left[(Y - a)^2 - \frac{a^2}{2}\right]^2. \tag{7}$$

Posons
$$Z = a^2\left(x_1^2 - \frac{3a^2}{4}\right) = \left[(Y - a)^2 - \frac{a^2}{2}\right]^2.$$

Le maximum de Z étant $a^2\left(a^2 - \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{a^4}{4}$, on a
$$\left|(Y - a)^2 - \frac{a^2}{2}\right| < \frac{a^2}{2}, \qquad \text{ou} \qquad (Y - a)^2 - \frac{a^2}{2} \leqslant \frac{a^2}{2}, \qquad \text{ou} \qquad 0 \leqslant Y \leqslant 2a.$$

D'ailleurs, $dZ = 2a^2x_1dx_1 = 4(Y - a)\left[(Y - a)^2 - \frac{a^2}{2}\right]dY$; $\frac{dZ}{dY}$ s'annule lorsque
$$Y = a \quad \text{et} \quad Y = a\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A une valeur de Y, il correspond deux valeurs opposées de x_1. Le tableau et la courbe (*fig.* 2) suivants indiquent la variation de la détermination positive de x_1 en fonction de Y.

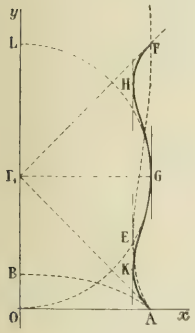


Fig. 2.

Y	0		$a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		a
$\frac{dZ}{dY}$	$-2a^3$		0	+	0
Z	$\frac{a^4}{4}$	↘	0	↗	$\frac{a^4}{4}$
$x_1^2 - \frac{3a^2}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	↘	0	↗	$\frac{a^2}{4}$
x_1	a	↘	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	↗	a
$\frac{dx_1}{dY} = \frac{1}{2a^2x_1} \cdot \frac{dZ}{dY}$	-1	$-$	0	+	0

A deux valeurs de Y, équidistantes de a $(a + \alpha,\ a - \alpha)$, il correspond [équation (7)] la même valeur de x_1. La courbe figurative Γ_2 admet donc la droite $Y = a$ pour axe de symétrie.

La branche AK de Γ_2 est le lieu des milieux des cordes M_1M_2 limitées aux branches BA et AE de Γ. L'arc KG de Γ_2 correspond aux arcs AB et EF de Γ ; $\widehat{GH}$ correspond à $\widehat{AE}$ et $\widehat{FB'}$; $\widehat{HF}$ correspond à $\widehat{EF}$ et $\widehat{FB'}$.

Rappelons que l'arc de cercle EG correspond aux arcs $\widehat{AE}$ et $\widehat{EF}$ de Γ et l'arc GL aux arcs AB et FB'. La courbe Γ_2 est donc à l'extérieur du cercle Γ_1.

3. L'équation d'une hyperbole équilatère H passant par A et A' est
$$x^2 - y^2 + 2y(\alpha x + \beta) - a^2 = 0. \tag{8}$$
Si à cette équation nous adjoignons les équations
$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0 \tag{1}$$
et
$$y = \frac{(\lambda + a)^2}{2a}, \tag{3}$$
le système obtenu détermine les points communs à H et Γ. En retranchant (1) et (8) membre à membre, on obtient
$$2y(y - \lambda - \alpha x - \beta) = 0. \tag{9}$$

Le système admet d'abord les solutions $y = 0$, $x = -a$, $x = +a$ (points A et A'), puis les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ll} (3) & y = \dfrac{(\lambda + a)^2}{2a}, \\ (10) & \alpha x + \beta = y - \lambda = \dfrac{\lambda^2 + a^2}{2a}, \\ (4) & x^2 = a^2 - \dfrac{(\lambda^2 - a^2)^2}{4a^2}. \end{array}\right.$$

Si $\alpha = 0$, ce dernier système a des solutions lorsqu'on a $\dfrac{a}{2} \leqslant \beta \leqslant 2a$, puisqu'on a $0 \leqslant \lambda^2 \leqslant 3a^2$, et aux deux racines de (10) (λ_1 et $-\lambda_1$) il correspond quatre points communs (M_1, M'_1, N_1, N'_1), sommets d'un rectangle ayant pour axe de symétrie $y'y$.

Si $\alpha \neq 0$, on peut tirer x de (10) et le remplacer dans (4) par sa valeur. On obtient

$$(11) \qquad \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\lambda^2 + a^2}{2a} - \beta\right]^2 = a^2 - \frac{(\lambda^2 - a^2)^2}{4a^2}.$$

A chaque racine réelle de (11) il correspond un point réel commun à H et à Γ [équations (3) et (10)]. A deux racines opposées de cette équation bicarrée (λ_1, $-\lambda_1$) il correspond deux points tels que M_1, M'_1.

Pour que H passe constamment par les points fixes M_1 et M'_1 de Γ, il faut et il suffit qu'on ait entre les deux paramètres α et β la relation

$$\alpha x_1 + \beta = y_1 - \lambda_1 = k \qquad (x_1, y_1, \text{ coordonnées de } M_1).$$

Les coordonnées du centre de H (x_0, y_0) vérifient les relations

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + \alpha y_0 = 0, \\ y_0 + \alpha x_0 + \beta = 0, \end{array}\right.$$

d'où

$$\alpha(x_1 - x_0) = k - y_0$$

et

$$y_0(k - y_0) = -x_0(x_1 - x_0).$$

Le lieu du centre de H est le cercle ayant pour équation

$$X^2 + Y^2 - x_1 X - kY = 0;$$

c'est le cercle des neuf points du triangle M_1AA'.

Les coordonnées du centre ω de ce cercle sont

$$\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{x_1}{2}, \\ Y = \dfrac{k}{2} = \dfrac{\lambda_1^2 + a^2}{4a} = \dfrac{Y_1}{2}. \end{array}\right.$$

ω est donc le milieu du segment OI_1 et décrit un arc de cercle $E_1\Gamma_1E'_1$ (*fig.* 3) homothétique de l'arc ELE', le point O étant centre de l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$.

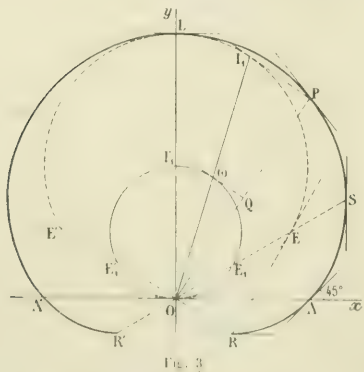


Fig. 3

Considérons deux cercles (ω) dont les centres ω, ω' sont infiniment voisins. ωω', ligne des centres, se confond avec la tangente en ω à l'arc $E_1\Gamma_1E'_1$ et ces deux cercles passant par O, leur second point commun est le symétrique de O par rapport à ωω', c'est-à-dire le pied P de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en I_1 au cercle Γ_1. Le lieu de P est l'enveloppe des cercles (ω) ; c'est la podaire du point O par rapport à l'arc ELE'; c'est donc une portion de cardioïde RLR'. Cette courbe passe par A et A' (*fig.* 3).

4. Une hyperbole H sera tangente à Γ :

1° Si une racine de (11) est égale à $-a$, car alors l'un des points M_1, M'_1, M_2, ou M'_2 vient se confondre avec A ou A'.

On a dans ce cas

$$\frac{1}{\alpha^2}(a - \beta)^2 = a^2.$$

Suivant qu'on a $\beta = a(1 - \alpha)$ ou $\beta = a(1 + \alpha)$, on a un faisceau ponctuel d'hyperboles tangentes à Γ en A ou en A';

2° Si (11) admet la racine nulle; alors M_1 et M'_1 se confondent; on a

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a}{2} - \beta\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Suivant qu'on a $\beta = \frac{a}{2}(1 - \alpha\sqrt{3})$ ou $\beta = \frac{a}{2}(1 + \alpha\sqrt{3})$, on a un faisceau ponctuel d'hyperboles tangentes à Γ en E ou en E';

3° Si l'équation (11) admet une racine double non nulle; alors M_1 se confond avec M_2 ou M_2' et en même temps M_1' avec M_2' ou M_2.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'équation (11), considérée comme étant du second degré en λ^2, admette une racine double positive.

L'équation (11) peut s'écrire

$$(1 + \alpha^2)\lambda^4 + 2a[a(1 - \alpha^2) - 2\beta]\lambda^2 + a^4(1 - 3\alpha^2) + 4a^2\beta(\beta - a) = 0,$$

et les conditions précédentes sont

$$(12)\quad \begin{cases} a^2[a(1 - \alpha^2) - 2\beta]^2 - a^2(1 + \alpha^2)[a^2(1 - 3\alpha^2) + 2\beta(\beta - a)] = 0, \\ a(1 - \alpha^2) < 2\beta. \end{cases}$$

La première se réduit à

$$4\alpha^2 a^2(a^2\alpha^2 + 2a\beta - \beta^2) = 0$$

ou

$$(13)\qquad a^2\alpha^2 + 2a\beta - \beta^2 = 0,$$

le cas $\alpha = 0$ ayant été examiné d'autre part.

De (12) et (13) on déduit $\beta^2 > a^2$ et $\beta(\beta - 2a) = a^2\alpha^2 > 0$; donc β est extérieur à l'intervalle $(-a, 2a)$.

A une valeur de β correspondent deux valeurs opposées de α; les deux hyperboles correspondantes sont symétriques par rapport à $y'y$.

Soient H_1 et H_2 deux hyperboles bitangentes à Γ, la première en M_1, M_1', la seconde en M_2, M_2'.

Pour que les quatre points M_1, M_1', M_2, M_2' soient en ligne droite, il faut et il suffit qu'on ait $x_1 = x_2$; or on a $x_1^2 = x_2^2$ lorsque $\frac{(\lambda_1^2 - a^2)^2}{4a^2} = \frac{\lambda_2^2 - a^2)^2}{4a^2}$, égalité qui est vérifiée :

1° Si $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ (H_1 et H_2 sont alors confondues ;

2° Si $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2a^2$.

$$\lambda_1^2 = \frac{-a^2 + a^2\alpha_1^2 + 2a\beta_1}{1 + \alpha_1^2} = \frac{-a^2 + \beta_1^2}{1 + \frac{\beta_1^2 - 2a\beta_1}{a^2}} = a^2\,\frac{\beta_1 + a}{\beta_1 - a},$$

car on a

$$a^2\alpha_1^2 + 2a\beta_1 - \beta_1^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 \neq a;$$

de même,

$$\lambda_2^2 = a^2\,\frac{\beta_2 + a}{\beta_2 - a};$$

donc

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = a^2\,\frac{\beta_1 + a}{\beta_1 - a} + a^2\,\frac{\beta_2 + a}{\beta_2 - a} = \frac{2a^2(\beta_1\beta_2 - a^2)}{\beta_1\beta_2 - a(\beta_1 + \beta_2) + a^2},$$

et il faut qu'on ait

$$\frac{\beta_1\beta_2 - a^2}{\beta_1\beta_2 - a(\beta_1 + \beta_2) + a^2} = 1,$$

ou (14)

$$\beta_1 + \beta_2 = 2a.$$

D'autre part,

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 = \frac{\lambda_1^2 + a^2}{2a} = \frac{a\beta_1}{\beta_1 - a},$$

$$(15)\qquad \alpha_1 x_1 = \frac{2a\beta_1 - \beta_1^2}{\beta_1 - a} = -\frac{a^2\alpha_1^2}{\beta_1 - a};$$

le signe de x_1 est celui de $\frac{\alpha_1}{a - \beta_1}$; de même le signe de x_2 est celui de $\frac{\alpha_2}{a - \beta_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_1 - a}$.

Les deux paramètres β_1 et β_2 ayant été choisis extérieurement à l'intervalle $(-a, 2a)$ et de manière à satisfaire à la relation (14), donc β_1 extérieur à $(-a, 3a)$ et $\beta_2 = 2a - \beta_1$, les deux paramètres α_1 et α_2 doivent être ensuite choisis de signes contraires pour que les quatre points M_1, M_1', M_2, M_2' soient en ligne droite.

Si on prend $\alpha_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{\beta_1(\beta_1 - 2a)}}{a}$, on prendra $\alpha_2 = \frac{-\varepsilon\sqrt{\beta_2(\beta_2 - 2a)}}{a} = \frac{-\varepsilon\sqrt{(\beta_1 - 2a)\beta_1}}{a}$ ou $\alpha_2 = -\alpha_1$.

Considérons l'hyperbole H_1 dont l'équation est

$$x^2 - y^2 + 2y(\alpha_1 x + \beta_1) - a^2 = 0.$$

La polaire d'un point M (x_0, y_0) par rapport à cette courbe a pour équation

$$X(x_0 + \alpha_1 y_0) + Y(\alpha_1 x_0 - y_0 + \beta_1) + \beta_1 y_0 - a^2 = 0.$$

Pour que cette polaire se confonde avec la droite M_1M_1', il faut qu'on ait

$$\begin{cases} \alpha_1 x_0 - y_0 + \beta_1 = 0, & (16) \\ \dfrac{a^2 - \beta_1 y_0}{x_0 + \alpha_1 y_0} = x_1. & (17) \end{cases}$$

Le point de concours M des tangentes en M_1 et M_1' est donc sur la droite D′ d'équation

$$\alpha_1 X - Y + \beta_1 = 0.$$

Cette équation est vérifiée par les coordonnées des points I_1, puisqu'on a

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 = \frac{\lambda_1^2 + a^2}{2a} = Y_1. \tag{3}$$

Le coefficient angulaire de D′ est α_1 ; celui de la tangente en I_1 à Γ_1 est $\dfrac{x_1}{a - Y_1}$

ou

$$\frac{x_1}{a - (\alpha_1 x_1 + \beta_1)} = \frac{\dfrac{a^2\alpha_1}{\beta_1 - a}}{a - \dfrac{a\beta_1}{\beta_1 - a}} = \frac{-a\alpha_1}{\beta_1 - a - \beta_1} = \alpha_1.$$

D′ est donc la tangente en I_1 à Γ_1.

Les équations de H_1 et H_2 peuvent s'écrire

$$x^2 - y^2 + 2y(\alpha_1 x + \beta_1) - a^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + 2y(-\alpha_1 x + 2a - \beta_1) - a^2 = 0.$$

En retranchant membre à membre, on a $2y[2\alpha_1 x + 2\beta_1 - 2a] = 0$: la première corde commune est AA′ ($y = 0$) ; la seconde a pour équation $x = \dfrac{a - \beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{a^2}{x_1}$ et elle rencontre A′A au point P d'abscisse $\dfrac{a^2}{x_1}$.

En se reportant à la relation (17), on voit que l'équation

$$a^2 - \beta_1 Y = x_1(X + \alpha_1 Y)$$

est celle de la droite MP, qu'on peut écrire

$$(a^2 - \beta_1 Y)(a - \beta_1) = a^2\alpha_1(X + \alpha_1 Y),$$

ou, en supprimant les indices et en simplifiant,

$$f(\alpha, \beta) = a\alpha X - \beta Y + a\beta - a^2 = 0; \tag{18}$$

entre α et β on a d'ailleurs la relation (13) $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Formons la relation

$$\frac{f_\alpha'}{\varphi_\alpha'} = \frac{f_\beta'}{\varphi_\beta'};$$

on obtient

$$\frac{aX}{2a^2\alpha} = \frac{a - Y}{2a - 2\beta},$$

ou (19)

$$(a - \beta)X = a\alpha(a - Y).$$

De (18) et (19) on tire

$$\alpha = \frac{XY}{X^2 - (a - Y)^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{a[X^2 + aY - a^2]}{X^2 - (a - Y)^2}.$$

En portant dans (13), on obtient

$$X^2Y^2 - X^2 + aY - a^2)^2 + 2[X^2 + aY - a^2]X^2 - (a - Y)^2 = 0,$$

ou

$$XY + X^2 + aY - a^2)(XY - X^2 - aY + a^2)$$
$$+ 2X^2 + aY - a^2)(X - Y + a)(X + Y - a) = 0;$$

or

$$XY + X^2 + aY - a^2 = (X + Y - a)(X + a)$$

et

$$XY - X^2 - aY + a^2 = -X + Y - a)(X - a).$$

L'équation de l'enveloppe se réduit à

$$X^2 - a^2 = 2(X^2 + aY - a^2),$$
$$2aY = -X^2 + a^2.$$

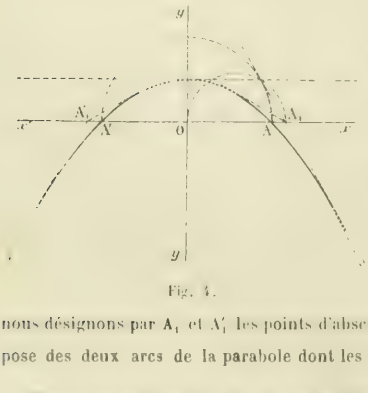


Fig. 4.

C'est celle de la parabole qui a pour foyer le point O et pour sommet le point $\left(X = 0,\ Y = \dfrac{a}{2}\right)$. Elle est tangente à Γ en A et A′. Le point P est le pôle de M_1M_1' par rapport au cercle de diamètre AA′ puisque $xx_1 = a^2$. Or, pour que les deux hyperboles H_1 et H_2 aient avec Γ des points de contact tous réels, il faut et il suffit qu'on ait $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} < |x_1| < a$. Si nous désignons par A_1 et A_1' les points d'abscisses $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{-2a}{\sqrt{3}}$, on voit que l'enveloppe de PM se compose des deux arcs de la parabole dont les tangentes rencontrent les segments AA_1 et $A'A_1'$ (*fig.* 4).

J. LHERMITTE, à Provins.

Très bonnes solutions (*) : MM. Roussellet, élève de l'École normale supérieure ; Jolly, à Honfleur ; Aubert, à Clermont-Ferrand ; L. Simon, à Fourmies ; G. Lach, à Douai.

Assez bonne solution : M. Defgrrois, à Evreux.

* Certaines de ces solutions eussent été intéressantes à publier. Mais le manque de place nous empêche absolument de le faire.

2205. — *Un cylindre a pour base dans le plan horizontal de projection un contour convexe formé d'un demi-cercle de diamètre* AB *tangent au petit axe et des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est* AB. *La droite* AB *est parallèle au petit axe et le centre du demi-cercle est situé sur le grand axe à* 6cm *à droite du petit axe. La génératrice issue du point* A, *placé au-dessous du grand axe, passe par le point de cote* 12cm, *projeté à* 16cm *à droite du petit axe et à* 10cm *au-dessous du grand axe.*

Un cône a pour base dans le plan horizontal de projection un contour convexe formé d'un demi-cercle de diamètre CD *et situé au-dessus de* CD *et des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est* CD. *La droite* CD *est parallèle au grand axe et le centre du demi-cercle est situé à* 2cm *au-dessous du grand axe et à* 16cm *à droite du petit axe, le rayon étant* 8cm. *Le sommet du cône est le point de cote* 24cm, *projeté à* 2cm *au-dessous du grand axe et à* 4cm *à gauche du petit axe.*

Représenter la projection horizontale du solide commun aux deux corps supposés limités au plan horizontal de projection.

On éclaire ce solide par des rayons parallèles à une direction fixe, l'ombre du sommet du cône sur le plan horizontal de projection étant le point situé à 16cm *au-dessus du grand axe et à* 8cm *à droite du petit axe. Trouver l'ombre propre du solide commun et son ombre portée sur le plan horizontal de projection.*

La mise en place des deux solides résulte immédiatement des données : le cylindre a pour contour apparent horizontal l'arc de cercle $B_0\xi_0$ et les deux génératrices issues de B_0 et de ξ_0, celle-ci étant tangente à la circonférence de base ; le cône a pour contour apparent la tangente sH_0 à la base, l'arc de cercle HD, le côté ED du triangle de base et la génératrice sE.

Intersection des deux solides. — Nous emploierons la méthode ordinaire qui consiste à mener par le sommet du cône une parallèle aux génératrices du cylindre et à couper les deux solides par des plans passant par la droite ainsi déterminée. Tous ces plans ont pour traces horizontales des droites passant par la trace de la droite ainsi définie ; cette trace σ_0 est ici à l'intersection de la droite As avec la tangente commune K_0B_0 aux deux demi-cercles donnés, car la cote du point S étant double de celle du point f, la distance $s\sigma$ est double de Af, c'est-à-dire égale à sf ; or la distance EK est double de Eω, donc le point σ est précisément l'intersection des droites As et KB, à 30cm à gauche du point B.

Nous chercherons d'abord l'intersection des deux faces planes AG et BG du cylindre avec le cône, puis l'intersection de la surface cylindrique proprement dite avec le cône.

1° La face AG coupe d'abord le plan SCE suivant une droite qui passe par l'intersection des deux arêtes SE et AF, et comme le point de SE qui se projette en A a précisément la même cote que le point F, ce point d'intersection α est au milieu de Af. Les deux plans ayant leurs traces horizontales AG et CE concourantes au point x, leur intersection est la droite αx. La même face AG coupe le plan SED dont la trace ED est parallèle à AG suivant l'horizontale $\alpha\gamma$.

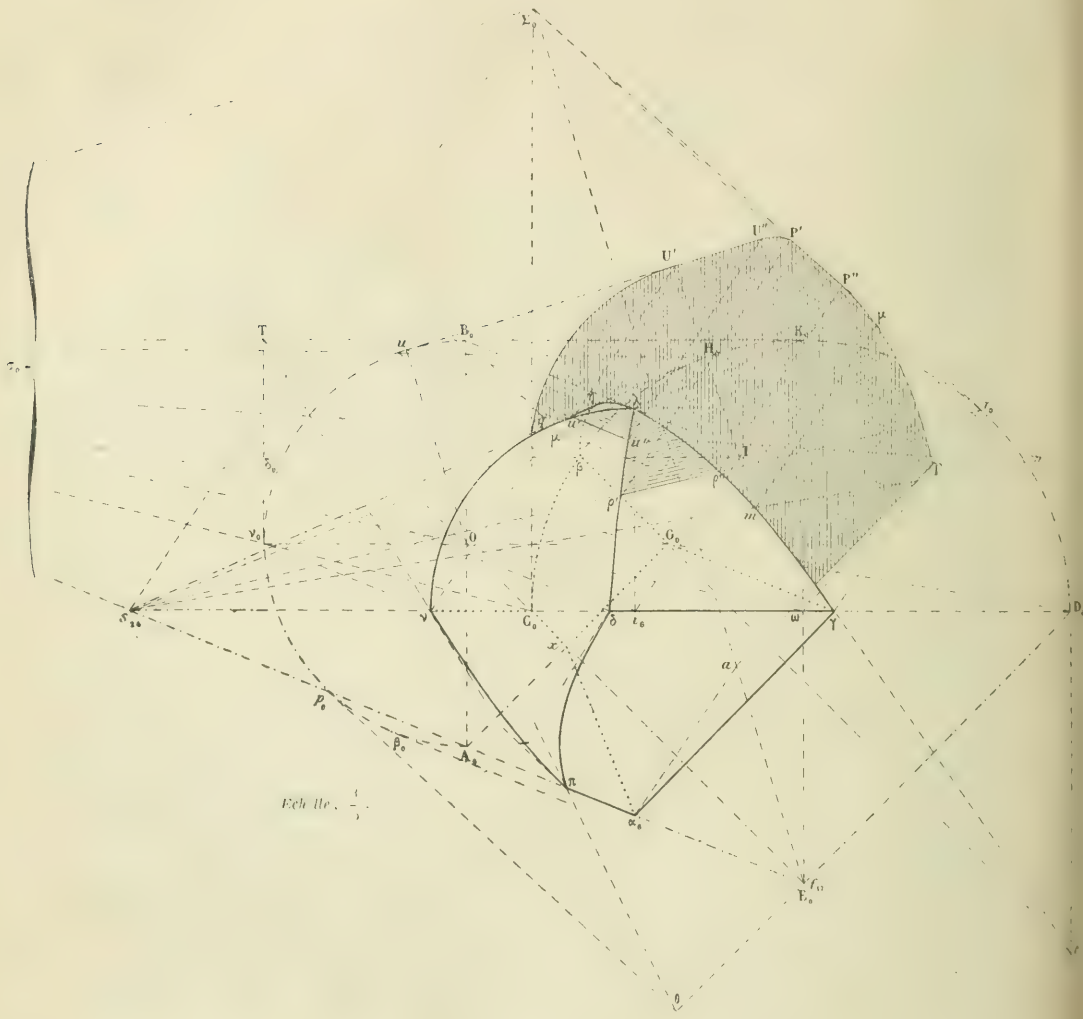
La face BG coupe la surface conique à base semi-circulaire suivant une courbe qui part du point γ pour aboutir au point β où la trace du plan sécant coupe la base du cône; la tangente en γ s'obtient en prenant l'intersection du plan tangent au cône le long de SD avec le plan sécant, c'est-à-dire en joignant γ au point t où la trace BG du plan coupe la tangente en D_0 à la base du cône. La tangente en β s'obtient en prenant deux horizontales de même cote dans le plan sécant et dans le plan tangent au cône le long de Sβ et en joignant leur point de rencontre au point β.

Nous avons construit un point courant m de la section, au moyen du plan auxiliaire de trace $\sigma_0 m_0$ qui a donné sur le cône la génératrice sm_0 et sur le plan la droite μm. Comme points remarquables nous avons le point η sur la génératrice de contour apparent du cône et le point λ sur l'arête $B_0\lambda$ du cylindre. Au point η la courbe est tangente à la génératrice sH et au point λ elle est tangente à la génératrice Bλ du cylindre.

Cherchons maintenant l'intersection de la surface cylindrique semi-circulaire avec le cône, et d'abord son intersection avec les plans SCE et SED. Ce sont deux arcs d'ellipse partant du point π où la génératrice issue de p_0 coupe la droite SE, ce point π s'obtenant soit en rabattant le plan vertical SE, soit en appliquant le procédé classique de la géométrie cotée. Les tangentes aux deux arcs en π sont les intersections du plan tangent au cylindre au point p_0 avec les deux plans sécants, l'une, $\theta\pi$, s'obtient immédiatement, l'autre a une direction très voisine de celles des droites $p_0\theta$ et C_0E_0. On détermine les points sur SC_0 et sur SD_0 au moyen des plans auxiliaires ayant pour traces σC_0 et σD_0 qui nous donnent les points ν et δ en chacun desquels on construit la tangente par la méthode ordinaire. Par exemple la tangente au point ν passe par le point T où la trace EC du plan sécant coupe la tangente en ν_0 à la base du cylindre.

Il reste à trouver l'intersection des surfaces conique et cylindrique proprement dites, à bases semi-circulaires. Nous remarquons tout de suite que les droites A_0B_0 et K_0E_0 étant deux diamètres des bases, le point σ est précisément le centre d'homothétie directe de ces bases. Donc le cône et le cylindre ont deux plans tangents communs dont les trois horizontales sont les tangentes communes aux deux bases issues du point σ. Ils se coupent

alors suivant deux courbes planes et l'une des sections est un cercle horizontal dont le centre est nécessaire-



ment à l'intersection de la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le point O, et de la droite $x\omega$, soit α. Il a d'ailleurs le même rayon que la base du cylindre, et nous ne devons garder que le quart de cercle $\omega\lambda$ dont la tangente en λ est parallèle à $i\omega$. L'autre courbe plane part du point δ et son plan est par conséquent

déterminé, puisque l'on connaît l'intersection des deux plans, qui est la droite joignant les points d'intersection des génératrices de contact des plans tangents communs au cône et au cylindre. On obtient ainsi l'arc $\delta\lambda$, qui achève de déterminer l'intersection des deux solides.

Solide commun. — Le solide commun est limité par les faces planes $C_0\beta G_0x$ qui est horizontale, $\beta G_0\gamma\lambda\gamma_1$, $G_0\gamma\alpha x$, $\gamma\alpha\pi\delta$ et $C_0x\alpha\pi\nu$, puis par la surface cylindrique limitée aux arcs $\lambda\nu\pi\delta\lambda$ et à la surface conique limitée par deux secteurs ayant le point commun λ, l'un $\gamma\delta\lambda$ et l'autre $\lambda\eta\beta C_0\nu\lambda$. Son contour apparent comprend la fraction $q\eta$ du contour apparent de la surface conique ainsi que le segment d'arête $\pi\alpha$, tout le reste provenant des lignes d'intersection. La visibilité est d'ailleurs manifeste.

Ombres produites par le solide. — Soit Σ_0 l'ombre du sommet définie par l'énoncé. Si nous menons la tangente $\Sigma_0\sigma_0$ à la base du cône, nous obtenons la génératrice d'ombre propre $s\sigma_0$ qui nous donne la ligne d'ombre $\rho'\rho''$ sur le solide commun. La seconde tangente Σ_0C_0 donnerait $\delta\gamma$ qui est une arête du solide : la partie ombrée est donc toute la surface conique $\lambda\rho'\rho''$, et $\lambda\eta\beta C_0\nu\lambda$ dont on voit seulement la portion $\lambda\eta q$.

Pour le cylindre, nous devons mener les plans tangents parallèles à $s\Sigma$ et, pour cela, prendre la trace $\sigma_0\Sigma_0$ du plan des deux directions $s\sigma_0$ et $s\Sigma_0$ et mener à la base les tangentes parallèles à cette trace. Il n'y en a qu'une ici qui touche la demi-circonférence BA, et le point de contact, u, détermine la génératrice d'ombre propre dont la partie $u'u''$ est sur le solide. Nous avons ainsi trois régions ombrées sur la portion de surface visible du solide commun. Toutes les autres parties sont éclairées ou cachées.

L'ombre portée sur le plan horizontal se compose d'abord de la trace du cylindre qui a pour directrice le quart de cercle $\nu\lambda$, ou plutôt l'arc $\nu u'$, car l'arc $u'\lambda$ est dans l'ombre propre du solide et ne donne pas d'ombre sur le plan horizontal. Cette trace est un arc de cercle égal dont le centre est la trace I de la parallèle aux rayons lumineux menée par le point i_6. Vient ensuite l'ombre du fragment de génératrice $u'u''$ qui se trouve en U'U'' sur la trace du plan tangent au cylindre le long de cette génératrice. Nous avons encore l'ombre de l'arc de courbe $u''\rho'$ qui donne un petit arc raccordant les deux segments rectilignes U'U'' et P'P'', ce dernier étant l'ombre portée par la génératrice $\rho'\rho''$ du cône. Puis l'arc d'ellipse $\rho''\gamma$ donne l'arc P''T, dont nous avons construit un point courant μ qui appartient à l'ombre que porterait la génératrice $sm\mu_0$ si elle était isolée, c'est-à-dire à la trace Σm_0 du plan $ms\Sigma_0$. Enfin il reste à prendre l'ombre de l'arête $\gamma\alpha$ qui est égale et parallèle à $\gamma\alpha$ et dont on a immédiatement le point a sur la trace $E_0\Sigma_0$ du plan $s\Sigma_0E_0$. La construction du point a permet d'obtenir de suite le point Γ où s'arrête l'ombre de l'arc de l'ellipse $\lambda\gamma$, en menant $a\Gamma$ égale et parallèle à $\alpha\gamma$. On doit conserver seulement, du contour d'ombre portée, ce qui n'est pas caché par le solide.

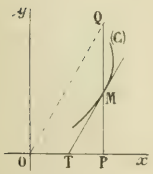
Bonne solution : M. G. Lach, à Douai. — Assez bonne solution : M. P. Jantel.

CONCOURS DE 1914

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Mathématiques.

I. — **2242**. Les axes Ox et Oy sont rectangulaires.



Déterminer une courbe (C) par la condition suivante : Si l'on porte, à la suite de l'ordonnée PM, une longueur MQ égale à une fonction donnée $f(x)$ de x, la tangente MT est parallèle à QO.

Intégrer dans les cas où $f(x) = a$, et $f(x) = ax$. Donner la forme de la courbe (C) dans ces deux cas.

II. — **2243**. Deux paraboles P et Q sont placées dans un plan de telle sorte que leurs axes soient rectangulaires.

1° Montrer qu'il y a une relation simple entre la somme des angles que font avec une direction fixe, avec un des axes par exemple, les tangentes communes à P et à Q, et l'angle que fait avec la même direction la ligne joignant les foyers.

2° On suppose que chaque parabole P et Q se déforme en conservant son sommet et son axe. La déformation est d'ailleurs telle que la ligne joignant les foyers passe par un point fixe. Trouver alors le lieu du point de rencontre des directrices.

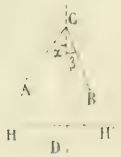
3° Déterminer les paraboles de façon que les trois tangentes communes soient confondues.

4° Discuter le nombre des tangentes communes réelles dans le cas particulier où le sommet d'une des paraboles est sur l'axe de l'autre.

(19 mai, de 8 h. à midi.)

Mécanique.

I. — **2244**. Sur un plan dépoli, faisant l'angle i avec le plan horizontal, reposent deux points matériels A et B de même poids P. Ces points, qui ont le même coefficient de frottement f sur le plan, sont reliés par un fil de poids négligeable, qui contourne en un point fixe C une très petite poulie, mobile sans frottement autour de son axe. On néglige le frottement du fil sur le plan. Les deux parties AC, BC du fil forment des angles inégaux α, β avec la ligne de plus grande pente CD.



Au début de l'expérience, l'angle i est assez faible pour que le système demeure en équilibre. On fait tourner lentement le plan autour de l'horizontale fixe HH' de manière à augmenter peu à peu l'inclinaison jusqu'à ce que l'équilibre soit rompu. Montrer que l'un des deux points se met nécessairement à glisser avant l'autre, dire lequel, et calculer la valeur correspondante de i.

II. — **2245**. Un point M se meut sur un cône de révolution donné, dont les génératrices forment l'angle i avec l'axe SA. La vitesse v du point M est constante, et, de plus, l'aire décrite par le rayon vecteur joignant le sommet S à la projection N du point M sur le plan mené par S perpendiculairement à SA croît proportionnellement au temps t.

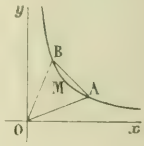
Exprimer, en fonction de t, la longueur $SM = r$ ainsi que l'angle θ formé par le plan ASM avec un plan fixe passant par SA. Calculer la distance du sommet S à la tangente en M à la trajectoire du point M. Déterminer enfin la direction de la tangente à l'hodographe et la nature de cette courbe.

(22 mai, de 8 h. à midi.)

Calcul.

2246. — L'unité de longueur est le mètre.

On considère, dans un système d'axes rectangulaires, l'hyperbole $xy = 1$.



La droite OA fait avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{8}$; la droite OB fait avec Oy un angle égal à $\frac{\pi}{8}$.

Calculer l'aire du triangle mixtiligne OAMB, et celle du segment AMB. Calculer aussi la longueur de la corde AB.

(18 mai, de 3 h. à 4 h. 1/2.)

Physique.

I. — Exposer les méthodes électrostatiques de mesure des différences de potentiel. On ne décrira pas les appareils qui sont supposés connus.

II. — Baromètre métallique.

III. — **2247**. Un liquide est enfermé dans une longue éprouvette cylindrique en verre, qui est portée successivement à 0° et à 100° et sur laquelle sont tracés deux traits de repère A et B. Sachant que la colonne liquide a une longueur de 100^{cm} à 0° et de 105^{cm} à 100°, que la distance entre les deux traits de repère A et B est de 100^{cm} à 0° et de 100^{cm},1 à 100°, on demande quelle est la valeur moyenne entre 0° et 100° :

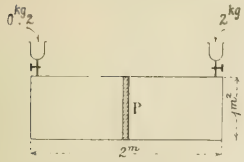
1° Du coefficient de dilatation linéaire du verre ;

2° Du coefficient de dilatation du liquide ;

3° Du coefficient de dilatation apparente du liquide dans le verre, telle qu'on l'observerait si l'éprouvette était graduée.

On fera les approximations habituelles, c'est-à-dire que les dilatations seront considérées comme des quantités très petites dont on peut négliger le carré.

IV. — **2248**. Un récipient cylindrique fermé, dans lequel on a fait le vide, est maintenu à la température constante de 100°. Il est divisé en deux compartiments par un piston mobile P et il est muni à ses deux extrémités de deux robinets à entonnoir A et B. On introduit dans ce cylindre $0^{kg},2$ d'eau par le robinet A et 2 kg. d'eau par le robinet B.



On demande quel est l'effort qui s'exerce sur le piston P :

1° Lorsque celui-ci est maintenu au milieu du cylindre ;

2° Dans les diverses autres positions qu'il peut occuper dans le cylindre.

Longueur du cylindre : 2 mètres. Section : 1 mètre carré. Épaisseur du piston P négligeable. La densité de la vapeur d'eau sera prise égale à 0,62 et considérée comme constante.

(18 mai, de 8 h. à midi.)

Chimie.

I. — Transformations allotropiques du soufre dans les états solide, liquide et gazeux.

Après avoir rappelé les faits expérimentaux, on fera application, dans le cas des systèmes solides et gazeux, des lois connues des transformations physico-chimiques.

Dans le cas spécial des systèmes solides, on pourra compléter l'étude des états d'équilibre par celle des vitesses de transformation (rôle de la température, des dissolvants, des germes cristallins, etc.).

II. — **2249**. On dissout dans un excès d'acide chlorhydrique étendu une centaine de grammes de fer.

Le liquide A ainsi obtenu est introduit dans un ballon portant d'une part un entonnoir à robinet, et d'autre part un tube à dégagement aboutissant à une éprouvette graduée placée sur l'eau.

On dissout enfin dans une faible quantité d'eau $0^g,25$ d'azotate de potassium, ce qui donne un liquide B.

a) On fait bouillir le liquide A de façon à chasser l'air contenu dans le ballon, puis, maintenant toujours l'ébullition, on introduit rapidement dans le ballon, par l'entonnoir à robinet, le liquide B.

On recueille un gaz C dont on mesure le volume V_1 après transport sur la cuve à eau.

b) Le gaz C ayant été desséché, on en prélève 25 centimètres cubes, mesurés à la pression atmosphérique sur le mercure, et on transvase ce gaz dans la cloche courbe sur le mercure. Puis on chauffe à son contact un morceau de sulfure de baryum. Après refroidissement, le résidu gazeux D est transvasé sur le mercure dans une éprouvette graduée, et l'on mesure à la pression atmosphérique son volume V_2.

On demande :

1° La nature des deux gaz C et D ;

2° Les volumes V_1 et V_2.

Données numériques :

Température du laboratoire : 15°.

Pression barométrique : 770 millimètres.

Tension maximum de la vapeur d'eau à 15° : $12^{mm},7$.

Poids moléculaire de l'azotate de potassium : 101 grammes.

On négligera la solubilité dans l'eau du gaz C.

(23 mai, de 8 h. à midi)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Algèbre et Trigonométrie.

I. — **2250**. Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général $u_n = \frac{1}{n^3}$, si l'on veut calculer la valeur de la série à un dix-millième près ?

II. — **2251**. Calculer l'intégrale définie (1) $f(z) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + z\cos^2 x}$, z étant un nombre supérieur à -1.

2° Développer suivant les puissances croissantes de z l'expression trouvée pour $f(z)$.

3° Vérifier qu'on obtient bien le même résultat en partant du développement de $\frac{1}{1 + z\cos^2 x}$ et intégrant les termes du développement, la variable x variant de 0 à π, comme l'indique la formule (1).

III. — **2252**. Etudier la variation de la fonction $y = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right)$.

(2 juin, de 7 h. à 11 h.)

Géométrie analytique et Mécanique.

2253. I. — Sur la spirale logarithmique C définie par l'équation $r = ae^{m\theta}$, en coordonnées polaires, on considère les deux points M_0 et M définis respectivement par les angles polaires θ_0 et θ.

1° Déterminer la position du centre de gravité G de l'arc M_0M.

2° Déterminer la position limite du point G quand le point M_0 tend vers le pôle O.

II. Dans ce cas où le point M_0 coïncide avec le pôle O de la spirale, on suppose que l'angle polaire θ du point M augmente avec la vitesse d'un radian par seconde.

1° Etudier la courbe Γ, lieu du point G.

2° Déterminer en grandeur et direction la vitesse V et l'accélération A du point G, correspondant à un angle donné θ.

III. Au lieu d'un arc de spirale, on considère une courbe quelconque C. L'extrémité M de l'arc $M_0M = l$ de cette courbe est supposée parcourir la courbe C suivant une loi qui est déterminée en fonction du temps. Etant donné le centre de gravité G de l'arc M_0M, l'extrémité M de l'arc, la tangente MT au point M, la longueur l de l'arc M_0M, les deux premières dérivées l' et l'' de l par rapport au temps, déterminer, en grandeur et direction, au moyen de ces données :

1° La vitesse V du point G ;

2° L'accélération A du même point.

IV. Dans le cas particulier où la ligne C est formée de deux segments rectilignes M_0O et OM :

1° Déterminer le centre de gravité G de la ligne M_0OM ;

2° Trouver le lieu Γ du point G quand le segment OM prend toutes les longueurs possibles et pivote en outre autour du point O dans un plan donné.

N. B. On tiendra compte des considérations géométriques.

(3 juin, de 7 h. à 11 h.)

Épure de Géométrie descriptive.

2254. — 1° Une sphère a 6^{cm} de rayon. La ligne de rappel oo' des projections du centre a pour longueur 17^{cm}. Elle est parallèle au grand côté de la feuille, à 14^{cm} du bord droit, le point o à 12^{cm} du bord inférieur.

2° Un cône de révolution a son axe dans le plan de front du centre de la sphère. Son sommet (s, s') est sur la verticale et au-dessus du point le plus à droite (d, d') de la sphère. Une des génératrices de front passe par le centre et fait avec l'horizontale $o'd'$ un angle égal à $\frac{\pi}{3}$. L'autre génératrice de front est la tangente *non* verticale menée par s' au contour apparent vertical de la sphère.

On représentera le solide, supposé opaque, formé par l'ensemble de la sphère et du cône, ce dernier étant limité, d'une part à son sommet et, d'autre part, au plan perpendiculaire à son axe mené par la trace bb' de la droite $(so, s'o')$ sur le plan tangent à la sphère en son point le plus bas.

(4 juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul.

2255. — On donne l'équation $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$.

1° Constater qu'une de ses racines x est comprise entre $+1$ et $+1,5$.

2° La méthode d'approximation de Newton est-elle applicable à la recherche de cette racine ?

3° Former l'équation qui donne $y = 1,5 - x$.

4° Calculer la valeur y_1 qu'elle donne pour y quand on néglige les termes de degré supérieur au premier dans cette équation en y.

5° Evaluer les termes négligés dans ce calcul et déduire de cette évaluation une nouvelle valeur y_2 plus approchée de y que y_1, en tenant compte des termes de degré supérieur au premier.

(Règle à calcul ou calcul arithmétique à volonté.)

(4 juin, de 17 h. à 18 h.)

Physique.

I. — Détermination expérimentale de la direction du magnétisme terrestre et de la direction du moment magnétique d'une aiguille aimantée. Montrer que cette double détermination est indépendante de la notion des pôles magnétiques.

II. — **2256.** *a*) Un gramme d'eau est vaporisé à 100°, sous la pression d'une atmosphère. Calculer :

1° En centimètres cubes, l'augmentation de volume qu'il subit ;

2° En joules, le travail qu'il fournit par cette augmentation de volume ;

3° En calories, l'équivalent de ce travail.

b) Un réservoir imperméable à la chaleur et de forme invariable contient 10 grammes d'air à 1000 degrés centigrades et à 10 atmosphères. Par un robinet jauge, on y introduit 1g d'eau liquide à 100°.

1° Quel est le volume du réservoir ?

2° Quelles sont la température et la pression finales du système ?

Densité relative à l'eau de l'air dans les conditions normales	$\delta = 0{,}00129$,
— de la vapeur d'eau à 100°, 1 atmosphère	$\delta' = 0{,}00060$,
Chaleur spécifique à volume constant de l'air	$c = 0{,}18$,
— de la vapeur d'eau	$c' = 0{,}38$,
Chaleur de vaporisation, en calories, de l'eau à 100°, 1 atmosphère	$L = 540$,
Pression d'une atmosphère en mégabaryes.	$a = 1{,}013$,
Equivalent mécanique de la calorie en joules	$J = 4{,}18$.
On admettra que l'air et la vapeur d'eau se comportent comme des gaz parfaits, avec le coefficient de dilatation	$\alpha = 0{,}0037$.

2 juin, de 14 h. à 17 h.

Chimie.

I. — L'azote. Sa préparation ; ses propriétés ; ses caractères. Etude de l'azote atmosphérique ; expériences qui ont permis d'en fixer la composition.

II. — **2257.** 1° Etant donné un mélange solide de sulfate, d'hyposulfite et de sulfite neutre de sodium, indiquer les réactions par lesquelles on pourrait caractériser qualitativement la présence de l'hyposulfite, du sulfate et du sulfite dans le mélange. On signalera les raisons pour lesquelles la caractérisation du sulfite présente quelques difficultés.

2° Indiquer les réactions qui se produiront si l'on chauffe au rouge avec du charbon le mélange des trois sels préalablement déshydratés et si l'on attaque ensuite par l'acide chlorhydrique le produit de ces réactions.

3° Sachant que les deux premiers sels existent originairement dans le mélange à l'état d'hydrates dont les formules sont respectivement SO^4Na^2, $10H^2O$ et $S^2O^3Na^2$, $5H^2O$, que le sulfite y est anhydre, on propose de déduire la composition quantitative du mélange des opérations et constatations suivantes :

a) On prend 10 grammes du mélange et on les dissout dans l'eau, de façon à faire un litre d'une solution que nous désignerons par A.

b) Dans 100cm3 de cette solution A, on fait passer un courant de chlore jusqu'à ce que l'oxydation soit complète. On ajoute alors au liquide un excès d'une solution de chlorure de baryum qui détermine dans le liquide la formation d'un précipité dont le poids est 1g,305.

c) D'autre part, à 100cm3 de la solution A on ajoute un peu d'empois d'amidon et l'on y fait tomber goutte à goutte une solution d'iode dans l'iodure de potassium jusqu'à l'apparition d'une coloration bleue persistante. Avec une solution à 12g,7 par litre, on obtient ce résultat en employant 43cm3,8 de la solution.

Calculer les proportions centésimales des trois sels constituant le mélange.

Poids atomiques : O = 16 ; S = 32 ; I = 127 ; Na = 23 ; Ba = 137.

3 juin, de 14 h. à 17 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Groupe I.

Mathématiques.

(Première composition.)

2258. — On donne entre les deux nombres complexes z et Z la relation

$$z^2 + Z^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

dont on propose de faire l'étude. Dans ce but, on pose

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ Z = X + iY, \end{cases} \tag{2}$$

les variables x, y, X, Y étant essentiellement réelles. On considère dans un plan (p) deux axes rectangulaires ox, oy et on représente z par le point m dont les coordonnées sont x et y ; de même, dans un autre plan (P), on considère deux axes rectangulaires OX, OY et on représente Z par le point M de coordonnées X, Y. La relation (1) peut alors être regardée comme établissant une correspondance entre m et M ; si dans cette relation (1) on remplace z et Z par les expressions (2) et si l'on égale à zéro séparément la partie réelle et le coefficient de i, on obtient deux équations réelles entre x, y, X, Y, qui définissent aussi cette correspondance.

1° Le point m étant donné, combien y a-t-il de positions pour le point M ? Le résultat obtenu comporte-t-il des exceptions ? Soit M_1 l'un des points M qui correspondent à un point donné m ; si un point m' tend vers m, l'un des points M' qui correspondent à m' tend vers M_1 ; on exprimera ce fait en disant que la correspondance entre m et M est continue.

2° Le point m décrivant une courbe (c), les points correspondants M décrivent des courbes dont l'ensemble sera désigné par (C) ; on demande de construire (C) lorsque (c) est une droite parallèle à l'un des axes. On désignera par (A) les courbes (C) qui correspondent aux droites $x = a$ et par (B) les courbes (C) qui correspondent aux droites $y = b$ et l'on étudiera les formes des courbes (A) et (B) suivant les diverses valeurs des constantes réelles a et b ; on vérifiera que la continuité définie au 1° a bien lieu.

3° Démontrer que les courbes (A) et (B) se coupent à angle droit en l'un quelconque de leurs points d'intersection.

4° Étant donnés un point m et l'un des points correspondants M, aux diverses courbes (c) passant par m correspondent des courbes (C) passant par M. Étant donnés les coordonnées de m et le coefficient angulaire de la tangente à une courbe (c), calculer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (C) correspondante ; montrer que l'angle de deux courbes (C) est égal à l'angle des courbes correspondantes (c). Existe-t-il des positions très particulières du point m pour lesquelles cette égalité des angles n'a pas lieu et que se produit-il alors ?

5° On donne dans le plan (p) un rectangle $efgh$ dont les côtés sont parallèles aux axes et l'on désigne par E celui des points correspondants à e dont l'ordonnée Y est positive. On considère un point m coïncidant d'abord avec e et décrivant ensuite d'une manière continue le contour du rectangle $efgh$; quel est le chemin continu décrit dans le plan (P) par le point correspondant M, supposé coïncidant d'abord avec E ? On étudiera les cas suivants : 1) les côtés du rectangle ont pour équations $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$; 2) le côté $y = 2$ est remplacé par $y = -2$; 3) de plus, le côté $x = \frac{1}{2}$ est remplacé par $x = -3$. Le point e sera dans tous les cas le sommet du rectangle dont l'abscisse et l'ordonnée sont les plus grandes. Peut-on, de l'étude de ces cas particuliers, déduire une règle générale permettant de reconnaître dans quels cas le contour qui correspond au contour du rectangle donné $efgh$ est un contour ouvert ou fermé ? On supposera que les côtés du rectangle donné ne passent pas par les points exceptionnels signalés à la fin du 4°.

6° Peut-il arriver que, la courbe (c) étant une conique, la courbe correspondante (C) soit aussi une conique ? Indiquer des cas assez généraux où il en est ainsi, sans s'astreindre à démontrer rigoureusement que l'on obtient tous les cas possibles.

(Durée : 6 heures.)

(Deuxième composition.)

I. — **2259.** Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, construire la courbe représentée paramétriquement par les équations

$$x = 1 + a\cos t, \qquad y^2 = 1 + a\sin t,$$

où a désigne une quantité donnée et t une variable.

Déterminer les points de contact de la courbe précédente avec les tangentes parallèles aux axes de coordonnées et avec les tangentes issues de l'origine ; indiquer les lieux géométriques de ces points quand a varie.

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) lorsque a varie.

II. — **2260**. Dans un milieu résistant un point matériel M est soumis à l'action d'une force centrale issue d'un point fixe O ; la résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse de M et dirigée à chaque instant en sens inverse de cette vitesse : exprimer en fonction du temps l'aire balayée par le rayon vecteur OM ; montrer que le mouvement est plan.

(*Durée : 4 heures.*)

Physique.

I. — Définition et mesure des différences de potentiel.

II. — **2261**. Deux lentilles identiques, dont toutes les aberrations sont négligeables, et qu'on considérera comme infiniment minces, forment un système optique centré. Leur distance focale est $f = 30$ centimètres, l'intervalle qui les sépare est $d = 15$ centimètres ; elles ont 5 centimètres de diamètre et sont placées aux deux extrémités d'un tube opaque de même diamètre qu'elles ; au milieu de l'intervalle qui les sépare se trouve un diaphragme laissant libre une ouverture circulaire de 35 millimètres de diamètre, centrée sur l'axe et perpendiculaire à l'axe.

1° Déterminer et représenter les positions des foyers et des plans principaux du système.

2° Indiquer la marche des rayons qui, venant d'un point situé très loin sur l'axe, contribuent à former l'image.

3° On se sert du système pour photographier des objets situés très loin, dans le voisinage de l'axe. Calculer de quelle quantité on peut déplacer la plaque parallèlement à elle-même sans que l'image cesse d'être *bonne*.

On admettra que l'image est *bonne*, tant que l'œil, regardant la photographie à une distance de 25 centimètres, ne s'aperçoit pas que l'image d'un point n'est pas un point. (On supposera que la plus petite dimension angulaire appréciable est égale à 2 minutes centésimales.)

4° Comment varie la quantité calculée au paragraphe précédent, quand la distance d des deux lentilles varie, le même diaphragme étant toujours placé à égale distance des deux lentilles ?

On fera varier la distance d depuis zéro jusqu'à la valeur pour laquelle le système cesse d'être utilisable comme objectif photographique.

5° Comment varie, dans les mêmes conditions, la durée de pose qui produit toujours la même impression de la plaque ?

On admettra, pour ce calcul, que, dans les conditions de l'expérience, l'impression de chaque élément de surface de la plaque dépend seulement de la quantité *totale* de lumière reçue par cet élément. On met au point sur la plaque, et on néglige les pertes de lumière par absorption et par réflexions sur les faces des lentilles.

On distinguera le cas où l'objet se réduit à un point (étoile) du cas où il a des dimensions angulaires finies.

(*Durée : 6 heures.*)

Groupe II.

Mathématiques.

I. — **2262**. Etudier les variations de la fonction

$$y = 0{,}5 \sin x - 1{,}3 \sin^2 x$$

et construire la courbe représentative.

Calculer l'aire limitée par l'axe des x et la portion de la courbe située au-dessus de l'axe des x et répondant à des valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

II. — **2263**. Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Déterminer celle des courbes intégrales qui est tangente à l'origine à l'axe des x. Développer la fonction obtenue en série de Maclaurin en se bornant aux termes de degré inférieur au 4e. Si on donne à x des valeurs inférieures en valeur absolue à 0,1, avec quelle approximation le développement obtenu représente-t-il la fonction ?

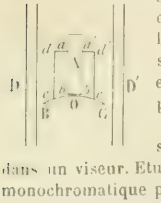
III. — **2264**. Un mobile M parcourt la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est $r = e^{2\theta}$, l'unité de longueur étant le mètre. On suppose que le rayon vecteur OM tourne autour du point O avec une vitesse angulaire constante de 100 tours à la minute. Calculer la vitesse du point M à l'instant t. Calculer la vitesse moyenne depuis l'instant où l'angle polaire θ est nul, jusqu'à l'instant où cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}$; on exprimera le résultat en unités C. G. S.

(*Durée : 4 heures.*)

Physique.

I. — Production et mesure des champs magnétiques.

II. — **2265.** Un cylindre de verre A est porté par un cylindre métallique creux *edd'e'* dans lequel il est sursi à la hauteur de la base supérieure *dd'* ; le support *edd'e'* repose sur la face supérieure d'une lentille plan-convexe, dont la face inférieure BC, plane, est parallèle à la base *bb'* du cylindre A. La distance de *bb'* à la face supérieure de la lentille est égale à un dixième de millimètre ; la longueur *ab*, entre la base du cylindre A et le niveau où ce cylindre est maintenu dans son support, est égale à 20 millimètres ; le rayon de courbure de la face supérieure de la lentille est très grand et on peut, sauf en ce qui concerne la forme des franges dont il sera question plus loin, confondre cette surface avec le plan tangent en son sommet O.



1° On éclaire avec une lumière monochromatique ($\lambda = 0^{\mu},589$) tombant normalement sur BC et se réfléchissant sur la base polie *bb'* du cylindre A ; on reçoit la lumière réfléchie dans un viseur. Etudier les franges qu'on peut ainsi observer. Voit-on ces franges si on remplace la lumière monochromatique par de la lumière blanche ? Que voit-on alors si on reçoit sur la fente d'un spectroscope la lumière qui s'est réfléchie au point O ?

2° On chauffe tout le système par un courant de vapeur d'eau bouillante circulant dans un cylindre à double paroi DD' concentrique au cylindre A. Décrire ce qui va se passer.

On remarquera que le support métallique *edd'e'* s'échauffe avant le cylindre A, car il est plus près des parois chauffantes.

3° Dans une expérience, on constate que, lorsque la température est devenue uniforme, il est rentré au centre, au total, 12 anneaux ; la température initiale était 18°, la température finale 100°. On recommence l'expérience en remplaçant le cylindre A par un cylindre de quartz, de forme identique et identiquement placé : on voit rentrer 16,5 anneaux au centre, la température initiale et la température finale étant les mêmes que précédemment. Le coefficient de dilatation moyen du cylindre de quartz, dans le sens de l'axe du cylindre, entre 18° et 100°, est égal à 813.10^{-8}. En déduire les coefficients de dilatation moyens du verre A et du métal qui constitue le support *edd'e'*.

On ne cherchera pas à avoir une approximation supérieure au centième sur les diverses quantités qui entrent dans les calculs.

(Durée : 6 heures.)

Chimie.

Indiquez les principales matières colorantes de nature organique qui vous sont connues, classez-les, donnez-en les modes industriels de préparation, exposez les raisons qui leur font attribuer telle ou telle formule développée.

(Durée : 4 heures.)

Sciences naturelles.

Adaptation des Végétaux à la vie aquatique, flottante ou submergée.

On étudiera, sur des exemples précis, les principales modifications de forme et de structure que ce mode de vie détermine dans l'appareil végétatif et l'appareil reproducteur, aussi bien chez les êtres microscopiques que chez les Végétaux supérieurs.

(Durée : 4 heures.)

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2132. — *Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées des pieds des normales à une parabole $y^2 = 2x$, issues du point* M(α, β).

1° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\frac{\Sigma y_1^3}{\Sigma y_1 \; \Sigma y_1^2} = k \text{ constante},$$

se compose, en général, d'une développée de parabole.

Si $\lambda = \frac{13}{22}$, *le lieu est une droite double ; si* $\lambda = \frac{13}{11}$, *le lieu est une droite triple.*

2° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\frac{\Sigma y_1^{12}}{\Sigma y_1^2 . \Sigma y_1^{10}} = k,$$

se compose de deux développées de parabole.

3° *Le lieu des points* M *tels que*

$$\frac{\Sigma y_1^{20}}{(\Sigma y_1^2)^{10}} = k,$$

se compose de trois développées de parabole.

Les pieds des normales issues du point $M(\alpha, \beta)$ à la parabole $y^2 - 2x = 0$ sont les points de rencontre de cette courbe et de l'hyperbole d'Apollonius relative au point M, laquelle a pour équation

$$\frac{\alpha - x}{-1} = \frac{\beta - y}{y} \qquad \text{ou} \qquad xy - y(\alpha - 1) - \beta = 0.$$

Remplaçons dans cette équation x par $\frac{y^2}{2}$, nous obtenons l'équation aux coordonnées des pieds des normales

$$y^3 - 2(\alpha - 1)y - 2\beta = 0.$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les sommes des puissances semblables des racines de cette équation. Pour simplifier un peu, nous remplacerons $\alpha - 1$ par α ; cela revient à transporter l'origine des coordonnées au point $x = 1$, $y = 0$, et à désigner par α, β les coordonnées du point M par rapport aux nouveaux axes.

Les ordonnées y_1, y_2, y_3 des pieds des normales sont alors racines de l'équation

$$y^3 - 2\alpha y - 2\beta = 0,$$

et si l'on pose $S_p = y_1^p + y_2^p + y_3^p$, on a la formule générale

$$S_p - 2\alpha S_{p-2} - 2\beta S_{p-3} = 0,$$

qui permet de calculer de proche en proche les valeurs de S_p pour toutes les valeurs entières et positives de p.

On obtient ainsi les valeurs suivantes :

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 4\alpha, \qquad S_3 = 6\beta, \qquad S_4 = 8\alpha^2, \qquad S_5 = 20\alpha\beta, \qquad S_6 = 4(4\alpha^3 + 3\beta^2),$$

$$S_7 = 56\alpha^2\beta, \qquad S_8 = 32\alpha(\alpha^3 + 2\beta^2), \qquad S_9 = 24\beta(6\alpha^3 + \beta^2), \qquad S_{10} = 16\alpha^2(4\alpha^3 + 15\beta^2),$$

$$S_{11} = 16.11\alpha\beta(2\alpha^3 + \beta^2), \qquad S_{12} = 16(8\alpha^6 + 48\alpha^3\beta^2 + 3\beta^4), \qquad S_{13} = 32.26\alpha^2\beta(\alpha^3 + \beta^2),$$

$$S_{14} = 64\alpha(4\alpha^6 + 35\alpha^3\beta^2 + 7\beta^4), \qquad S_{15} = 32\beta(60\alpha^6 + 100\alpha^3\beta^2 + 3\beta^4),$$

$$S_{16} = 512\alpha^2(\alpha^6 + 12\alpha^3\beta^2 + 5\beta^4), \qquad S_{17} = 64.17\alpha\beta(4\alpha^6 + 10\alpha^3\beta^2 + \beta^4),$$

$$S_{18} = 64[16\alpha^9 + 252\alpha^6\beta^2 + 180\alpha^3\beta^4 + 3\beta^6], \qquad S_{19} = 128.19\alpha^2\beta(4\alpha^6 + 14\alpha^3\beta^2 + 3\beta^4),$$

$$S_{20} = 256\alpha(8\alpha^9 + 160\alpha^6\beta^2 + 175\alpha^3\beta^4 + 10\beta^6).$$

1. La relation $\frac{\Sigma y_1^{13}}{\Sigma y_1^2 . \Sigma y_1^{11}} = \lambda$ peut s'écrire

$$S_{13} - \lambda S_2 S_{11} = 0,$$

ou, en remplaçant S_2, S_{11}, S_{13} par les valeurs que nous venons de calculer,

$$32.26\alpha^2\beta(\alpha^3 + \beta^2) - \lambda 4\alpha . 16.11\alpha\beta(2\alpha^3 + \beta^2) = 0,$$

ou

$$\alpha^2\beta[\alpha^3(13 - 22\lambda) + \beta^2(13 - 11\lambda)] = 0.$$

Le lieu considéré se compose des deux axes et de la courbe

$$x^2(13 - 22\lambda) + y^2(13 - 11\lambda) = 0$$

qui est une développée de parabole en général (*).

Si $\lambda = \frac{13}{22}$, cette courbe se réduit à la droite double Ox, et pour $\lambda = \frac{13}{11}$, à la droite triple Oy.

2. Envisageons maintenant la relation $\frac{\Sigma y_1^{17}}{\Sigma y_1^2 . \Sigma y_1^{15}} = k$, ou

$$S_{17} - kS_2 . S_{15} = 0.$$

Elle s'écrit

$$64.17\alpha\beta(4\alpha^6 + 10\alpha^4\beta^2 + \beta^6) - k\,4\alpha.32\beta\,(60\alpha^6 + 100\alpha^3\beta^3 + 3\beta^6) = 0,$$

ou

$$\alpha^2\beta^2[4(17 - 30k)\alpha^6 + 10(17 - 20k)\alpha^4\beta^2 + (17 - 6k)\beta^6] = 0.$$

Le lieu se compose encore des deux axes et de la courbe qui a pour équation

$$(1) \qquad 4(17 - 30k)x^6 + 10(17 - 20k)x^4y^2 + (17 - 6k)y^6 = 0.$$

Or cette équation est homogène par rapport à x^3 et y^2; si on divise le premier membre par y^6, on obtient

$$4(17 - 30k)\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 + 10(17 - 20k)\frac{x^3}{y^2} + (17 - 6k) = 0,$$

ou

$$(x^3 - ay^2)(x^3 - by^2) = 0,$$

a et b désignant les racines de l'équation en u

$$4(17 - 30k)u^2 + 10(17 - 20k)u + 17 - 6k = 0.$$

Il en résulte bien que l'équation (1) représente deux développées de paraboles. L'une d'elles se réduit à une droite double si $17 - 30k = 0$, ou à une droite triple si $17 - 6k = 0$.

3. Enfin, la condition $\frac{\Sigma y_1^{20}}{(\Sigma y_1^2)^{10}} = k$, ou $S_{20} - k(S_2)^{10} = 0$, peut s'écrire

$$256\alpha(8\alpha^9 + 160\alpha^6\beta^3 + 175\alpha^3\beta^6 + 10\beta^9) - k.4^{10}\alpha^{10} = 0,$$

ou, en divisant par 256α et en remplaçant α par x et β par y,

$$8(1 - 2^9k)x^9 + 160x^6y^3 + 175x^3y^6 + 10y^9 = 0.$$

Comme cette équation est homogène par rapport à x^3 et y^3, on peut l'écrire

$$(x^3 - ay^3)(x^3 - by^3)(x^3 - cy^3) = 0,$$

a, b, c étant les racines de l'équation en u

$$8(1 - 2^9k)u^3 + 160u^2 + 175u + 10 = 0.$$

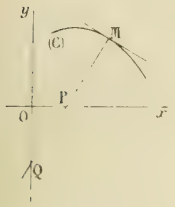
Elle représente donc trois développées de paraboles. L'une d'elles se réduit à une droite double si $k = \frac{1}{2^9}$.

L. SIMON, à Fourmies.

(*) On sait en effet que la développée de la parabole $y^2 - 2px = 0$ a pour équation $8(x - p)^3 - 27py^2 = 0$. On en conclut que la courbe $x^3 - \frac{27p}{8}y^2 = 0$ est la développée de la parabole $y^2 - 2px + p^2 = 0$, ou, en posant $\frac{27p}{8} = a$, que la courbe $x^3 - ay^2 = 0$ est la développée de la parabole $y^2 + \frac{16a}{27}\left(x - \frac{8a}{27}\right) = 0$.

2133. — *La normale à une courbe* (C) *en un point* M *rencontre les axes de coordonnées aux points* P *et* Q. *Par l'origine, on mène les vecteurs* OP′, OQ′ *équipollents à* MP *et à* MQ. *Déterminer la courbe* (C) *de façon que les tangentes aux lieux de* P′ *et de* Q′ *soient parallèles.*

Soient x, y les coordonnées du point M de la courbe (C), et y' la dérivée de y par rapport à x.



L'équation de la normale à cette courbe (C) est $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

Elle coupe donc les axes aux points P et Q, de coordonnées

$$x_P = x + yy', \qquad y_P = 0,$$

$$x_Q = 0, \qquad y_Q = y + \frac{x}{y'} = \frac{x + yy'}{y'};$$

par conséquent les projections des vecteurs MP et MQ sur les axes sont

$$x_P - x = yy', \qquad y_P - y = -y;$$

$$x_Q - x = -x, \qquad y_Q - y = \frac{x}{y'}.$$

Ce sont les coordonnées des points P′ et Q′ :

$$x_{P'} = yy', \qquad y_{P'} = -y$$

$$x_{Q'} = -x, \qquad y_{Q'} = \frac{x}{y'};$$

en écrivant que les coefficients angulaires des tangentes aux lieux de ces points sont égaux, nous avons

$$\frac{dy_{P'}}{dx_{P'}} = \frac{dy_{Q'}}{dx_{Q'}},$$

puis

$$\frac{-y'}{y'^2 + yy''} = -\frac{y' - xy''}{y'^2}.$$

$$y'^3 = y'^3 - xy'^2y'' + yy'y'' - xyy''^2,$$

$$y''(xy'^2 + xyy'' - yy') = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$y'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{y'^2 + yy''}{yy'} - \frac{1}{x} = 0.$$

La première donne $y = ax + b$; elle donne toutes les droites du plan. Cette solution était évidente *a priori*, car, dans ce cas, les deux points P′ et Q′ se meuvent sur une même droite fixe qui passe par le point O, la droite OP′Q′.

La deuxième équation donne

$$\mathrm{L}\,|\,yy'\,| = \mathrm{L}\,|\,x\,| + \mathrm{C},$$

ou

$$yy' = \mathrm{C}x.$$

L'intégration s'achève sans peine et conduit à l'équation $y^2 = \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}$, qui représente toutes les ellipses et hyperboles ayant pour axes Ox et Oy.

Cette relation est non moins évidente, car on sait que, dans ce cas, le rapport $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MQ}}$ est constant ; de même alors le rapport $\frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OQ'}}$, et les deux courbes lieux de P′ et de Q′ sont homothétiques.

Bonnes solutions : MM. Maurice Roi ; L. Simon, à Fourmies ; L. Naucelle, à la Châtre ; M. Ullmann, à Héricourt ; A. Rousseau.
Assez bonnes solutions : MM. R. Dufour, à Nancy ; G. Singier, à Armentières ; J. N.

PHYSIQUE

2131. — *Un aérostat sphérique se trouve en équilibre à l'altitude h. Calculer la tension* T *de l'enveloppe à la partie supérieure.*

On négligera dans ce calcul les variations de masse spécifique de l'air et du gaz sur toute la hauteur du ballon.

Calculer sans avoir recours à l'approximation précédente :

1° *La masse totale du ballon ;*

2° *La masse du gaz contenu dans le ballon ;*

3° *La tension* T *de l'enveloppe à la partie supérieure.*

Données : R, *rayon de l'aérostat qui est supposé de grandeur invariable. On maintient l'égalité de pression entre le gaz et l'atmosphère à l'orifice inférieur du ballon.*

d, densité du gaz par rapport à l'air.

g, accélération de la pesanteur, au lieu donné, accélération qu'on supposera indépendante de l'altitude.

a, masse spécifique de l'air, à la température t et sous la pression d'une colonne de mercure de 760^{mm}, *observée au lieu donné et supposée à* 0°. *On admettra que l'atmosphère est tout entière à la température t et immobile.*

P, *pression atmosphérique du lieu au niveau du sol.*

m, masse spécifique du mercure à 0°.

h, altitude du centre de l'aérostat.

(*Ecole des mines de St-Etienne, 1910.*)

La tension T demandée et l'excès Δp de la pression intérieure sur la pression extérieure sont liées par la relation supposée connue

$$\Delta p = \frac{2T}{R} \qquad \text{ou} \qquad T = \frac{1}{2} R \Delta p.$$

Δp est la différence des pressions dues à une hauteur 2R d'air atmosphérique et à une hauteur 2R de gaz. En appelant p la pression supposée d'abord uniforme sur toute la hauteur du ballon, p_0 la pression d'une colonne de mercure de 760^{mm} et a' la masse spécifique de l'air à la pression p, on a :

$$\Delta p = 2Ra'(1 - d)g \qquad \text{avec} \qquad a' = \frac{p}{p_0} a.$$

D'autre part, la pression p à l'altitude h et la pression P au niveau du sol sont liées par la formule du nivellement barométrique

$$p = Pe^{-\frac{a'}{p_0}h}.$$

On en déduit, en fonction des données,

$$T = R^2 ag(1 - d)\frac{P}{p_0} e^{-\frac{a}{p_0}h}.$$

1. Le ballon étant en équilibre, sa masse totale est égale à la masse de l'air déplacé. Négligeons le volume des agrès et calculons la masse d'une sphère d'air de rayon R. Pour faire le calcul *sans approximation*, considérons une tranche horizontale située à une distance z du point inférieur du ballon et d'épaisseur dz. Soit p la pression de l'air à ce niveau et Kp sa masse spécifique, en désignant par K

la constante $\frac{a}{p_0}$. La masse de la tranche d'air sera

$$dm = Kp \times \pi \left\{ R^2 - (R - z)^2 \right\} dz.$$

Si q désigne la pression au point inférieur, c'est-à-dire à l'altitude $h = R$, on a

$$p = qe^{-Kz} \qquad \text{avec} \qquad q = Pe^{-Kz/(2R)}.$$

La masse cherchée a donc pour expression

$$m = \pi Kq \int_0^{2R} e^{-Kz}(2Rz - z^2\, dz.$$

L'intégration par parties donne pour l'intégrale générale

$$e^{-Kz} \left\{ -\frac{2Rz - z^2}{Kg} - \frac{2R - 2z}{K^2g^2} + \frac{2}{K^3g^3} \right\},$$

d'où

$$m = \pi Kq \left\{ \frac{2R}{K^2g^2}(e^{-2KgR} + 1) - \frac{2}{K^3g^3}(1 - e^{-2KgR}) \right\},$$

expression n'offrant aucune espèce d'intérêt.

Il faut, dans le développement de e^{-2KgR}, aller jusqu'au terme en R^3 pour trouver la valeur approchée prévue

$$\frac{4}{3}\pi R^3 a \frac{q}{p_0}.$$

2. La masse de gaz contenue dans le ballon se calcule de la même manière en remplaçant a par ad et, par conséquent, K par Kd.

3. La tension T se calcule toujours par la formule

$$T = \frac{1}{2} R\Delta p.$$

$\Delta p = p' - p$, différence des pressions intérieure et extérieure.

$$p = qe^{-2KgR}, \qquad p' = qe^{-2Kg(1-d)R}.$$

donc

$$T = \frac{1}{2} Rq\left(e^{-2KgR} - e^{-2Kg(1-d)R}\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$T = \frac{1}{2} Rp \left\{ e^{(1-d)2KgR} - 1 \right\}.$$

Le premier terme du développement est

$$\frac{1}{2} Rp(1 - d)2KgR = R^2ag(1 - d)\frac{p}{p_0}.$$

ce qui est d'accord avec l'expression approchée d'abord trouvée, où $Pe^{-\frac{R}{p_0}g}$ représente la pression au niveau du centre du ballon.

CHIMIE

Un certain poids de pentachlorure de phosphore est mis en longue digestion dans de l'eau en excès, puis la liqueur est évaporée jusqu'à consistance sirupeuse, à une température voisine de 150° *; on poursuit l'évaporation jusqu'à ce que le poids du résidu* R *ne varie plus. Les vapeurs dégagées ont été recueillies*

dans une solution de nitrate d'argent en excès. Le précipité blanc formé pesait, après dessiccation, $1^g,435$.

Le résidu R est redissous dans l'eau, puis additionné de soude en quantité insuffisante pour la neutralisation. La nouvelle liqueur est évaporée à siccité, puis calcinée au rouge et laisse un résidu r pesant $0^g,22$. *On constate que la dissolution de r dans l'eau est complète, que la liqueur obtenue est neutre, et qu'elle donne avec le nitrate d'argent un précipité parfaitement blanc. On demande la composition centésimale du résidu r.*

On prendra : H = 1, O = 16, Cl = 35,5, P = 31, Na = 23, Ag = 108.

(*Ecole des mines de St-Etienne, 1910.*)

L'action de l'eau sur le pentachlorure de phosphore est représentée par l'équation

$$x(PCl^5 + 4H^2O = PO^4H^3 + 5HCl).$$

L'acide chlorhydrique dégagé donne avec le nitrate d'argent un précipité représenté par $5xAgCl$. Or $AgCl = 143,5$; donc $5x \times 143,5 = 1435$ milligrammes, d'où $x = 2$. L'expérience porte donc sur 2 millimolécules de pentachlorure.

Au rouge, la soude fixe une certaine quantité d'anhydride phosphorique à l'état de métaphosphate ou de pyrophosphate : la formation d'orthophosphate se trouve exclue par la couleur du précipité final et la présence finale d'acide libre par la neutralité de la liqueur.

Supposons d'abord le résidu r formé exclusivement de métaphosphate. Le nombre y des molécules de ce sel devrait satisfaire à l'équation $yPO^3Na = 220$, d'où $y = \frac{220}{102} = 2,157$, ce qui n'est pas possible, puisqu'il n'y avait dans la liqueur primitive que $2PO^4H^3$.

Le résidu r est donc formé, au moins en partie, de pyrophosphate $P^2O^7Na^4$ et sa composition peut être représentée par $aPO^3Na + bP^2O^7Na^4$, ce qui donne

$$102a + 266b = 220, \qquad \text{avec la condition} \qquad a + 2b = 2.$$

On en déduit $$a = \frac{46}{31}, \qquad b = \frac{8}{31}$$

et, pour la composition du résidu,

métaphosphate	151,35	soit, pour	100,	68,8
pyrophosphate	68,65	—		31,2
	220,00			100,0

CONCOURS DE 1914

ÉCOLE NAVALE

Algèbre, Analyse et Trigonométrie.

2266. — I. Calculer l'intégrale définie

$$y = \int_0^{\pi} e^{mx} \sin x\,dx.$$

On suppose que m désigne un nombre positif donné.

Etudier, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, les variations de la fonction $y(x)$, et construire la courbe représentative. On montrera qu'après avoir tracé la partie de la courbe répondant aux valeurs de x comprises entre 0 et 2π, le reste de la courbe s'en déduit par une construction simple. On tracera avec soin cette même partie de la courbe pour $m = 1$.

II. On considère y comme une fonction de m. Calculer la dérivée de cette fonction par rapport à m et la dérivée par rapport à α de cette dérivée.

III. On considère l'intégrale

$$x = \int_0^{\alpha} e^{m\alpha} \cos \alpha d\alpha.$$

A chaque valeur de x répondent en général une infinité de valeurs de α données par la relation précédente et à chacune de ces valeurs de α répond une valeur de la fonction y, ce qui permet de dire que y est fonction de x. Calculer la dérivée de y par rapport à x; on désignera cette dérivée par y'. Démontrer qu'il existe entre x, y et y' une relation indépendante de α et linéaire par rapport à chacune des trois variables x, y et y'. Former cette relation ; l'intégrer. Déduire de l'intégration la relation indépendante de α qui existe entre les fonctions x et y.

(16 juin, de 7 h. à 10 h.)

Géométrie analytique.

2267. — Soient F et F′ les projections sur deux axes rectangulaires fixes $x'Ox$, $y'Oy$, d'un point C de leur plan, dont les coordonnées sont $OF = a$, $OF' = b$. On considère deux paraboles ayant leur sommet commun à l'origine O, et dont les foyers sont respectivement aux points F et F′.

1° On demande l'équation du lieu géométrique du point M sommet d'un angle droit dont l'un des côtés est tangent à l'une des paraboles, et dont l'autre côté est tangent à l'autre parabole. On construira la courbe répondant à cette équation.

2° Cette courbe a une asymptote A. On peut considérer la droite A et le point C comme se correspondant réciproquement, la droite étant déterminée dès que le point C est donné, et le point C étant déterminé quand la droite A est donnée. Ceci posé, on demande quelle est la courbe décrite par le point C quand la droite A se déplace de manière à passer par un point fixe.

3° On demande aussi quelle est la courbe décrite par le point C quand la droite A se déplace de manière à rester tangente à la parabole qui a son sommet au point O et son foyer à un point φ du plan dont on désignera les coordonnées par $-a$ et $-b$.

(17 juin, de 7 h. à 10 h.)

Mécanique.

2268. — Dans un plan, où l'on a tracé deux axes rectangulaires Ox et Oy, on donne une parabole (C) ayant pour équation $y^2 = 2px$, et, sur l'axe des x, un point fixe A dont l'abscisse est égale à $\frac{9p}{2}$.

Un point matériel M, pesant, de poids P, se trouve dans ce plan ; il est sollicité par une force F, définie comme il suit : B désignant le point de rencontre de la parabole (C) avec la parallèle à Ox menée par M, la force F est parallèle au vecteur BA, de même sens, et son intensité est donnée par la relation : $\frac{F}{P} = \frac{BA}{3p}$.

1° On suppose d'abord le plan yOx vertical, Ox étant horizontal et Oy dirigé vers le haut. Calculer, pour une position donnée du point M dans le plan, les projections sur Ox et Oy de la résultante des forces P et F ; indiquer pour quelles positions de M cette résultante sera nulle.

On suppose le point M assujetti à rester sur la parabole (C), sur laquelle il peut glisser sans frottement ; déterminer ses positions d'équilibre ainsi que les réactions correspondantes de la parabole.

Le point M étant placé, sans vitesse initiale, en un point donné de la parabole, reconnaître dans quel sens commencera son mouvement sur la parabole.

2° On suppose en second lieu que le plan yOx fait un angle de 60° avec le plan de l'horizon, Ox étant horizontal et Oy dirigé vers le haut.

Le point M n'est maintenant assujetti qu'à rester dans le plan yOx sur lequel il peut glisser sans frottement. Déterminer le mouvement du point M sous l'action des forces P et F.

On supposera qu'à l'origine des temps les coordonnées du point M sont : $x = 0$, $y = -\frac{3p\sqrt{3}}{2}$. On montrera que la vitesse initiale peut être choisie de façon que le mouvement soit périodique et que, dans cette hypothèse, la trajectoire est un arc d'une parabole.

(19 juin, de 7 h. à 10 h.)

Calcul.

2269. — Calculer les angles a, b, C compris entre 0° et 180° et donnés par les formules

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}, \qquad \sin C = \frac{\sin c\,.\,\sin A}{\sin a}.$$

Données : $A = 123°\,27'\,18''$, $B = 45°\,28'\,46''$, $c = 68°\,25'\,52''$.

(17 juin, de 4 h. à 6 h.)

Épure.

2270. — La ligne de terre est au milieu de la feuille. Les données suivantes sont rapportées à la ligne de terre et à la perpendiculaire menée au milieu de cette ligne.

On placera une première sphère dont le rayon est égal à 6 centimètres, dont le centre est sur le plan horizontal de projection à une distance au-dessous de la ligne de terre égale à 7 centimètres, et à une distance à droite de la perpendiculaire milieu égale à 6 centimètres.

Une seconde sphère est tangente à la ligne de terre en un point qui est situé à gauche de la perpendiculaire milieu à une distance égale à 6 centimètres ; son rayon est égal à 7 centimètres ; elle est tangente extérieurement à la première sphère, et son centre est au-dessus du plan horizontal de projection.

On représentera le solide limité extérieurement par les surfaces suivantes :

1° Le plan horizontal de projection ;

2° Le cône qui a son sommet au centre de la première sphère et dont toutes les génératrices sont tangentes à la seconde ;

3° Le plan de contact de ce cône avec la seconde sphère ;

4° Le plan du cercle d'intersection du cône avec la première sphère.

(18 juin, de 2 h. à 4 h. 1/2.)

Physique.

I. — **2271.** Un condensateur à lame d'air est formé de deux armatures planes parallèles d'un mètre carré de surface, distantes d'un centimètre. L'influence des bords est supposée négligeable. On établit entre les armatures une différence de potentiel de 3 000 volts.

1° Calculer la charge de chaque armature.

2° Calculer en grammes-poids la force qui s'exerce sur chacune d'elles.

3° Les armatures étant ainsi chargées et maintenues isolées, donc à charge constante, on les écarte de façon à porter leur distance à 10 centimètres. Quel est le travail qu'il a fallu dépenser et quelle est alors la différence de potentiel qui existe entre les armatures ? Comparer ce travail à la variation d'énergie du condensateur.

4° Partant des mêmes conditions initiales, on fait de nouveau varier la distance de 1 à 10 centimètres, mais cette fois en maintenant constante la différence de potentiel (3 000 volts). Quel est dans ce cas le travail qu'il faut dépenser et quelle est la charge à la fin du déplacement ? Comparer ce travail à la variation d'énergie du condensateur.

5° Les armatures étant distantes de 1cm, portées à 3 000 volts et isolées, on remplace l'air par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique égal à 5. Que deviennent la différence de potentiel et les forces d'attraction ?

6° On fait la même substitution, mais cette fois en maintenant invariable la différence de potentiel. Que deviennent alors les charges et les forces d'attraction ?

Un volt $= \frac{1}{300}$ d'unité électrostatique de différence de potentiel.

II. — Aberrations de réfrangibilité des lentilles ; leur ordre de grandeur ; leur correction.

(16 juin, de 2 h. à 5 h.)

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Août 1914. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR L'ÉQUATION DE BERNOULLI

par M. **A. Charrasse**, répétiteur au lycée de Nice.

L'équation de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0, \tag{1}$$

où n est un exposant quelconque différent de zéro et de l'unité, se ramène comme on sait à une équation linéaire en prenant pour inconnue $y^{1-n} = z$. Le procédé suivant conduit assez rapidement au résultat.

On cherche l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Xy = 0. \tag{2}$$

Elle s'obtient par une quadrature :

$$y = Ce^{-\int X dx}. \tag{3}$$

Cela fait, pour intégrer l'équation (1), on cherche à satisfaire à cette équation en prenant pour y une expression de la forme (3) en considérant C non plus comme une constante, mais comme une fonction inconnue de x.

On est ramené de la sorte à la recherche de l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dC}{C^n} + X_1 e^{1-n \int X dx} dx = 0.$$

Les variables sont séparées et le premier membre est une différentielle exacte. Dès lors la fonction auxiliaire C dépend d'une constante arbitraire. L'équation (3) donne l'intégrale cherchée.

Ce procédé est identique comme on voit à celui que l'on emploie pour la recherche de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Application. — *Déterminer une courbe telle que l'ordonnée à l'origine de la tangente soit égale à $2x^3y^2$. (École polytechnique, oral, 1913.)*

L'équation à intégrer est

$$xy' - y + 2x^2y^2 = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation $xy' - y = 0$ étant $y = Cx$, l'application de la méthode conduit à l'équation

$$\frac{dC}{C^2} = -2x^2 dx,$$

dont l'intégrale générale est $C = \dfrac{3}{2(h + x^3)}$ (h, constante arbitraire),

de sorte que
$$y = \frac{3x}{2(h + x^3)}$$
est l'équation générale des courbes jouissant de la propriété énoncée.

N. B. — La méthode n'est pas nouvelle, mais n'existe à ma connaissance dans aucun traité d'analyse. Elle pourra intéresser les élèves de Mathématiques spéciales dont les cours ne la mentionneraient pas.

CONCOURS D'ADMISSION DES AGENTS DES POSTES AUX COURS DE L'UNIVERSITÉ

Concours de 1912.

Mathématiques.

2146. *On donne deux droites Ox et $O'y$ non situées dans le même plan.*

Un point M décrit Ox d'un mouvement uniforme, pendant que M' décrit $O'y$ d'un mouvement uniforme. On sait que les courbes hodographes des mouvements de ces points se réduisent à des points que l'on appellera h et h'.

1° *Montrer que la courbe hodographe du mouvement du point P divisant MM' dans le rapport constant k se réduit aussi à un point qu'on obtient en divisant la droite hh' dans le rapport k.*

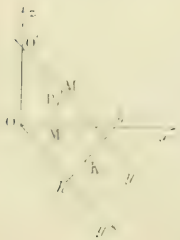
2° *Trajectoire du point P.*

3° *Lieu géométrique de la droite MM'.*

4° *Comment modifier ces résultats si on suppose que Ox et $O'y$ sont dans un même plan?*

5° *Quelle serait la trajectoire du point P si les points M, M' décrivaient Ox et $O'y$ avec des accélérations constantes?*

Nous prendrons Ox pour axe des x, la perpendiculaire commune aux deux droites pour axe des z, et la parallèle à $O'y$ menée par le point O pour axe des y, et nous supposerons qu'à l'origine des temps le second mobile est au point O'.



Soient alors v et v' les vitesses constantes des deux points M et M', et $z = a$ la cote du point O'. Les coordonnées du point M sont $x_M = x_0 + vt$, $y_M = 0$, $z_M = 0$; celles du point M', $x_{M'} = 0$, $y_{M'} = v't$, $z_{M'} = a$. Alors les coordonnées du point P, qui divise MM' dans le rapport $\frac{MP}{M'P} = k$, sont
$$x_P = \frac{x_0 + vt}{1 - k}, \qquad y_P = \frac{-kv't}{1 - k}, \qquad z_P = \frac{-ak}{1 - k}.$$

Ce point décrit d'un mouvement uniforme une droite ayant pour équations paramétriques les équations précédentes, et avec une vitesse dont les composantes sont
$$v_x = \frac{v}{1 - k}, \qquad v_y = \frac{-kv'}{1 - k}, \qquad v_z = 0.$$

L'hodographe de ce mouvement est donc le point K qui a pour coordonnées
$$x = \frac{v}{1 - k}, \qquad y = \frac{-kv'}{1 - k}, \qquad z = 0;$$
ce point, situé dans le plan des xy, divise bien le segment formé par les points $h(v, 0, 0)$, $h(0, v', 0)$, dans le rapport k.

La droite MM' trace sur les deux droites données deux divisions homographiques semblables : elle

engendre donc un paraboloïde hyperbolique. Les équations de cette droite sont d'ailleurs

$$\frac{x}{x_0 + vt} = \frac{y - v't}{-v't} = \frac{z - a}{-a},$$

et l'élimination de t entre les deux est extrêmement simple : en égalant successivement les deux premiers rapports au troisième, nous avons

$$x_0 + vt = -\frac{ax}{z - a}, \qquad v't = \frac{ay}{z},$$

et le lieu a pour équation

$$\frac{avy}{z} + \frac{av'x}{z - a} + v'x_0 = 0,$$

ou

$$avy(z - a) + av'xz + v'x_0z(z - a) = 0.$$

Nous reconnaissons bien là l'équation d'un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs les deux plans $z = 0$ et $av'x + avy + v'x_0z = 0$.

Ce paraboloïde renferme visiblement les deux droites $y = 0$, $z = 0$ et $x = 0$, $z = a$, qui sont les deux droites données.

Si les deux droites sont dans le même plan, il faut faire $a = 0$. Le lieu du point P est une droite du plan des xy et l'hodographe de son mouvement est placé comme précédemment. Quant à la droite MM', elle enveloppe une parabole tangente aux deux droites Ox et Oy.

L'équation de MM' dans le plan des xy est $v'tx + (x_0 + vt)y - v't(x_0 + vt) = 0$, et son enveloppe s'obtient en exprimant que l'équation en t a une racine double, ce qui donne

$$(v'x + vy - v'x_0)^2 + 4vv'x_0y = 0.$$

Telle est l'équation de la parabole enveloppe de MM'. Ses contacts avec les axes et avec la droite de l'infini sont en évidence.

Dans le cas où les mouvements de M et M' sont uniformément variés, les coordonnées de ces deux points sont

$$x_M = x_0 + v_0t + \gamma\frac{t^2}{2}, \qquad y_M = 0, \qquad z_M = 0,$$

$$x_{M'} = 0, \qquad y_{M'} = v_0t + \frac{\gamma't^2}{2}, \qquad z_{M'} = a.$$

Celles du point P sont

$$x_P = \frac{x_0 + v_0t + \frac{\gamma t^2}{2}}{1 - k}, \qquad y = \frac{-k\left(v_0t + \frac{\gamma't^2}{2}\right)}{1 - k}, \qquad z = \frac{-ak}{1 - k}.$$

Le lieu de ce point est une parabole du plan $z = -\frac{ak}{1 - k}$.

L'hodographe de ce point a pour équation $x = \frac{v_0 + \gamma t}{1 - k}$, $y = \frac{-k(v_0' + \gamma' t)}{1 - k}$, $z = 0$; c'est une droite du plan des xy.

L'accélération a pour composantes $\gamma_x = \frac{\gamma}{1 - k}$, $\gamma_y = \frac{-k\gamma'}{1 - k}$, $\gamma_z = 0$; elle est constante.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; P. Delattre, collège Rollin ; M. Ullmann, à Héricourt.

2147. — *x_0, y_0 sont les coordonnées d'un point* P *du plan ; discuter, d'après la position de ce point, le nombre des racines réelles de l'équation*

$$x\mathrm{L}x - xx_0 - x - y_0 = 0,$$

$\mathrm{L}x$ étant le logarithme népérien de x.

En particulier, lieu géométrique du point P *pour que l'équation donnée ait une racine double.*

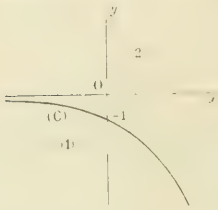
Pour étudier l'équation proposée, il suffit d'étudier la fonction

$$y = \mathrm{L}x - x_0 - 1 - \frac{y_0}{x}.$$

Cette fonction n'est définie que de 0 à $+\infty$. Sa dérivée est $y' = \frac{1}{x} + \frac{y_0}{x^2}$.

Si y_0 est positif, elle est toujours positive, et la fonction y est toujours croissante. Pour $x = +\varepsilon$, elle est égale à $-\infty$, et pour $x = +\infty$, elle est égale à $+\infty$. Elle s'annule donc une fois et une seule; aussi, quand y_0 est positif, l'équation a toujours une racine réelle et une seule.

Si y_0 est négatif, la dérivée s'annule pour $x = -y_0$, elle est négative avant et positive après; la fonction part de $+\infty$, décroît jusqu'à un certain minimum, puis croît jusqu'à $+\infty$. Si le minimum est positif, il n'y a pas de racine; si le minimum est négatif, il y a deux racines réelles, et, quand le minimum est nul, il y a une racine double.



Or le minimum a pour valeur $\mathrm{L}(-y_0) - x_0$; la courbe séparative est donc la courbe $x - \mathrm{L}(-y) = 0$, qui est tout entière du côté des y négatifs; cette courbe (C) n'est pas autre chose d'ailleurs que la courbe logarithmique qui a tourné de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point O.

Dans la région hachurée il y a deux racines réelles; il y en a une dans la région (2) et aucune dans la région (1).

Bonnes solutions : MM. R. Malaise, à Denain; L. Naucelle, à La Châtre; L. Simon, à Fourmies; M. Roux, le Creusot; Delattre Pierre, collège Rollin; A. Rousseau.

Assez bonnes solutions : MM. R. Dufour, à Nancy; G. Lach, à Denain; M. Ullmann, à Héricourt.

Chimie.

2148. — *Un petit ballon renferme 10 grammes de carbonate de calcium pur; il est fermé par un bouchon traversé de deux tubes, l'un de ces tubes pourvu d'un robinet est surmonté d'une ampoule contenant de l'acide sulfurique, l'autre tube est en relation avec un appareil desséchant puis avec un long tube de porcelaine imperméable aux gaz et contenant du charbon de sucre. A la suite de ce dernier, une pompe permet de recueillir les gaz ou de faire le vide dans tout l'appareil.*

On commence par porter au rouge le tube de porcelaine contenant le charbon de sucre; on fait ensuite le vide complet dans l'appareil, puis, ouvrant le robinet de l'ampoule, on fait très lentement tomber l'acide sulfurique dans le ballon. On recueille alors le gaz dégagé à la sortie de l'appareil, c'est-à-dire après son passage sur le charbon porté au rouge. Quand la réaction de l'acide sulfurique est complètement terminée, on fait de nouveau le vide, en ayant soin de réunir le gaz ainsi extrait à celui qui s'est librement dégagé.

On demande quel est le volume total de ce gaz à 0° et 760mm.

C = 12, O = 16, Ca = 40. *Densité de l'hydrogène :* 0,0695. *Poids du litre d'air :* 1g,293.

L'acide sulfurique réagit sur le carbonate de calcium du ballon pour dégager du gaz carbonique et de la vapeur d'eau conformément à la formule

$$CO^3Ca + SO^4H^2 = SO^4Ca + CO^2 + H^2O.$$

La vapeur d'eau est arrêtée par le tube desséchant. Le gaz carbonique réagit, au rouge, sur le carbone du tube de porcelaine en donnant de l'oxyde de carbone :

$$CO^2 + C = 2CO.$$

Finalement, nous voyons qu'une molécule-gramme de carbonate de calcium fournirait deux molécules-grammes d'oxyde de carbone. Or le poids moléculaire du carbonate est égal à 100 et les 10 grammes employés représentent un dixième de molécule; on recueille donc un cinquième de molécule-gramme d'oxyde de carbone.

L'énoncé ne donnant pas le poids atomique de l'hydrogène, il est naturel de le supposer égal à 1 et de prendre comme volume moléculaire le volume de 2 grammes d'hydrogène, ce qui représente, dans les conditions normales,

$$\frac{2}{0{,}0895 \times 1{,}293} = 22^{l},25.$$

Le volume du gaz recueilli est donc, à 0° et 760^{mm},

$$\frac{1}{5} \times 22{,}25 = 4^{l},45.$$

Pierre DELATTRE, collège Rollin.

Bonnes solutions de MM. R. Malaise, à Denain, et Marcel Ullmann, à Héricourt.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1913 (*Fin*).

Physique.

Groupe I.

2172. — *Un puissant aimant permanent,* A, *est équivalent à l'ensemble de deux pôles magnétiques distants de* 8 *centimètres. Cet aimant est fixé sur une règle graduée, la direction de cette règle et celle de la ligne des pôles de l'aimant sont horizontales et dans le plan du méridien magnétique.*

1° *Une petite boussole,* B, *dont l'aiguille est horizontale, peut être déplacée le long de la règle graduée, et l'on constate que son aiguille se retourne lorsqu'elle passe à* 60 *centimètres du milieu de l'aimant* A. *On demande quel est le moment magnétique de cet aimant* A *sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre, mesurée à* 1 *ou* 2 *p.* 100 *près, vaut* 0,2 (C. G. S.). *Est-il légitime de faire ce calcul en assimilant l'aimant* A *à un aimant infiniment court ?*

2° *On fait tourner la règle graduée d'un petit angle autour de la verticale passant par le centre de la boussole* B, *de manière que le déplacement du centre de l'aimant* A, *que l'on mesure à* 1 *millimètre près, soit de* 5 *centimètres. Quelle est alors la direction de l'aiguille dans la boussole* B ? *Si l'on fait osciller cette aiguille autour de sa position d'équilibre, quelle sera la période des oscillations, sachant qu'en l'absence de l'aimant* A, *la période des oscillations dans le champ terrestre serait de* 1 *seconde ?*

3° *On replace ensuite la règle graduée et l'aimant* A *dans leur position primitive, et l'on retire la boussole* B *pour lui substituer un pendule constitué par un aimant* C *identique à* A, *dont la ligne des pôles est verticale dans la position d'équilibre. On fait osciller ce pendule autour d'un axe perpendiculaire au plan du méridien magnétique, et la période des oscillations est de* 12 *secondes. Cette période devient* 10 *secondes lorsque l'on désaimante l'aimant oscillant* C. *On sait en outre que l'inclinaison du champ magnétique terrestre au lieu considéré est de* 60 *degrés.*

Déduire de là quelle serait la période des oscillations si l'on aimantait à nouveau C *exactement de la même manière, mais en sens inverse ; et quel est le moment d'inertie du pendule* C *par rapport à son axe de suspension. Déterminer enfin quelle serait, avec cette nouvelle aimantation, la position d'équilibre que prendrait le pendule* C *si l'on supprimait l'aimant* A.

1. Le champ magnétique produit par l'aimant en un point B de la ligne des pôles situé à une distance r du milieu A de l'aimant, si on désigne par μ la masse de chaque pôle et par $2l$ la longueur de l'aimant, est

$$\frac{\mu}{(r-l)^2} - \frac{\mu}{(r+l)^2} = \frac{4l\mu r}{(r^2-l^2)^2}$$

ou, en désignant par M le moment magnétique du barreau,

$$\frac{2M}{r^3\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)^2}.$$

Or, à la distance considérée, on a

$$\frac{l^2}{r^2}=\frac{16}{3600},\qquad 2\frac{l^2}{r^2}=\frac{32}{3600}<\frac{1}{100}.$$

Cette quantité est donc négligeable et l'expression du champ peut être réduite à $\frac{2M}{r^3}$.

A l'instant où l'aiguille se retourne, le champ total dans lequel elle se trouve est nul, c'est-à-dire que le champ produit par l'aimant neutralise le champ terrestre, donc

$$\frac{2M}{r^3}=0{,}2,\qquad \text{d'où}\qquad M=21\,600\ \text{C. G. S.}$$

2. Le champ produit par l'aimant et la composante horizontale du champ terrestre forment les composantes, toutes deux égales à H, du champ résultant H'. Celui-ci est parallèle à la droite joignant les positions successives du centre de l'aimant et, comme on le verrait immédiatement sur une figure, on a

$$\frac{H'}{H}=\frac{5}{60},\qquad H'=\frac{1}{12}H.$$

Si nous désignons par I le moment d'inertie de l'aiguille de la boussole et par M' son moment magnétique, la période x de son oscillation dans le champ H' est donnée par la formule

$$x=2\pi\sqrt{\frac{I}{M'H'}}.$$

Dans le champ terrestre, on a

$$1=2\pi\sqrt{\frac{I}{M'H}},$$

donc

$$x=\sqrt{\frac{H}{H'}}=\sqrt{12}=3^{\text{sec}},46.$$

3. Remarquons d'abord que le barreau C, identique à A, a même moment magnétique M que A. L'action due à la composante horizontale H du champ terrestre sur chacun des pôles S et N du barreau C est équilibrée par l'action de A.

Reste la composante verticale Z qui doit contrarier l'action de la pesanteur, puisque le barreau oscille plus lentement que s'il n'est pas aimanté ; donc le pôle nord N est en haut, le pôle sud S en bas. Si K est le moment d'inertie du barreau, mg son poids, a la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation, la période d'oscillation, égale à 12, donne la relation

$$(1)\qquad 12=2\pi\sqrt{\frac{K}{mga-MZ}}.$$

Si le barreau n'est pas aimanté, on a

$$(2)\qquad 10=2\pi\sqrt{\frac{K}{mga}},$$

et, s'il est aimanté en sens inverse,

$$(3)\qquad y=2\pi\sqrt{\frac{K}{mga+MZ}}.$$

En éliminant K entre (1) et (2) on a, après avoir élevé au carré,

$$\frac{100}{144}=\frac{mga-MZ}{mga}=1-\frac{MZ}{mga}.$$

De même (2) et (3) donnent

$$\frac{100}{y^2} = \frac{mga + MZ}{mga} = 1 + \frac{MZ}{mga}.$$

Ajoutons :

$$\frac{100}{y^2} + \frac{100}{144} = 2, \qquad y^2 = \frac{14\,400}{188} = 76{,}6, \qquad y = 8^{\text{sec}},76.$$

D'autre part (1) et (2) peuvent s'écrire

$$\frac{4\pi^2 K}{144} = mga - MZ \qquad \text{et} \qquad \frac{4\pi^2 K}{100} = mga,$$

d'où, en éliminant mga,

$$4\pi^2 K\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{144}\right) = MZ.$$

Or $M = 21\,600$ et $Z = 0{,}2 \operatorname{tg} 60^\circ = 0{,}2\sqrt{3}$. On en déduit

$$K = \frac{21\,600 \times 0{,}2 \times \sqrt{3} \times 14\,400}{4\pi^2 \times 44} = 62\,000.$$

Considérons enfin la position d'équilibre du pendule C en l'absence du barreau A et soit α l'angle que fait cette position avec la verticale. Les forces mg, μZ, μH, agissant sur le barreau, ont respectivement pour moments $mga \sin\alpha$, $2\mu Zl \sin\alpha$ ou $MZ \sin\alpha$, $-2\mu Hl \cos\alpha$ ou $-MH \cos\alpha$. Leur équilibre donne

$$(mga + MZ) \sin\alpha = MH \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MH}{mga + MZ} = \frac{MZ}{\sqrt{3}(mga + MZ)} = \frac{44}{188\sqrt{3}} = 0{,}135, \qquad \alpha = 7^\circ 41' \text{ environ.}$$

TOPIN, à Grandvilliers.

Groupe II.

2176. — *Pour déterminer le moment magnétique d'une longue tige aimantée, on l'a suspendue par son centre de gravité, et l'on a fait glisser sur la tige une bague d'une masse de 1 décigramme. En mettant cette bague à 50 centimètres du centre de gravité, la tige aimantée placée horizontalement est restée en équilibre. On a aussi mesuré l'inclinaison du champ magnétique terrestre* $I = 60^\circ$; *et l'on a encore trouvé que la composante horizontale du champ terrestre vaut* $H = 0{,}2$ (C. G. S.) *à environ 1 p. 100 près, l'accélération de la pesanteur étant* $g = 981$ (C. G. S.).

On a construit d'autre part un long solénoïde cylindrique formé d'une seule couche de fil, dont les spires circulaires, au nombre de mille, ont 5 centimètres de rayon et sont distantes de 1 millimètre. Un courant de 2 ampères passe dans ce solénoïde. On demande d'abord quelle surcharge il faudrait placer à l'extrémité de ce solénoïde pour que, en le suspendant par son centre de gravité, son axe puisse rester horizontal malgré l'action du champ terrestre.

On dispose ensuite la tige aimantée suivant l'axe du solénoïde de manière que la moitié environ de la tige soit encore à l'extérieur.

En admettant que le pôle de l'aimant intérieur au solénoïde puisse être assimilé à une masse magnétique ponctuelle, on demande de calculer en grammes-poids la force exercée par le solénoïde sur ce pôle. On calculera également la force exercée par ce pôle sur la spire du solénoïde la plus voisine.

Dans une dernière expérience, on imprime à l'aimant un mouvement pendulaire rectiligne suivant l'axe du solénoïde. La période du mouvement est de 1 seconde, et la distance des positions extrêmes est de 1 centimètre. On demande d'exprimer la loi de variation, en fonction du temps, de la force électromotrice induite dans le solénoïde, et de calculer la valeur de cette force électromotrice au moment de son maximum.

1. Considérons la tige aimantée maintenue horizontale sous l'action du poids p de la bague, appliqué à une distance a du centre de gravité, et du champ terrestre dont la composante verticale Z seule intervient. Si $2l$ désigne la longueur de la tige, m la masse magnétique du pôle nord, M le moment magnétique, l'équation d'équilibre s'écrit

$$pa = 2lm\,Z.$$

Or, en unités C. G. S., $p = 0{,}1 \times 981$, $a = 50$, $2lm = M$ et $Z = H \operatorname{tg} I = 0{,}2\sqrt{3}$. On trouve

$$M = 14160.$$

2. Appliquons au solénoïde la même condition d'équilibre en appelant M′ son moment magnétique et p' la valeur de la surcharge en grammes :

$$p' \times 981 \times 50 = M'Z.$$

Or M′ est le produit du nombre total de spires, qui est 1000, par la surface d'une spire $\pi \times 25$, et par l'intensité du courant, qui est de $\frac{2}{10}$ d'unités C. G. S. Remplaçons :

$$p' \times 981 \times 50 = 1000 \times \pi \times 25 \times 0{,}2 \times 0{,}3464,$$
$$p' = 0^g{,}111.$$

3. On sait que le champ magnétique, à l'intérieur d'un solénoïde, a pour expression $4\pi n_1 I$, n_1 étant le nombre de spires par centimètre, qui est ici de 10. L'action sur un pôle de masse m est le produit du champ par m. D'autre part, le nombre de grammes cherché, q, représente $q \times 981$ dynes. On aura donc

$$4\pi \times 10 \times 0{,}2 \times m = q \times 981,$$
$$q = 0{,}0256m.$$

Le moment magnétique M de la tige ne nous fait pas connaître la masse magnétique m. Si l'on suppose que la tige ait, comme le solénoïde, 100 centimètres de longueur, on aura $m = \frac{M}{100} = 141{,}6$ et $q = 3^g{,}625$ ou 3556 dynes.

Le champ produit par une spire en son centre a pour expression $\frac{2\pi}{a} I$, a désignant le rayon de la spire, ce qui donne ici

$$\frac{2\pi}{5} \times 0{,}2,$$

c'est-à-dire exactement la centième partie du champ total. La force cherchée sera donc

$$q' = 0{,}000256m$$

ou, dans l'hypothèse faite pour m, $q' = 0^g{,}03625$.

4. Ecrivons d'abord l'équation du mouvement de l'aimant ; c'est

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

a désignant l'élongation maximum et T la période, ce qui donne ici

$$x = \frac{1}{2} \sin 2\pi t.$$

La vitesse, dérivée de l'espace par rapport au temps, sera

$$v = \pi \cos 2\pi t.$$

Or la force électromotrice induite dans le solénoïde est évidemment proportionnelle à la vitesse :

$$e = e_0 \cos 2\pi t.$$

D'autre part, la force électromotrice est la dérivée du travail des forces électromagnétiques correspondant à un courant égal à l'unité. Or pour calculer ce travail il suffit de tenir compte du pôle intérieur au solénoïde, pour lequel nous avons trouvé une force électromagnétique égale à q pour un courant 0,2 ;

elle serait $5q$ pour un courant égal à l'unité. La force électromotrice sera donc $5q\,\frac{dx}{dt}$. Pour $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \pi$, donc $e_0 = 5q\pi$, ce qui donne, en supposant $q = 3556$ dynes,

$$e_0 = 56\,000 \text{ C. G. S. environ}$$

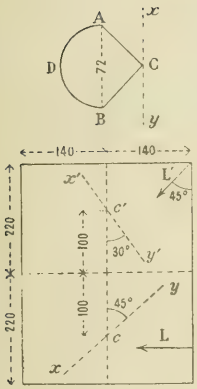
ou

$$e_0 = 56\,000 \times 10^{-8} = 0{,}00056 \text{ volt.}$$

CONCOURS DE 1914

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Épure.



2272. — Sur le segment de droite AB, on construit le demi-cercle ABD et le triangle rectangle isocèle ABC.

La surface ainsi formée, en tournant autour de la parallèle xy, menée par le point C à AB, engendre un solide S.

Sur la feuille d'épure, on donne par leurs projections, le point (c, c'), la droite $(xy, x'y')$, et une direction (L, L') de rayons lumineux, comme l'indique le croquis ci-contre, coté en millimètres.

Représenter par ses projections le solide S, avec les ombres produites sur sa surface.

Déterminer un point quelconque de chaque ligne d'ombre et de contour apparent, les points et tangentes remarquables.

Dessiner en trait fin le cadre et les lignes d'ombre. Mettre des hachures bleues sur les ombres visibles.

(*18 juillet, de 8 h. à 12 h.*)

QUESTION PROPOSÉE

2273. — Soit une figure S qui se déforme en restant toujours semblable à elle-même et de telle sorte que trois cercles de cette figure restent tangents à trois droites fixes. On demande :

1° Quelle est la trajectoire d'un point quelconque de la figure S ?

2° L'enveloppe d'une droite de la figure S sera en général de 4e classe. Quelles sont les droites de la figure S dont l'enveloppe n'est que de 3e classe?

3° Pour toute position de la figure S il existe un point J tel que le vecteur joignant ce point à un point quelconque de la figure S fasse avec la tangente à la trajectoire de ce point un angle qui est le même pour tous les points de la figure.

Quel est le lieu des points J ?

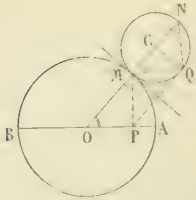
4° Définir le mouvement de la figure S d'une façon plus simple que dans l'énoncé de la question.

A.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

2145. — *On considère un cercle* O *et un diamètre fixe* AB. *D'un point variable* M *de la circonférence on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* AB. *Le lieu du point* Q *symétrique de* P *par rapport à la tangente en* M *est une néphroïde (épicycloïde à deux rebroussements).*



La perpendiculaire à MQ menée par le point Q rencontre OM au point N. Les deux triangles rectangles OPM et MQN sont égaux, car on a $MP = MQ$, et $\widehat{OMP} = \widehat{QMC}$. On en déduit $MN = OM$, et le cercle de diamètre MN passe par le point Q ; soit C le centre de ce cercle. L'angle $\widehat{MCQ}$ est le double de l'angle $\widehat{MNQ}$ et par suite aussi le double de l'angle $\widehat{AOM}$. Donc, l'arc MQ du cercle (C) est égal à l'arc AM du cercle (O) ; le point Q décrit donc une épicycloïde à deux rebroussements.

R. MANEN, à Albi.

Bonnes solutions par MM. Gaston Beiler, 2e d'artillerie, à Poitiers ; A. Berlande, à St-Cloud ; R. Dufour, école normale de Nancy ; Paul Gaubron, à Marmande ; Marcel Gironnet, lycée Saint-Louis ; G. Lach, à Douai ; A. Le Marchand, à Paris ; Maréscalchi ; G. Mouffleet, à Lyon ; L. Nauelle, à La Châtre ; E. Rémé, conducteur des ponts et chaussées, à Batna ; M. Roux, au Creusot ; Gaston Roy, école normale de Varzy ; L. Simon, à Fourmies ; Topin, à Grandvilliers ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2138. — *On donne un cercle de centre* O *et un point fixe* A *de ce cercle.*

Un diamètre variable MOM′ *coupe la tangente en* A *en un point* P.

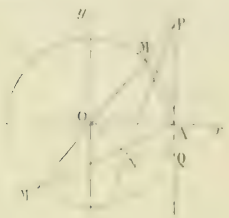
1° *Trouver le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles* PAM *et* PAM′, *et l'enveloppe de ces cercles.*

2° *Trouver l'enveloppe des bissectrices de l'angle* APO.

3° *Montrer que le lieu des centres de gravité des triangles* PAM *et* PAM′ *est une conchoïde de Nicomède.*

4° *Construire le lieu des orthocentres des triangles* PAM *et* PAM′.

5° *Trouver l'aire comprise entre la courbe et les asymptotes, ainsi que l'aire limitée par le cercle et la courbe.*



Posons $\widehat{AOM} = \omega$ et $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$.

Les coordonnées du point M sont $x = R\cos\omega$, $y = R\sin\omega$, et celles du point M′ s'en déduiront en changeant ω en $\omega + \pi$. Rien ne distingue donc le triangle APM du triangle APM′ et il suffit d'étudier le premier.

1. Nous prendrons comme perpendiculaires aux milieux des côtés la perpendiculaire au milieu de AP et celle au milieu de AM. Elles ont respectivement pour équations $y = \frac{AP}{2} = \frac{R\operatorname{tg}\omega}{2}$ et $y = x\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$.

Avec les notations adoptées, $y = \frac{Rt}{1-t^2}$ et $y = tx$. Le lieu a donc pour équation

$$y = \frac{Rxy}{x^2 - y^2};$$

il se décompose en $y = 0$, qui représente l'axe des x, et

$$x^2 - y^2 - Rx = 0,$$

qui représente une hyperbole équilatère, ayant l'origine pour centre, les points O et A pour sommets, et les bissectrices de l'angle des axes comme directions asymptotiques. Cette hyperbole est le véritable lieu. L'axe des x correspond au cas où le rayon OM vient se placer sur OA, car alors les deux droites qui définissent le lieu coïncident.

Il est facile de voir que les deux droites signalées tournent chacune autour d'un point fixe : la première, autour du point à l'infini sur Ox ; la seconde, autour du point O. Elles sont en correspondance (1, 2) ; ce qui montre que le lieu du point de rencontre est une cubique, qui admet le point O pour point double et qui passe au point à l'infini sur Ox. Comme les deux rayons coïncident une fois avec Ox, l'autre partie du lieu est une conique qui passe au point O. Il est facile de voir qu'elle passe aussi au point A, en envisageant en outre la perpendiculaire au milieu de MP, et, de plus, que les deux autres points à l'infini sont sur les bissectrices de l'angle des axes, car lorsque OM vient sur Oy, le point P va à l'infini et les deux bissectrices des angles AOM et AOM′ coïncident avec les bissectrices de l'angle des axes. Ces remarques, jointes au fait évident que le lieu admet Ox pour axe de symétrie, suffisent à fixer la nature et la position du lieu.

Le cercle circonscrit au triangle AMP a pour centre le point

$$x = \frac{R}{1-t^2}, \qquad y = \frac{Rt}{1-t^2},$$

et passe au point A (R, 0). Il a donc pour équation

$$\left(x - \frac{R}{1-t^2}\right)^2 + \left(y - \frac{Rt}{1-t^2}\right)^2 = \left(R - \frac{R}{1-t^2}\right)^2 + \frac{R^2t^2}{(1-t^2)^2};$$

par suite,

$$x^2 + y^2 - \frac{2Rx}{1-t^2} - \frac{2Rty}{1-t^2} - R^2 + \frac{2R^2}{1-t^2} = 0,$$

ou

$$(1-t^2)(x^2 + y^2 - R^2) - 2Rty + 2R(R - x) = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de ce cercle en exprimant que l'équation du second degré en t a une racine double, ce qui donne

$$(x^2 + y^2 - R^2)(x^2 + y^2 + R^2 - 2Rx) + R^2y^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(-2Rx) + R^2(y^2 + 2Rx - R^2) = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2 - Rx)^2 + R^2[y^2 - (x - R)^2] = 0.$$

Cette courbe est une quartique bicirculaire, symétrique par rapport à Ox, et qui admet le point A pour point double.

En portant les axes en ce point, c'est-à-dire en changeant x en $x + R$, l'équation se simplifie et devient

$$(x^2 + y^2 + Rx)^2 + R^2(y^2 - x^2) = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 + 2Rx(x^2 + y^2) + R^2y^2 = 0.$$

En coordonnées polaires,

$$\rho^2 + 2R\rho\cos\omega + R^2\sin^2\omega = 0.$$

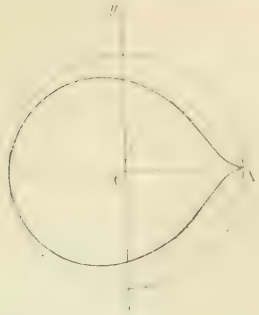
Ceci donne

$$\rho = -R\cos\omega \pm R\sqrt{\cos 2\omega},$$

qui montre que le cercle

$$\rho = -R\cos\omega$$

est le lieu des milieux des cordes qui passent à l'origine, actuellement le point A. On porte sur chaque corde, à partir du point de rencontre avec le cercle, le ρ de la lemniscate $\rho = R\sqrt{\cos 2\omega}$ et on a de suite la forme du lieu.



Il est facile d'apercevoir géométriquement la nature de cette courbe : comme le cercle variable passe constamment au point A, le point où il touche son enveloppe est le symétrique du point A par rapport à la ligne des centres de deux cercles infiniment voisins ; celle-ci est la tangente à l'hyperbole équilatère lieu des centres des cercles ; donc l'enveloppe est l'homothétique de la podaire de l'hyperbole par rapport au point A, ce point étant le centre d'homothétie et le rapport, égal à 2.

2. Considérons une bissectrice de l'angle P, PN, et menons par le point O une perpendiculaire à PO ; elle coupe la droite PN au point N, et ce point est équidistant du point O et de la droite AP ; il décrit donc une parabole qui a pour foyer le point O et pour directrice la droite AP. La droite PN touche cette parabole au point N ; elle enveloppe donc cette parabole.

L'autre bissectrice, étant perpendiculaire à PN au point P, enveloppe la même parabole.

Par le calcul, on peut aisément retrouver la même propriété. Les coordonnées du point P sont $x = R$, $y = R \operatorname{tg} \omega = \frac{2Rt}{1-t^2}$; l'angle de NP avec Ox est égal à $\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ ou à $\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}$; l'équation de NP est donc

$$y - \frac{2Rt}{1-t^2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)(x - R),$$

ou

$$y - \frac{2Rt}{1-t^2} = \frac{1+t}{1-t}(x - R),$$

ou enfin

$$(1-t^2)y - 2Rt = (1+t)^2(x - R).$$

Il n'y a plus qu'à exprimer que cette équation a une racine double en t pour avoir l'enveloppe de la droite. Or cette équation s'écrit

$$t^2(y + x - R) + 2tx + x - R - y = 0,$$

et l'enveloppe a pour équation

$$AC - B^2 = 0$$

ou

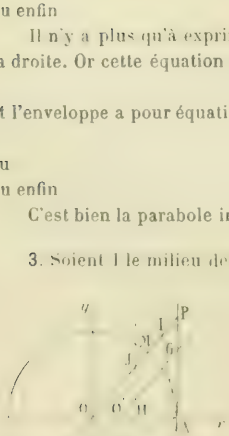
$$(x - R)^2 - y^2 = x^2,$$

ou enfin

$$y^2 + 2Rx - R^2 = 0.$$

C'est bien la parabole indiquée.

3. Soient I le milieu de PM et J le milieu de PO, nous avons $IJ = \frac{MO}{2}$, $IJ = \frac{R}{2}$. D'autre part, le lieu du point J est la parallèle à AP menée par le milieu de OA ; donc le lieu du point I est une conchoïde de Nicomède ayant le point O pour pôle, la droite H'J pour directrice et la longueur $\frac{R}{2}$ comme constante additive. Le point G est aux $\frac{2}{3}$ de AI à partir du point A ; il décrit donc une conchoïde homothétique de la précédente par rapport au point A et dans le rapport $\frac{2}{3}$. Le pôle de cette conchoïde est donc le point O'



tel que OO′ soit le $\frac{1}{3}$ de OA et la directrice est parallèle à AP aux $\frac{2}{3}$ de OA, à partir de O ; la constante additive est $\frac{R}{3}$.

Analytiquement, les coordonnées du point G sont

$$x = \frac{2R + R\cos\omega}{3},$$

$$y = \frac{R\sin\omega + R\,\mathrm{tg}\,\omega}{3}.$$

La première donne

$$\cos\omega = \frac{3x - 2R}{R},$$

la deuxième,

$$\sin\omega = \frac{3y\cos\omega}{R(1+\cos\omega)} = \frac{3y(3x-2R)}{R(3x-R)}.$$

Le lieu a donc pour équation

$$(3x-2R)^2\left[\frac{1}{R^2} + \frac{9y^2}{R^2(3x-R)^2}\right] = 1,$$

ou

$$(3x-2R)^2[9y^2 + (3x-R)^2] = R^2(3x-R)^2.$$

Cette équation représente visiblement une conchoïde qui a pour point double le point $x = \frac{R}{3}$, $y = 0$ et pour asymptote double la droite $x = \frac{2R}{3}$.

4. Cherchons enfin le lieu du point de concours des hauteurs.

Ce point est le point de rencontre de la droite $y = R\sin\omega$ avec la hauteur abaissée du point P sur AM ; cette dernière droite a pour équation

$$y - R\,\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}(x-R),$$

ou

$$y - \frac{2Rt}{1-t^2} = t(x-R).$$

La première est

$$y = \frac{2Rt}{1+t^2}.$$

Il est donc facile de calculer $x - R$ et y. Portons d'abord les axes au point A, ce qui change x en $x + R$ ou $x - R$ en x ; nous aurons

$$tx = \frac{2Rt}{1+t^2} - \frac{2Rt}{1-t^2},$$

$$x = \frac{-4Rt^2}{1-t^4};$$

les équations paramétriques de la courbe sont donc

$$x = \frac{-4Rt^2}{1-t^4}, \qquad y = \frac{2Rt}{1+t^2}.$$

En revenant à l'angle ω, que l'on eût pu d'ailleurs conserver, on obtient

$$y = R\sin\omega, \qquad x = \frac{-R\sin^2\omega}{\cos\omega};$$

par suite $x = \frac{-y^2}{R\cos\omega}$, et $\sin\omega = \frac{y}{R}$, $\cos\omega = \frac{-y^2}{Rx}$.

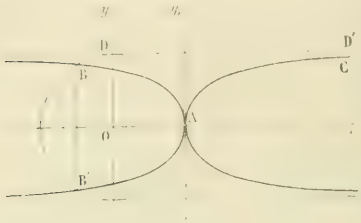
L'équation du lieu est donc

$$\frac{y^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2x^2} = 1,$$

ou

$$y^2(x^2 + y^2) - R^2x^2 = 0.$$

Elle représente une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux deux axes, ayant pour point de rebroussement le point O, et comprise entre les deux asymptotes $x = \pm R$.



Elle se construit immédiatement et a la forme indiquée dans la figure ci-contre.

Elle coupe le cercle donné, $x^2 + y^2 + 2Rx = 0$, sur la parabole $2y^2 + Rx = 0$, c'est-à-dire aux points d'abscisses $x = 0$, $x = -\frac{3R}{2}$.

Son équation polaire est

$$\rho = \frac{R}{\operatorname{tg}\omega}.$$

L'angle polaire du point B, où elle coupe le cercle, est donné par

$$\frac{R\cos^2\omega}{\sin\omega} = -\frac{3R}{2}, \qquad \sin\omega = -\frac{1}{2}, \qquad \omega = -\frac{\pi}{6}.$$

L'arc AC s'obtient en faisant varier ω de 0 à $\frac{\pi}{2}$; l'arc AB, en faisant varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{6}$.

Passons aux aires. L'aire comprise entre l'arc AC et son asymptote est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho_1^2 - \rho^2)d\omega,$$

ρ_1 étant le ρ de l'asymptote.

L'aire totale demandée est quatre fois ceci ou

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho_1^2 - \rho^2)d\omega;$$

or

$$\rho_1 = \frac{R}{\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{R}{\operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho_1^2 - \rho^2 = R^2\frac{1 - \cos^2\omega}{\sin^2\omega} = R^2.$$

L'aire demandée est donc égale à $2R^2\frac{\pi}{2}$ ou à πR^2. C'est l'aire du cercle. Celle comprise entre le cercle et l'arc AB est de même

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\rho_1^2 - \rho^2)d\omega,$$

ρ_1 étant ici le ρ du cercle ; or

$$\rho_1 = -2R\cos\omega, \qquad \rho_1^2 - \rho^2 = 4R^2\cos^2\omega - \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2\omega},$$

$$\rho_1^2 - \rho^2 = 2R^2(1 + \cos 2\omega) + R^2 - \frac{R^2}{\sin^2\omega}.$$

L'intégration est immédiate et donne $2R^2\omega + R^2\sin 2\omega + R^2\cot\omega$, fonction dont il faut prendre les variations entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{6}$.

Pour $-\frac{\pi}{6}$, elle devient

$$\frac{-\pi R^2}{2} - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - R^2\sqrt{3};$$

pour $-\frac{\pi}{2}$, elle est égale à $-\frac{3\pi R^2}{2}$.

L'aire cherchée est donc

$$\frac{R^2}{2}\left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) = \frac{R^2}{2}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

L'aire totale est double de celle-ci, $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, et enfin celle qui est comprise entre le cercle et la branche de gauche, à l'intérieur de celle-ci, est

$$\pi R^2 - R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

M. ROUX, Le Creusot.

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien ; L. Naucelle, à La Châtre ; G. Ninin, lycée de Nancy ; L. Thiringer ; Maresscalchi ; Roy Gaston, à Varzy ; L. Simon, à Fourmies.

Assez bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; M. Gendrin.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2201. — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — *Données : Centre de la feuille au point s ; ligne de terre xsy ; ss' = 150 millimètres ; sa = sa' = 75^{mm} ; so = 105^{mm} ; so' = 30^{mm}. Le cylindre est de révolution autour d'une parallèle à xy menée par le point (a, a'). Le rayon de la sphère inscrite dans le cylindre est de 45^{mm}. Le cône a pour sommet le point (s, s') et pour base un cercle situé dans le plan passant par la ligne de terre et le point (o, o'). Le centre de ce cercle est en (o, o') ; son rayon est de 90^{mm}.*

1° Construire un point quelconque de l'intersection, avec sa tangente. On représentera la construction en traits noirs discontinus ou en traits rouges.

2° Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées, les projections horizontale et verticale du solide commun au cône et au cylindre.

3° Rédiger, sur feuille séparée, une notice expliquant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, la construction des points et tangentes.

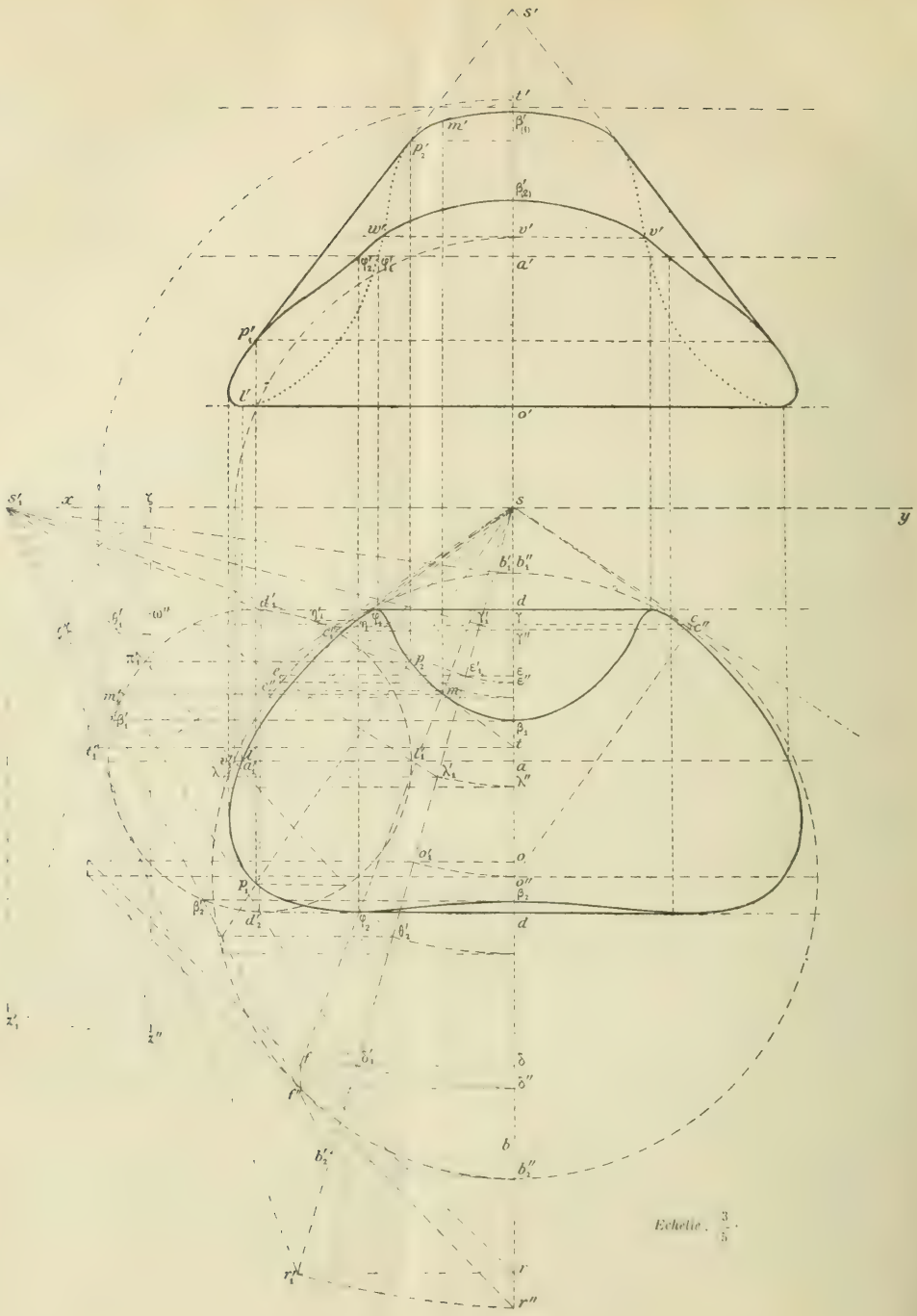
Titre et cadre inutiles.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, 1913.*)

Nous prendrons immédiatement pour plan vertical auxiliaire de projection le plan de profil passant par le sommet du cône. Son sommet a pour projection verticale s'_1 et le centre de sa base se projette en o'_1. On en déduit la trace so'_1 du plan de base, et en prenant $o'_1b'_1 = o'_1b'_2 = 90^{mm}$ on obtient en $s'_1b'_1$ et $s'_1b'_2$ les deux génératrices de contour apparent du cône sur ce plan de profil. Pour obtenir son contour apparent horizontal, il suffit de rabattre le plan de base autour de son horizontale xy, de décrire le cercle de centre o'' et de rayon $o''b''$, puis de lui mener les tangentes par le pied de la verticale du point S, soit sc'', et de relever la corde des contacts $c''\gamma''$ en $c\gamma$. On a ainsi les génératrices de contour apparent horizontal sc.

Le cylindre se projette sur le plan de profil suivant sa section droite, dont le rayon $a'_1d'_1$ est égal à 45^{mm}, et l'on en déduit immédiatement les génératrices de contour apparent horizontal qui sont les tangentes menées à ce cercle parallèlement à xy.

Intersection des deux surfaces. — Nous remarquons d'abord que l'intersection sera symétrique par rapport au plan de profil ss', qui est un plan de symétrie pour les deux surfaces. Toute la courbe se projettera sur ce plan de profil le long du cercle de section droite, en sorte que sa détermination revient à considérer les projections verticales des différentes génératrices du cône, et chercher les projections horizontales des points où ces projections traversent la section droite du cylindre. Cela revient à couper les deux surfaces par des plans auxiliaires passant par le sommet du cône et parallèles aux génératrices du cylindre.


s'
t'
m'
β'
p'
β'
w'
v'
v'
a'
p'
l'
o'
s'
x
ζ
s
y
b'
b''
d'
d
ω''
c''
m
β
t
a
λ''
o'
o
o''
β
d
d'
δ
δ''
b'
b''
r
r''
Echelle . 3/5

Points remarquables. — Nous chercherons d'abord les points remarquables de l'intersection, en commençant par ceux que donnent les plans auxiliaires limites : l'un, de trace verticale $s'_1b'_2$, est relatif au cône, qu'il touche le long de la génératrice de profil sb ; il donne sur le cylindre deux génératrices $\varphi_1\beta'$ et $\varphi_2\beta'_2$ qui touchent la courbe aux points β_1 et β_2. L'autre, $s'_1\varepsilon'_1$, est relatif au cylindre, qu'il touche le long de la génératrice $\eta'_1\eta_1$, tandis qu'il coupe le cône suivant deux génératrices, qu'on obtient en rabattant en $\varepsilon''e''$ la trace du plan sécant auxiliaire sur le plan de base du cône, et en relevant l'intersection e'' de cette droite avec le cercle rabattu, ce qui donne se. Chacune de ces génératrices se est tangente à la projection horizontale de la courbe d'intersection en η_1. On voit immédiatement qu'il n'y a aucun point sur le contour apparent horizontal du cône, le plan auxiliaire de trace verticale $s'_1\gamma'_1$ ne coupant pas la section droite du cylindre. Toute la courbe se trouvera donc sur la portion de surface conique vue en projection horizontale.

Les points sur le contour apparent horizontal du cylindre s'obtiennent en menant les plans auxiliaires par les génératrices d'_1 et d'_2. Il suffit de répéter la construction indiquée pour avoir les génératrices correspondantes sur le cône, dont l'une sf donne le point φ_2 où la courbe touche la génératrice dd'_2.

Pour obtenir les points sur les génératrices de contour apparent vertical du cylindre, on applique la même construction à chacune de ces génératrices. Par exemple, le plan auxiliaire de trace $s'_1l'\lambda'_1$ donne sur le cône deux génératrices, dont l'une $s\lambda$ fait connaître le point (l, l') où la courbe touche la génératrice la plus basse du cylindre. On voit qu'il n'existe aucun point sur la génératrice la plus haute.

Les points sur le contour apparent vertical du cône sont obtenus en menant les plans auxiliaires par ces génératrices. Ici nous ne pouvons avoir ces génératrices en nous servant du point où la droite de bout menée par (s, s') sera le plan de base, car ce point est en dehors de l'épure, mais nous pouvons donner au cône une base beaucoup plus rapprochée du sommet et parallèle à la première, par exemple la section par le plan dont la trace verticale auxiliaire $\zeta z'_1$ rencontre la ligne de bout du sommet en z'_1. En rabattant ce point en même temps que le cercle de section autour de l'horizontale du point ζ, il suffit de mener les tangentes telles que $z''\theta''$ à ce cercle et de relever les points de contact pour en déduire la projection verticale auxiliaire $s'_1\theta'_1$ des génératrices cherchées, et par suite la projection verticale θ'_2 de leurs pieds sur le plan de base du cône. Le plan auxiliaire de trace $s'_1\theta'_2$ nous donne alors les points cherchés p_1 et p_2, qu'on peut immédiatement projeter en p'_1 et p'_2 sur le plan vertical primitif.

Enfin nous donnerons la construction d'un point courant et de sa tangente au moyen du plan auxiliaire de trace $s'_1m'_1$, qui donne sur le cône la génératrice sf et sur le cylindre la génératrice m'_1m coupant la précédente au point m. La tangente en m est l'intersection du plan tangent au cylindre et du plan tangent au cône en ce point. Nous chercherons les traces de ces deux plans sur le plan de profil ss' : pour le cylindre c'est la tangente $m'_1t'_1$ à la section droite ; pour le cône c'est la droite qui joint les traces, sur ce plan de profil, de la génératrice de contact et de la tangente à la base en son pied, soit $s'_1r'_1$. L'intersection t'_1 de ces deux traces se projette en t et détermine la tangente tm demandée. On en déduit aisément la projection verticale $t'm'$, puisqu'on a la cote du point T.

La projection verticale de la courbe sur le plan primitif se déduit immédiatement de toutes ces constructions par simple changement de plan vertical. Il y a lieu seulement de déterminer la ligne des points doubles en construisant la projection verticale de l'intersection des deux plans diamétraux conjugués des cordes de bout dans les deux surfaces. Pour le cylindre c'est le plan de front de l'axe, qui a pour trace verticale auxiliaire aa'_1 ; pour le cône c'est le plan des génératrices de contour apparent vertical, dont la trace verticale auxiliaire est $s'_1\pi'_1\theta'_2$, en sorte que leur intersection est une parallèle à xy dont la cote est celle du point v'_1 d'intersection de ces deux traces, ce qui donne la ligne cherchée $v'w'$.

Le solide commun est représenté par ses deux projections ; la distinction des parties cachées résulte de l'examen de la projection verticale auxiliaire associée à la projection horizontale.

CHIMIE

2139. — *A une dissolution d'hyposulfite de soude, on ajoute une dissolution d'iode dans l'iodure de potassium jusqu'à persistance de la couleur de l'iode. On fait ensuite passer du chlore à refus et on chasse l'excès de ce gaz par une ébullition de quelques instants, puis on fait de même avec du gaz sulfureux. L'azotate d'argent produit dans la liqueur finale un précipité qui pèse* $6^g,393$ *et l'azotate de baryum un précipité qui pèse* $3^g,728$. *Exprimer, en millimolécules, la composition de la dissolution d'iode dans l'iodure de potassium.*

$O = 16$, $Az = 14$, $S = 32$, $Cl = 35,5$, $I = 127$, $K = 39$, $Ba = 137$, $Ag = 108$.

Soit $xI^2 + yKI$ la composition cherchée.

L'action de l'iode sur l'hyposulfite se formule

$$xI^2 + 2S^2O^3Na^2 = S^4O^6Na^2 + 2NaI).$$

Celle du chlore sur les produits de la réaction précédente est une action oxydante :

$$(S^4O^6Na^2 + 7Cl^2 + 10H^2O = 2SO^4NaH + 2SO^4H^2 + 14HCl),$$

$$x(2NaI + 6Cl^2 + 6H^2O = 2IO^3Na + 12HCl).$$

Il faut y joindre l'action analogue du chlore sur l'iodure de potassium primitif :

$$y(KI + 3Cl^2 + 3H^2O = IO^3K + 6HCl).$$

Enfin l'acide sulfureux réduit les iodates ou, ce qui revient au même, l'acide iodique :

$$2x + y(IO^3H + 3SO^2 + 3H^2O = HI + 3SO^4H^2).$$

Il reste donc finalement dans la liqueur, à l'état libre ou combiné,

$$(4x + 6x + 3y)SO^4H^2, \qquad (14x + 12x + 6y)HCl, \qquad (2x + y)HI.$$

L'azotate d'argent précipite les acides chlorhydrique et iodhydrique. On a donc

$$(26x + 6y)AgCl + (2x + y)AgI = 6393.$$

L'azotate de baryum précipite l'acide sulfurique et l'on a

$$(10x + 3y)SO^4Ba = 3728.$$

Remplaçons les poids moléculaires par leurs valeurs. Les équations deviennent

$$143{,}5(26x + 6y) + 235(2x + y) = 6393,$$

$$233(10x + 3y) = 3728.$$

On trouve $x = 1$ et $y = 2$.

CONCOURS DE 1914 (*Suite*)

ÉCOLE CENTRALE

Concours du 27 mai, dont les épreuves ont été annulées.

Géométrie analytique.

1° Construire la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = a\frac{1 + 2\cos\omega}{1 + \sqrt{2}.\sin\omega}.$$

Construction des asymptotes. a est une longueur positive que l'on pourra se donner à volonté.

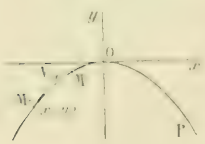
2° La courbe précédente est considérée comme la trajectoire d'un point M, de coordonnées polaires ρ et ω, et animé d'un mouvement tel que $\omega = t$, ω étant l'angle polaire en radians et t le temps en secondes.

Pour $t = \frac{5\pi}{4}$ (π, rapport d'une circonférence de cercle à son diamètre), construire la position M′ du point M ; former les expressions des composantes, suivant la droite OM′ (O pôle) et suivant une droite perpendiculaire à OM′, du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M′. Les construire géométriquement en grandeur et les représenter en position en leur donnant pour origine commune le point M′.

Ces deux questions peuvent être traitées séparément dans un ordre quelconque ; faire une figure pour chacune d'elles.

Mécanique.

Dans un plan vertical on considère deux axes de coordonnées rectangulaires, fixes, Ox et Oy, dont l'un, Oy, vertical, est dirigé positivement dans le sens contraire à celui de la pesanteur, et une parabole P dont l'équation, par rapport à ces axes, est $x^2 + 2py = 0$, où p est une longueur positive donnée.



Cette parabole est, en position, la figure d'un fil métallique fixe, supposé non déformable, d'épaisseur négligeable et de longueur illimitée.

Un petit anneau M pesant, de masse m, que l'on traitera comme un point matériel, est assujetti à rester sur ce fil, le long duquel il peut glisser sans frottement.

Cet anneau est lancé d'un point $M_0(x_0, y_0)$ donné sur P, avec une vitesse V_0, dans un sens quelconque de la courbe P. L'intensité g du champ de la pesanteur est donnée.

On demande de trouver, en fonction des données, la valeur qu'il faut attribuer à V_0, pour que, au départ en M_0, la réaction du fil sur l'anneau soit nulle.

Prouver que, si l'on attribue à V_0 la valeur ainsi trouvée, la réaction du fil sur l'anneau sera nulle pour toute position de l'anneau dans le mouvement qu'il prendra. (On ne demande pas les équations de ce mouvement).

(27 mai, de 7 h. à 11 h.)

Trigonométrie.

On considère un triangle isocèle dans lequel on désigne par l la longueur commune des deux côtés égaux et par x la moitié de l'angle compris entre ces deux côtés.

1° Exprimer en fonction de l et de x le rayon du cercle inscrit au triangle et étudier la variation de ce rayon quand x varie, l restant constant.

2° Connaissant l, déterminer x de façon que la somme des carrés des distances des trois sommets du triangle au centre du cercle inscrit soit égale à une quantité donnée k^2.

Discuter.

(29 mai, de 3 h. à 5 h.)

Calcul.

Calculer, au moyen de la règle à calcul, les angles A, B, C, les côtés a, b, c et les hauteurs h, k, l d'un triangle, sachant que

$$\operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{313}{241}}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{683}{241}}, \qquad a = \sqrt{\frac{863}{89}},$$

et connaissant les formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$ah = bk = cl = bc \sin A.$$

On calculera ensuite les six quantités $a \cos B$, $a \cos C$, $b \cos C$, $b \cos A$, $c \cos A$, $c \cos B$, et le rapport $\frac{a \cos B}{b \cos A}$, et on vérifiera que ce rapport est égal à $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$.

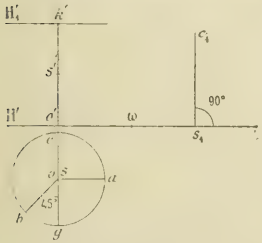
Avis : La composition de calcul est faite avec une règle à calcul de 26^{cm} environ. Défense d'apporter des tables de logarithmes.

30 mai, de 3 h. à 4 h.)

Épure.

Pas de cadre, pas de titres, aucune flèche.

ω, centre de la feuille ; $H'o'\omega s_1$, grand axe. $\omega o' = 110^{mm}$, $oo' = 80^{mm}$, $o's' = s'k' = 75^{mm}$, $\omega s_1 = 95^{mm}$.



oa est parallèle à $H'o'$; ob fait un angle de 45° avec og.

Un cône a pour sommet le point (s, s') et pour base, dans le plan horizontal $H'o'$, le cercle de centre (o, o') et de rayon $oc = 70^{mm}$; limité aux plans horizontaux $H'o'$ et $H'k'$, il est solide et opaque.

Un premier cylindre droit a pour base dans le plan horizontal $H'o'$ un cercle décrit sur oa comme diamètre. Un deuxième cylindre droit a pour base dans le plan horizontal $H'o'$ un cercle décrit sur ob comme diamètre.

On demande les projections de l'intersection du cône et des deux cylindres.

1° On représentera ce qui reste du cône quand on enlève les deux cylindres.

2° On fera le développement, sur le plan horizontal $H'o'$, de la portion de la nappe inférieure du cône faisant partie du solide représenté. Le cône sera ouvert suivant la génératrice SG. La génératrice SC viendra sur s_1c_1.

3° On dessinera la courbe Z, lieu des traces, sur le plan horizontal $H'o'$, des tangentes à l'intersection du cône et du deuxième cylindre.

Nota. — On fera, à l'encre rouge, les constructions nécessaires pour obtenir un point de chaque courbe (projections et développement) et la tangente en ce point, les points et les tangentes remarquables. Les résultats seuls seront tracés à l'encre noire, les lignes vues en traits pleins, les lignes cachées en points ronds.

Le reste en traits rouges pleins *plutôt fins*. Les tangentes trouvées (en rouge) seront légèrement accentuées aux environs des points de contact.

Par exception, la courbe Z sera dessinée à l'encre rouge (trait plein, plutôt fin) et sans tangente quelconque. Il est bon de ne s'occuper de la courbe Z, qu'après avoir terminé à l'encre les deux premières parties.

(*28 mai, de 7 h. à 11 h.*)

Physique.

I. — Influence d'un corps dissous sur le point de fusion; loi de Raoult.

II. — Un électroscope est formé de deux balles de sureau identiques reliées par un fil conducteur assez fin pour être de capacité négligeable; on admet que la capacité de l'appareil, indépendante de l'inclinaison des pendules, est une constante C.

L'électroscope possède une charge initiale Q_0 qui le porte au potentiel V_0 et sous l'effet de laquelle les pendules s'écartent d'un angle α_0, de part et d'autre de la verticale passant par leur point de suspension. Quelle est la perte de charge q lorsque cet écart est réduit à la valeur α_1?

Calculer q en coulombs pour

$$V_0 = 3\,000 \text{ volts}, \qquad C = 0{,}3 \text{ u. e. s. C. G. S.}, \qquad \alpha_0 = 45^\circ, \qquad \alpha_1 = 30^\circ.$$

Chimie.

I. — Silicium.

II. — On supposera qu'un chimiste vient de découvrir un procédé permettant de transformer l'oxygène O^2 en un mélange d'oxygène et d'un gaz nouveau de formule moléculaire O^x, x étant un nombre entier.

On a procédé à l'étude expérimentale de ce mélange :

1re *Expérience :* La vitesse de diffusion du gaz O^x est trouvée égale à celle du chlore, multipliée par le nombre 1,053. Sachant que la vitesse de diffusion est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la densité du gaz qui se diffuse, déterminer la valeur de x.

2e *Expérience : La densité du mélange,* prise par rapport à l'oxygène, est égale à 1,02. En conclure la proportion en volumes du gaz O^x dans le mélange.

3e *Expérience :* Pour procéder à la *destruction du gaz* O^x, on chauffe 100^{cm3} du mélange, ce qui a pour effet de transformer le gaz O^x en oxygène. Quel est, après refroidissement, le volume du mélange ainsi transformé ?

4e *Expérience :* Pour déterminer le pouvoir *oxydant du gaz* O^x, on fait passer $22^l,4$ du même mélange dans un excès d'iodure de potassium dissous. L'iodure détruit complètement le gaz O^x en se transformant en potasse et iode. Un titrage permet de reconnaître que l'on a ainsi libéré $10^g,16$ d'iode. En conclure le pouvoir oxydant de la molécule O^x et le volume d'oxygène que l'on a recueilli, après passage dans la solution.

N. B. — Chaque candidat reçoit un tableau donnant les poids atomiques des corps simples et le volume de la molécule-gramme des gaz parfaits.

(*27 mai, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

Concours définitif du 16 juin.

Géométrie analytique.

2274. — Etant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, construire le lieu du point M dont les coordonnées, par rapport à ces axes, sont données par les formules

$$x = \frac{t^2 + 3t - 2}{2(t^2 - 3t + 2)}, \qquad y = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t - 2},$$

où t est une variable arbitraire. Construction des points et tangentes remarquables et des asymptotes. Faire la figure en prenant à volonté l'unité de longueur, indiquer par des flèches le sens dans lequel la courbe est parcourue par le point M lorsque t croît.

Mécanique.

2275. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et on considère la courbe (G) lieu d'un point M dont les coordonnées, par rapport à ces axes, sont données par les formules

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = \frac{a\theta}{2}.$$

θ étant, en radians, un angle arbitrairement variable et a une longueur positive donnée à volonté. On prendra seulement l'arc AB de (G) obtenu en faisant croître θ de 0 à π.

Le point M est considéré comme un point matériel, supposé non pesant, assujetti à rester sur (G) et qui est soumis à l'action d'une force dont les composantes suivant Ox, Oy, Oz sont données, en fonction des coordonnées de M, par les formules $X = y$, $Y = x$, $Z = -a$ (a est la même longueur que plus haut).

1° Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de M sur (G), trouver sur l'arc AB de (G) les positions d'équilibre de M et, pour chacune d'elles, reconnaître si l'équilibre est stable ou instable.

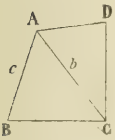
2° Dans l'hypothèse où il y a un frottement de M sur (G), le coefficient de frottement étant donné égal à $\frac{1}{3}$, trouver les portions de l'arc AB sur lesquelles le point M est en équilibre.

Nota. — Ces deux dernières questions peuvent être traitées séparément dans un ordre quelconque. Faire une figure pour chacune d'elles.

(*16 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Trigonométrie.

2276. — Soit ABC un triangle dans lequel on désigne les côtés AB et AC par c et b et l'angle BAC par A ; on mène par C, dans le plan du triangle et du même côté que A par rapport à BC, une droite CD perpendiculaire à BC et de longueur égale à BC, puis on tire la droite AD.



1° Evaluer AD en fonction des côtés b et c et de l'angle A, et étudier la variation de cette longueur AD quand l'angle A varie de 0 à π, les longueurs des côtés b et c restant constantes.

2° Connaissant les longueurs des côtés b et c, déterminer l'angle A de façon que la longueur AD soit égale à une longueur donnée m. Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.

3° En supposant $b = c$, déterminer l'angle A de façon que le rapport $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2}{\overline{CD}^2}$ soit égal à un nombre donné k. Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.

(*18 juin, de 3 h. à 5 h.*)

Calcul.

2277. — Calculer au moyen de la règle à calcul :

1° Les onze premiers termes

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{11}$$

de la série qui a pour terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{26300}}{(20n + 295)\sqrt{20n + 32}} ;$$

2° Les plus petits angles positifs ayant respectivement pour tangentes les onze premiers termes

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_{11}$$

de la série qui a pour terme général

$$t_n = \sqrt{\frac{20n + 22}{263}}.$$

(*19 juin, de 3 h. à 4 h.*)

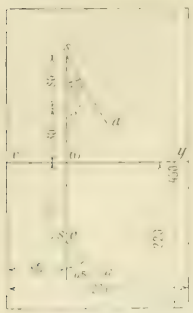
Épure.

2278. — *Sphère entaillée par un cône.* — Cadre $\frac{450^{mm}}{270}$. Placer la ligne de terre xy, parallèlement aux petits côtés du cadre et à 220^{mm} du côté inférieur.

On considère :

1° Une sphère de 80^{mm} de rayon reposant sur le plan horizontal ; son centre (o, o') est dans le premier dièdre à 120^{mm} en avant du plan vertical ; la ligne de rappel oo' est à 90^{mm} du grand côté gauche du cadre ;

2° Un cône de révolution ayant son sommet (s, s') au point le plus élevé de la sphère, et pour axe la droite $(sa, s'a')$ telle que sa fait un angle de 45° avec la ligne de rappel oo' et $s'a'$ un angle de 30° avec la même droite.



Ce cône est tangent au plan horizontal qui passe par le point (s, s').

Après avoir déterminé la ligne commune aux deux surfaces, sphérique et conique, on représentera les projections de la partie de la sphère extérieure au cône.

Dans la mise à l'encre on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points et droites remarquables.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. Titre intérieur : Sphère entaillée par un cône.

Nota. — Couper la feuille, extérieurement au cadre, de manière à laisser une marge de 25 à 30^{mm}.

(*17 juin, de 7 h. à 11 h.*)

Physique.

I. — Définitions du travail et de la puissance ; leurs dimensions dans les systèmes C. G. S. et mètre-kilogramme-force-seconde ; définir les unités employées à la mesure de ces grandeurs dans le système C. G. S., le kilogrammètre et le cheval-vapeur, le joule et le watt, et donner les données numériques qui lient ces diverses unités.

II. — **2279**. Un rayon monochromatique pénètre dans une sphère homogène transparente et, après avoir subi p réflexions, il émerge dans la direction R.

1° Calculer la déviation Δ du rayon R.

2° Montrer que cette déviation passe par un minimum ou un maximum.

3° Calculer le cosinus de l'angle d'incidence correspondant.

4° Calculer Δ correspondant pour $p = 1$ et $n = \frac{4}{3}$.

5° Montrer que Δ passe par un minimum si n est plus grand que l'unité.

Chimie.

I. — Préparations et modes de production de l'oxyde de carbone dans les laboratoires et dans l'industrie.

II. — **2280**. *a*) Un volume gazeux V de l'un des oxydes de l'azote, que nous désignerons par A, est traité par une spirale de fer rendue incandescente par un courant électrique. Le fer absorbe l'oxygène et subit une augmentation de masse de 1^g,6. L'azote restant occupe le volume V'.

b) On prend de nouveau un volume V du composé A, et on le fait arriver dans du peroxyde d'azote liquide, refroidi, incolore dans ces conditions. Le peroxyde d'azote absorbe A en formant un autre oxyde de l'azote, et le liquide devient bleu. L'augmentation de masse du liquide est de 3 grammes.

c) Dans ce liquide, maintenu encore à basse température, on fait arriver un volume V'' d'oxygène jusqu'à cessation d'absorption. La nouvelle augmentation de masse est de 1^g,6, et le liquide est redevenu incolore comme au début.

On demande :

1° Quel est le composé qui a été désigné par A ;

2° Quels sont, à 0° et 76^{cm}, les valeurs de V, V', V'' ;

3° Quel est le composé formé dans l'opération *b*, quelles sont ses propriétés ;

4° Quel est le composé formé dans l'opération *c*. Que savez-vous sur sa densité de vapeur à différentes températures et à différentes pressions ?

N. B. — Chaque candidat reçoit un tableau donnant les poids atomiques des corps simples et le volume de la molécule-gramme des gaz parfaits.

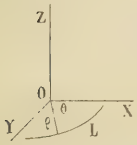
(*16 juin, de 2 h. 1/2 à 5 h. 1/2.*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Mathématiques.

2281. — On donne un cylindre dont les génératrices sont parallèles à OZ et ayant pour section droite, dans le plan XOY, une spirale logarithmique L, c'est-à-dire une courbe dont l'équation en coordonnées polaires est de la forme $\rho = ae^{\theta}$,

a étant une constante, ρ et θ les coordonnées polaires d'un point de la courbe (voir la figure 1).

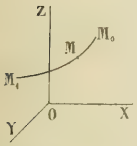


1° Trouver la courbe C, intersection de ce cylindre et d'un cône de révolution d'angle au sommet 2α ayant son sommet en O et son axe parallèle aux génératrices du cylindre. Construire la projection de cette courbe O sur le plan ZOX.

2° Démontrer que le développement de la courbe C sur un plan tangent au cône est une spirale logarithmique.

3° Démontrer que la section par le plan horizontal XOY de la surface engendrée par les tangentes à la courbe C est une spirale logarithmique. Déterminer la section de la même surface par le plan ZOX.

4° A chaque point M de la courbe C on fait correspondre un point M′ qui est la trace sur le plan XOY de la tangente en M à la courbe C ; en supposant que le mobile M parte d'un point M_0 correspondant à $\theta = 0$ pour parcourir la courbe C avec une vitesse uniforme v, déterminer la vitesse v' du point M′ à un instant t, ainsi que le rapport des chemins s et s' parcourus respectivement au même instant t par les mobiles M et M′.



5° On considère l'arc M_0M_1 de la courbe C décrit par le point M (voir la figure 2) quand θ varie de 0 à π ; quand le point M se déplace sur cette courbe de M_0 à M_1, une circonférence ayant pour centre M et tangente à OZ décrit une surface A ; on demande de calculer le volume V compris entre cette surface et le plan ZOX.

Remarques. — 1° Le problème sera traité analytiquement, mais il sera tenu compte des démonstrations géométriques fournies par les candidats.

2° Pour obtenir la différentielle dV du volume V qu'on demande de calculer dans la dernière partie du problème, on décomposera ce volume V en cylindres tronqués par des plans infiniment rapprochés passant par l'axe des Z et faisant entre eux un angle $d\theta$.

3° Il est en outre rappelé que la fonction primitive de e^x est e^x.

Calcul trigonométrique.

2282. — Les côtés d'un triangle isocèle, mesurés en mètres, ont pour longueurs a, a et b. L'angle au sommet est α grades, et le périmètre $2p = 20$ mètres.

Une quantité A, fonction de l'angle α, est déterminée par la formule

$$A = 1 - \frac{bL\frac{a}{b} + r\frac{b}{a}}{r + a - b}, \qquad \text{avec} \qquad r = 606{,}5 \quad 0{,}695\, b.$$

Calculer les valeurs de A qui correspondent aux valeurs suivantes de α : 10^G, 15^G, 20^G.

Le symbole L représente des logarithmes néperiens.

On utilisera des tables de logarithmes à cinq décimales.

Nota. — Le module de transformation des logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est $M = 0{,}43429$.

Epure.

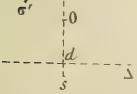
2283. — Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde de révolution. — *Données :* Centre de la feuille au point O.

$$Os = Os' = 80^{mm}; \qquad ds = 15^{mm}.$$

La droite de front (Δ, Δ') fait un angle de 45° avec le plan horizontal.

Le centre de la sphère se trouve au point (s, s') ; son rayon est de 70^{mm}.

Le paraboloïde est de révolution autour de (Δ, Δ') ; sa courbe méridienne est une parabole ayant pour sommet σ' et pour foyer f'.



On donne $\sigma's' = 80^{mm}$, $f's' = 70^{mm}$.

1° Construire un point quelconque, avec sa tangente :

a) des deux contours apparents du paraboloïde ;

b) de l'intersection des deux surfaces.

2° Construire les points et droite remarquables ci-après :

points situés sur les contours apparents des deux surfaces ;

points de la projection horizontale de l'intersection, dont les tangentes sont parallèles à Δ ;

droite des points doubles apparents en projection horizontale.

On représentera les constructions 1° et 2° en traits noirs discontinus ou en traits rouges.

3° Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :

en projection verticale le solide commun aux deux surfaces ;

en projection horizontale la partie de la sphère extérieure au paraboloïde.

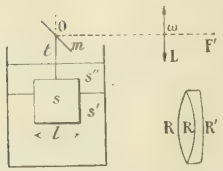
4° Rédiger, sur feuille séparée, une notice explicative, exposant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, les constructions 1° et 2°.

Titre et cadre inutiles.

Physique.

2284. — On considère un cube d'arête l et de masse spécifique s, qui flotte à la surface de séparation de deux liquides non miscibles de masses spécifiques s' et s''. Une des arêtes est verticale.

Pour mesurer la masse spécifique s, supposant connues s' et s'', on imagine le dispositif suivant : le cube porte, par l'intermédiaire d'une tige verticale t un miroir plan m incliné à 45° (la tige et le miroir sont de poids négligeables).



Le miroir renvoie sur une lentille convergente L les rayons issus d'un point lumineux fixe F, placé sur la verticale de t.

Lorsque s prend la valeur initiale s_0, l'axe optique de la lentille L, qui est horizontal, passe par le centre, O, du miroir.

On observe l'image F' de F et l'on demande :

1° Le lieu de cette image lorsque s varie ;

2° La relation qui existe entre s et la distance de F' à sa position initiale ;

3° D'étudier la sensibilité de l'appareil.

Application numérique. — $s_0 = 1$, $s' = 1,1$, $s'' = 0,94$, $l = 9,8$ (système C. G. S.).

La lentille L est constituée par l'accolement de deux lentilles minces :

1° Une lentille biconvexe dont l'indice est 1,5 et dont les faces ont chacune pour rayon de courbure $R = R = 100^{cm}$;

2° Une lentille concavo-convexe dont l'indice est 1,75 et dont la face extérieure a pour rayon $R' = 300^{cm}$.

Lorsque s prend la valeur s_0, la somme des distances $O\omega + OF$ est égale à trois fois la distance focale de L.

Chimie.

I. — Rappel sommaire des principales réactions du chlore.

II. — **2285.** On fait passer un courant prolongé de chlore dans une solution étendue et froide de potasse. On obtient ainsi une liqueur A.

D'autre part on prend 10^{cm^3} d'une solution d'anhydride arsénieux dans l'acide chlorhydrique étendu faite à raison de $1^g,98$ d'anhydride arsénieux par litre ; on y ajoute une goutte d'indigo.

On fait alors tomber goutte à goutte la liqueur A dans la solution arsénieuse jusqu'à décoloration.

A ce moment on a versé 4^{cm^3} de liqueur.

On demande le titre de la solution de potasse.

Données numériques : As = 75, K = 39.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons de mathématiques spéciales, par M. E. Blutel, ancien professeur aux lycées Condorcet et Saint-Louis, inspecteur général de l'Instruction Publique. — Deux volumes in-8°, brochés, 30 fr. (Hachette et Cie, Paris.)

La tâche des professeurs de mathématiques qui préparent les candidats aux grandes Ecoles scientifiques (Ecole Polytechnique, Ecole normale supérieure, etc.) est devenue plus lourde dans ces dernières années par suite de la mise en vigueur de programmes plus étendus et plus élevés.

Les maîtres ou les élèves que leur santé oblige à interrompre un instant leur effort se voient rapidement débordés. L'ouvrage que publie la maison Hachette a pour but de remédier à cette situation et de faciliter le travail de tous. L'auteur, après une longue expérience de cet enseignement, a fondu les diverses parties du programme de façon à réduire la durée de l'exposition tout en augmentant la pénétration.

La lecture de ces leçons profitera également à tous ceux qui désirent poursuivre des études mathématiques dans les Universités.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

24e Année. Septembre 1914. N° 12.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE PROFESSIONNELLE SUPÉRIEURE DES POSTES ET DES TÉLÉGRAPHES

(2e section.)

Concours de 1912.

2149. — *Trouver les trajectoires orthogonales* T *des coniques* (C) *représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$y^2 + xy + a^2 - \lambda y = 0,$$

λ designant un paramètre variable. Indiquer la forme de la trajectoire qui passe par le point de coordonnées $x = 0$, $y = h$; *discuter.*

On considère un arc de trajectoire T *situé au-dessus de la droite* $y = a$, *et deux points* A *et* B *sur cet arc d'ordonnées* $2a$ *et* $3a$ *respectivement. Soient* AA′ *et* BB′ *les arcs des deux coniques* (C) *issues des points* A *et* B *et limitées à la droite* $y = a$. *Calculer l'aire du quadrilatère limité par l'arc* AB, *les deux arcs* AA′ *et* BB′ *et le segment rectiligne* A′B′.

Dérivons l'équation des coniques (C),

$$y^2 + xy + a^2 - \lambda y = 0,$$

par rapport à x, nous avons

$$2yy' + xy' + y - \lambda y' = 0;$$

puis éliminons λ entre ces deux équations, nous obtenons

$$\frac{y^2 + xy + a^2}{(2y + x)y' + y} = \frac{y}{y'},$$

ou (1)

$$y'(a^2 - y^2) + y^2 = 0.$$

C'est l'équation différentielle qui définit les coniques (C). Remplaçons-y y' par $-\frac{1}{y'}$, nous obtiendrons l'équation différentielle des trajectoires T. Nous avons ainsi

$$-\frac{1}{y'}(a^2 - y^2) + y^2 = 0$$

ou (2)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{y^2 - a^2} = 1 + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{y - a} - \frac{1}{y + a}\right).$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$x + C = y + \frac{a}{2} L\left|\frac{y - a}{y + a}\right|.$$

Telle est l'équation générale des trajectoires T.

Déterminons la constante C de façon que la courbe passe par le point $x = 0$, $y = h$; nous obtenons

$$C = h + \frac{a}{2} L\left|\frac{h - a}{h + a}\right|,$$

puis, en retranchant membre à membre,

(3)

$$x = y - h + \frac{a}{2} L\left|\frac{y - a}{y + a}\right| - \frac{a}{2} L\left|\frac{h - a}{h + a}\right|.$$

Pour construire cette courbe, nous ferons varier y de $-\infty$ à $+\infty$, et nous étudierons les valeurs correspondantes de x. La fonction x est discontinue pour $y = \pm a$, et dans les intervalles où elle est continue elle admet une dérivée calculée plus haut,

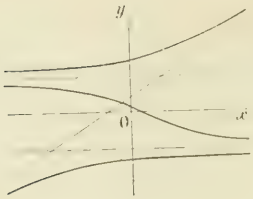
$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{y^2 - a^2},$$

qui a le signe de $y^2 - a^2$.

Nous remarquerons que pour $y = -\infty$, $x = -\infty$, et pour $y = +\infty$, $x = +\infty$, car pour $y = \pm\infty$, $L\left|\frac{y-a}{y+a}\right|$ a pour limite zéro. Pour $y = -a + \varepsilon$, $L\left|\frac{y-a}{y+a}\right|$ est égal à $+\infty$, et pour $y = +a + \varepsilon$, cette fonction est égale à $-\infty$.

On a donc le tableau de variation suivant

y	$-\infty$		$-a$		$+a$		$+\infty$
x	$-\infty$	↗	$+\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$



et la courbe ci-contre.

Les branches infinies relatives à $y = \pm\infty$ admettent l'asymptote

$$(4) \qquad X = y - h - \frac{a}{2} L\left|\frac{h-a}{h+a}\right|,$$

car si on retranche les équations (3) et (4) on a

$$x - X = \frac{a}{2} L\left|\frac{y-a}{y+a}\right|,$$

et le second membre a pour limite zéro quand y croît indéfiniment. De plus, on a

$$L\left|\frac{y-a}{y+a}\right| = L\,\frac{1 - \frac{a}{y}}{1 + \frac{a}{y}} = \frac{2a}{y} + \frac{\lambda}{y^2},$$

λ restant fini quand y croît indéfiniment. Donc $x - X$ est de signe contraire à y pour les valeurs de y infiniment grandes : ceci détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

On voit sans peine que toutes les trajectoires orthogonales ont sensiblement la même forme.

Posons $\qquad S_1 = \text{aire } ABz'z, \qquad S_2 = \text{aire } AA'z, \qquad S_3 = \text{aire } BB'z';$

l'aire demandée est égale à $\qquad S = S_1 + S_3 - S_2,$

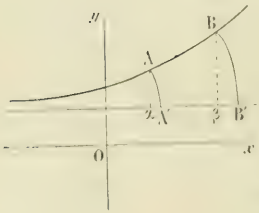
dans le cas de la figure.

On a

$$S_2 = \int_{z}^{z'} (y - a)\,dx, \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{y^2 - a^2}; \qquad \text{donc} \qquad S_1 = \int_{z}^{z'} \frac{y^2(y-a)}{y^2 - a^2}\,dy = \int_{z}^{z'} \frac{y^2}{y+a}\,dy.$$

On peut écrire

$$\frac{y^2}{y+a} = \frac{y^2 - a^2 + a^2}{y+a} = y - a + \frac{a^2}{y+a}$$



L'intégrale indéfinie est $\frac{y^2}{2} - ay + a^2 L(y+a)$, et l'on en déduit aisément

$$S_1 = a^2\left(\frac{3}{2} + L\frac{4}{3}\right).$$

D'autre part $\qquad S_2 = \int_{z}^{z'} (y - a)\,dx;$

mais, le long de la conique AA', on a $dx = \frac{(a^2 - y^2)\,dy}{y^2}$; par suite,

$$S_2 = \int_{z}^{z'} \frac{y(a^2 - y^2)}{y^2}\,dy.$$

Or $$\frac{(y-a)(a^2-y^2)}{y^2} = -y + a + \frac{a^2}{y} - \frac{a^3}{y^2};$$

l'intégrale indéfinie est $$-\frac{y^2}{2} + ay + a^2 \mathrm{L}y + \frac{a^3}{y},$$

et l'intégrale définie est $a^2(1 - \mathrm{L}2)$; on a donc $S_2 = a^2(1 - \mathrm{L}2)$.

On a de même $$S_3 = \int_{a}^{2a} \frac{(y-a)(a^2-y^2)}{y^2}\,dy = a^2\left(\frac{8}{3} - \mathrm{L}3\right),$$

et, par suite, $$S = a^2\left(\frac{19}{6} + \mathrm{L}\frac{8}{9}\right).$$

Remarque. — La formule subsiste quelle que soit la figure. Si le point A′ est à gauche de α, l'aire AA′α doit être précédée du signe + dans la somme S ; mais dans ce cas cette aire AA′α est égale à $\int_{x'}^{x_A} (y-a)\,dx$, c'est-à-dire à la valeur de S_2 changée de signe. Même observation pour l'aire BB′β.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonne solution par M. G. Lach, à Douai.

2150. — *On demande l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y = \cos(\sqrt{x}).$$

Démontrer qu'il y a une intégrale et une seule qui est continue pour $x = 0$, *et donner l'expression de cette intégrale.*

On sait que l'équation sans second membre

$$(1) \qquad 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

admet deux intégrales de la forme x^r, r étant une constante ; pour déterminer les valeurs de r, nous remplaçons dans l'équation y par x^r, et nous obtenons, après avoir divisé par x^r,

$$2r(r-1) + 7r + 3 = 2r^2 + 5r + 3 = 0,$$

et cette équation a pour racines -1 et $-\frac{3}{2}$.

L'intégrale générale de l'équation (1) est donc

$$(2) \qquad Ax^{-1} + Bx^{-\frac{3}{2}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Nous aurons l'intégrale générale de l'équation avec second membre

$$(3) \qquad 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y = \cos(\sqrt{x})$$

en ajoutant à l'intégrale générale de l'équation (1) une intégrale particulière de (3). Nous appliquerons pour la recherche de cette intégrale la méthode de la variation des constantes ; en d'autres termes, nous allons chercher une intégrale de (3) qui ait la forme $Ax^{-1} + Bx^{-\frac{3}{2}}$, A et B étant des fonctions de x.

Posons $$y = Ax^{-1} + Bx^{-\frac{3}{2}},$$

nous en tirons

$$\frac{dy}{dx} = -Ax^{-2} - \frac{3}{2}Bx^{-\frac{5}{2}} + \frac{dA}{dx}x^{-1} + \frac{dB}{dx}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Nous assujettirons d'abord A et B à la condition

$$\frac{dA}{dx}x^{-1} + \frac{dB}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

ou (4)
$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Il reste alors
$$\frac{dy}{dx} = Ax^{-2} - \frac{3}{2}Bx^{-\frac{5}{2}},$$

et si nous dérivons encore une fois, nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Ax^{-3} + \frac{15}{4}Bx^{-\frac{7}{2}} - \frac{dA}{dx}x^{-2} - \frac{3}{2}\frac{dB}{dx}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Portons ces valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation (3); les coefficients de A et B sont identiquement nuls [puisque (2) est l'intégrale générale de l'équation sans second membre], et il reste

(5)
$$-\frac{dA}{dx}x^{-2} - \frac{3}{2}\frac{dB}{dx}x^{-\frac{5}{2}} = \cos(\sqrt{x}).$$

Des équations (4) et (5), nous tirons sans difficulté

$$\frac{dA}{dx} = \cos\sqrt{x}, \qquad \frac{dB}{dx} = -\sqrt{x}\cos\sqrt{x},$$

et, par suite,

$$A = \int \cos\sqrt{x}\,dx, \qquad B = -\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx.$$

Pour calculer ces intégrales, posons $\sqrt{x} = u$, $x = u^2$, $dx = 2u\,du$; nous obtenons

$$A = 2\int u\cos u\,du, \qquad B = -2\int u^2\cos u\,du,$$

et au moyen de l'intégration par parties, on obtient sans peine

$$A = 2(u\sin u + \cos u) = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}),$$

$$B = -2(u^2\sin u + 2u\cos u + 2\sin u) = -2(x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x}).$$

Multiplions A par x^{-1} ou $\frac{1}{x}$, B par $x^{-\frac{3}{2}}$ ou $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, puis ajoutons; nous obtenons, après avoir simplifié, la fonction

$$\frac{4\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2\cos\sqrt{x}}{x},$$

qui est une intégrale particulière de (3).

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (3) est

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x\sqrt{x}} + \frac{4\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2\cos\sqrt{x}}{x},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Cherchons pour quelles valeurs de A et B cette intégrale reste finie pour $x = 0$. Développons en série $\sin\sqrt{x}$ et $\cos\sqrt{x}$: nous obtenons

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{6} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5!} - \cdots\right) - \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \cdots\right),$$

ou
$$\frac{A+2}{x} + \frac{B}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{3} + f(x),$$

$f(x)$ désignant l'ensemble des termes qui s'annulent pour $x = 0$.

Pour que cette fonction soit finie pour $x = 0$, il faut qu'on ait $A = -2$, $B = 0$, et la valeur de la fonction pour $x = 0$ est alors $\frac{1}{3}$.

L'intégrale demandée est donc $-\frac{2}{x} + \frac{4\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2\cos\sqrt{x}}{x}$.

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions par MM. E. Rouge, à Sainte Barbe; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; Gaston Roy.

2151. — *On donne un ellipsoïde et un point* M, *et on considère les droites* D *telles que chacune d'elles soit perpendiculaire au plan passant par sa conjuguée par rapport à l'ellipsoïde et par le point* M.

1° *Démontrer que par un point de l'espace passent trois droites* D. *Peuvent-elles former un trièdre trirectangle?*

2° *Dans un plan* P, *il existe en général une seule droite* D; *quels sont les plans renfermant une infinité de ces droites et quelle est l'enveloppe de ces droites dans chacun d'eux?*

3° *On suppose que le plan* P *se déplace parallèlement à lui-même; former la surface engendrée par les droites* D *situées dans les positions successives de ce plan.*

4° *Pour quelles directions du plan* P *ou bien pour quelles positions du point* M *cette surface est-elle réductible à une courbe plane et quelle est cette courbe?*

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ l'équation de l'ellipsoïde, et $\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ celles de la droite D. La droite conjuguée de celle-ci est l'intersection des plans polaires de deux points de la droite

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0,$$

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0;$$

le plan en question est donc l'un des plans du faisceau

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)=0;$$

c'est celui qui passe au point M de coordonnées x_1, y_1, z_1, qui correspond, par suite, à la valeur de λ fournie par l'équation

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}+\frac{\gamma z_1}{c^2}\right)=0.$$

En écrivant que ce plan est perpendiculaire à la droite D, nous avons

$$\frac{x_0+\lambda\alpha}{a^2\alpha}=\frac{y_0+\lambda\beta}{b^2\beta}=\frac{z_0+\lambda\gamma}{c^2\gamma};$$

comme λ est déterminé en fonction des éléments de la droite, nous voyons que cette droite satisfait à deux conditions, et que, par suite, il en passe un nombre limité par un point donné de l'espace.

1° Dès lors, soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce point. Appelons μ la valeur commune des trois rapports; nous aurons $\alpha=\frac{x_0}{a^2\mu-\lambda}$, $\beta=\frac{y_0}{b^2\mu-\lambda}$, $\gamma=\frac{z_0}{c^2\mu-\lambda}$, et, en portant ces valeurs de α, β, γ dans la relation qui donne λ,

$$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}-1+\frac{\lambda x_0x_1}{a^2(a^2\mu-\lambda)}+\frac{\lambda y_0y_1}{b^2(b^2\mu-\lambda)}+\frac{\lambda z_0z_1}{c^2(c^2\mu-\lambda)}=0.$$

Cette équation est du troisième degré en $\frac{\lambda}{\mu}$ ou en $\frac{\mu}{\lambda}$; il y a donc bien trois droites D qui passent au point (x_0, y_0, z_0). Elle se simplifie d'ailleurs et s'écrit $\frac{x_0x_1}{a^2\mu-\lambda}+\frac{y_0y_1}{b^2\mu-\lambda}+\frac{z_0z_1}{c^2\mu-\lambda}-\frac{1}{\mu}=0$, ou, en posant $\frac{\lambda}{\mu}=\nu$, $\frac{x_0x_1}{a^2-\nu}+\frac{y_0y_1}{b^2-\nu}+\frac{z_0z_1}{c^2-\nu}-1=0$.

Avec ce nouveau paramètre, les paramètres directeurs de la droite D sont

$$\alpha=\frac{x_0}{a^2-\nu},\qquad \beta=\frac{y_0}{b^2-\nu},\qquad \gamma=\frac{z_0}{c^2-\nu},$$

et, pour que deux d'entre les droites D soient rectangulaires, il faut que l'on ait

$$\frac{x_0^2}{(a^2-\nu)(a^2-\nu')}+\frac{y_0^2}{(b^2-\nu)(b^2-\nu')}+\frac{z_0^2}{(c^2-\nu)(c^2-\nu')}=0;$$

or les deux équations

$$\frac{x_0x_1}{a^2-\nu}+\frac{y_0y_1}{b^2-\nu}+\frac{z_0z_1}{c^2-\nu}-1=0,$$

$$\frac{x_0x_1}{a^2-\nu'}+\frac{y_0y_1}{b^2-\nu'}+\frac{z_0z_1}{c^2-\nu'}-1=0,$$

retranchées l'une de l'autre donnent

$$\frac{x_0x_1}{(a^2-\nu)(a^2-\nu')}+\frac{y_0y_1}{b^2-\nu)(b^2-\nu')}+\frac{z_0z_1}{(c^2-\nu)(c^2-\nu')}=0.$$

C'est une nouvelle équation du second degré en ν' qui doit avoir les mêmes racines que l'autre, ν' et ν''; les deux équations du second degré ne doivent donc différer que par un facteur constant, et ceci conduit facilement aux relations $\frac{x_0}{x_1}=\frac{y_0}{y_1}=\frac{z_0}{z_1}$, qui sont évidemment suffisantes. La condition nécessaire et suffisante pour que les droites D qui passent au point (x_0, y_0, z_0) forment un trièdre trirectangle est donc que ce point soit sur le diamètre du point M.

Quand le point est au point M lui-même, l'équation qui donne ν est

$$\frac{x_1^2}{a^2-\nu}+\frac{y_1^2}{b^2-\nu}+\frac{z_1^2}{c^2-\nu}-1=0;$$

c'est celle qui donne les trois paramètres des surfaces homofocales à l'ellipsoïde et qui passent au point M; les droites D sont alors les normales à ces surfaces et on retombe sur un théorème connu.

2° Dans un plan P, $ux+vy+wz+r=0$, il peut y avoir des droites D; il suffit, pour cela, que deux points de l'une de ces droites $(x_0, y_0, z_0, 1)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, soient dans le plan P, et ceci donne

$$ux_0+vy_0+wz_0+r=0,$$
$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0,$$

et, en rapprochant ces relations de celles du début, nous avons les trois équations que voici :

$$ux_0+vy_0+wz_0+r=0,$$

$$\frac{ux_0}{a^2-\nu}+\frac{vy_0}{b^2-\nu}+\frac{wz_0}{c^2-\nu}=0,$$

$$\frac{x_1x_0}{a^2-\nu}+\frac{y_1y_0}{b^2-\nu}+\frac{z_1z_0}{c^2-\nu}-1=0.$$

Ces équations nous donnent x_0, y_0, z_0 en fonction de ν; il est facile de voir que ce sont des fonctions homographiques de ν, ce qui met en évidence ce fait que le lieu du point (x_0, y_0, z_0) est une droite.

Pour cela, posons $\frac{x_0}{a^2-\nu}=X$, $\frac{y_0}{b^2-\nu}=Y$, $\frac{z_0}{c^2-\nu}=Z$; nous aurons

$$u(a^2-\nu)X+v(b^2-\nu)Y+w(c^2-\nu)Z=-r,$$
$$uX+vY+wZ=0,$$
$$x_1X+y_1Y+z_1Z=1;$$

en vertu de la seconde, la première se réduit à

$$ua^2X+vb^2Y+wc^2Z=-r,$$

et il saute aux yeux que X, Y, Z sont des constantes qui ne dépendent que de u, v, w, x_1, y_1, z_1; donc le point x_0, y_0, z_0 décrit une droite parfaitement déterminée en général; c'est la droite D qui est dans le plan P.

Pour qu'il y ait une infinité de droites D dans le plan P, il faut que les trois équations en X, Y, Z aient une infinité de solutions; ceci exige que le déterminant des coefficients des inconnues et un

caractéristique soient nuls. Soit alors

$$\begin{vmatrix} ua^2 & vb^2 \\ u & v \end{vmatrix}$$

un déterminant principal ; les deux conditions seront

$$\begin{vmatrix} ua^2 & vb^2 & wc^2 \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} ua^2 & vb^2 & -r \\ u & v & 0 \\ x_1 & y_1 & +1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_1vw(b^2-c^2)+y_1wu(c^2-a^2)+z_1uv(a^2-b^2)=0,$$
$$uv(a^2-b^2)-r(uy_1-vx_1)=0.$$

La première de ces équations représente une conique du plan de l'infini, tangente aux trois plans de coordonnées ; la deuxième représente une conique du plan des xy, tangente aux axes et à la droite du plan de l'infini qui est dans le plan des xy : c'est une parabole.

Les plans P enveloppent une développable de quatrième classe définie par ces deux coniques. Cette développable a encore deux autres lignes doubles situées dans les deux autres plans de coordonnées et qui s'obtiennent en annulant les deux autres déterminants du troisième ordre formés avec les trois équations linéaires en X, Y, Z.

Pour avoir l'enveloppe des droites D qui sont dans l'un de ces plans particuliers, il faut écrire qu'un plan variable contient cette droite, désigner par u_0, v_0, w_0, r_0 les coordonnées du plan particulier P choisi, et éliminer x_0, y_0, z_0 et ν entre toutes les équations ainsi obtenues. Nous trouvons ainsi d'abord

$$ux_0+vy_0+wz_0+r=0,$$

$$ux+vy+wz=0 \qquad \text{ou} \qquad u\frac{x_0}{a^2-\nu}+v\frac{y_0}{b^2-\nu}+w\frac{z_0}{c^2-\nu}=0.$$

Introduisons les variables X, Y, Z ; nous aurons alors

$$ua^2X+vb^2Y+wc^2Z+r=0,$$
$$uX+vY+wZ=0,$$
$$u_0a^2X+v_0b^2Y+w_0c^2Z+r_0=0,$$
$$u_0X+v_0Y+w_0Z=0,$$
$$x_1X+y_1Y+z_1Z-1=0:$$

or nous sommes dans le cas où les trois dernières équations se réduisent à deux ; en supprimant la dernière et éliminant X, Y, Z entre les quatre autres, nous avons l'équation tangentielle de l'enveloppe :

$$\begin{vmatrix} a^2u & b^2v & c^2w & r \\ u & v & w & 0 \\ a^2u_0 & b^2v_0 & c^2w_0 & r_0 \\ u_0 & v_0 & w_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation du second ordre qui a pour solution double u_0, v_0, w_0, r_0, qui, par conséquent, représente une conique du plan u_0, v_0, w_0, r_0. Cette conique est tangente au plan de l'infini et aux trois plans de coordonnées. C'est une parabole tangente aux trois plans de coordonnées.

3° Revenons au cas général et supposons que le plan P se déplace parallèlement à lui-même, c'est-à-dire que u, v, w soient données ; nous aurons alors le lieu de la droite D ou, ce qui revient au même, du point x_0, y_0, z_0, en éliminant r et ν entre les trois équations

$$ux_0+vy_0+wz_0+r=0,$$

$$u\frac{x_0}{a^2-\nu}+v\frac{y_0}{b^2-\nu}+w\frac{z_0}{c^2-\nu}=0,$$

$$x_1\frac{x_0}{a^2-\nu}+y_1\frac{y_0}{b^2-\nu}+z_1\frac{z_0}{c^2-\nu}-1=0:$$

or, r est tout éliminé par la suppression de la première équation ; il n'y a donc qu'à éliminer ν entre les deux dernières équations ; on peut aussi calculer x_0, y_0, z_0 en fonction de deux paramètres, dont l'un sera ν, et l'autre une fonction quelconque de ν, par exemple

$$\frac{x_0}{a^2-\nu}+\frac{y_0}{b^2-\nu}+\frac{z_0}{c^2-\nu}=\mu.$$

Calculons x_0, y_0, z_0 ; pour cela, formons une combinaison homogène des deux dernières équations nous aurons

$$\frac{(\mu x_1-1)x_0}{a^2-\nu}+\frac{(\mu y_1-1)y_0}{b^2-\nu}+\frac{(\mu z_1-1)z_0}{c^2-\nu}=0;$$

les deux équations homogènes nous donnent alors

$$\frac{\dfrac{x_0}{a^2-\nu}}{v(\mu z_1-1)-w(\mu y_1-1)}=\frac{\dfrac{y_0}{b^2-\nu}}{w(\mu x_1-1)-u(\mu z_1-1)}=\frac{\dfrac{z_0}{c^2-\nu}}{u(\mu y_1-1)-v(\mu x_1-1)}=\rho,$$

et, en portant ces valeurs de $\dfrac{x_0}{a^2-\nu}$, $\dfrac{y_0}{b^2-\nu}$, $\dfrac{z_0}{c^2-\nu}$ dans l'équation non homogène

$$\frac{x_0}{a^2-\nu}+\frac{y_0}{b^2-\nu}+\frac{z_0}{c^2-\nu}=\mu,$$

nous obtiendrons

$$\rho(vz_1-wy_1+wx_1-uz_1+uy_1-vx_1)=1,$$

$$\rho=\frac{1}{x_1(w-v)+y_1(u-w)+z_1(v-u)};$$

et, ensuite,

$$x_0=(a^2-\nu)\frac{w-v+\mu(vz_1-wy_1)}{x_1(w-v)+y_1(u-w)+z_1(v-u)},$$

$$y_0=(b^2-\nu)\frac{u-w+\mu(wx_1-uz_1)}{x_1(w-v)+y_1(u-w)+z_1(v-u)},$$

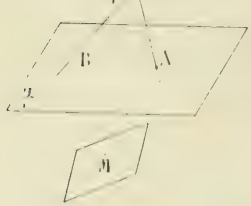
$$z_0=(c^2-\nu)\frac{v-u+\mu(uy_1-vx_1)}{x_1(w-v)+y_1(u-w)+z_1(v-u)}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la surface. Cette surface est une surface doublement réglée, c'est une quadrique, dont les deux systèmes de génératrices sont en évidence. C'est évidemment un paraboloïde hyperbolique.

Quant à la quatrième partie, elle n'a aucun sens, elle est absurde, puisque la surface est une surface ponctuelle qui, en aucun cas, ne peut dégénérer en une courbe. Mais il y a un cas particulier intéressant cependant ; c'est le cas où u, v, w sont proportionnels à x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire le cas où le plan P est perpendiculaire au diamètre OM. Dans ce cas, les équations précédentes n'ont aucun sens. Cela tient à ce que la droite D est rejetée à l'infini et n'a plus de lieu proprement dit.

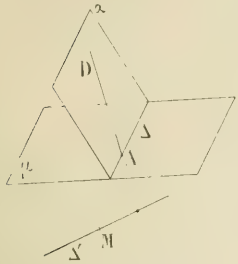
Enfin il est intéressant de remarquer que les droites D font partie du complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées, du complexe des axes.

Remarques géométriques. — Il est facile de définir simplement les droites D. Considérons en effet le plan polaire du point M, le plan μ, et soit A le pied de la droite D sur ce plan ; le plan polaire de A passe par la conjuguée de D et par le point M ; c'est donc le plan de l'énoncé ; alors la droite D est perpendiculaire à ce plan. Les droites D forment donc une congruence définie de la façon suivante : par chaque point d'un plan fixe μ, on mène une droite perpendiculaire au plan polaire de ce point ; ce sont les droites D. Elles font partie du complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées ou, ce qui revient au même, du complexe des droites obtenues en abaissant de chaque point de l'espace une perpendiculaire sur le plan polaire de ce point.



Cherchons les droites de ce complexe qui passent par un point P de l'espace. Une pareille droite PB doit contenir le pôle d'un plan qui lui soit perpendiculaire ; ce point B est en outre sur le diamètre conjugué de cette direction de plan. On sait que ces points B décrivent la cubique d'Apollonius du point P ; cette cubique coupe le plan μ en trois points ; il y a donc trois droites D qui passent au point P.

Voyons maintenant combien il y en a dans un plan α quelconque. Ce plan coupe le plan μ suivant une droite Δ Soit Δ' la conjuguée de Δ; cette droite Δ' passe au point M, pôle du plan μ; abaissons de Δ' un plan perpendiculaire sur le plan α; la droite D du plan α sera celle qui correspond à ce plan. Elle est donc bien déterminée, parce que ce plan mené par Δ' perpendiculairement au plan α est bien déterminé, en général. Mais si la droite Δ' est perpendiculaire au plan α, le plan indiqué est indéterminé et il y a une infinité de droites D dans le plan α. Ces droites étant perpendiculaires à leurs conjugués sont les droites de ce complexe qui sont dans le plan α; elles enveloppent la conique du complexe, et on sait que c'est une parabole.



Quant aux plans α de cette espèce, chacun d'eux est perpendiculaire à la droite qui joint son pôle au point M. Ce sont donc les plans polaires des points de la cubique d'Apollonius du point M. Ils enveloppent la développable réciproque de cette cubique par rapport à l'ellipsoïde.

Considérons maintenant un plan ordinaire α, qui se déplace parallèlement à lui-même. Le plan perpendiculaire, α', mené par Δ' tourne autour de la perpendiculaire abaissée du point M sur cette direction; donc son pôle, A, décrit une droite dans le plan μ. D'autre part, la série A est homographique à ce faisceau de plans, et la droite AD, perpendiculaire aux plans du faisceau, reste parallèle à un plan fixe et trace sur la droite à l'infini de ce plan une division homographique aussi au faisceau de plans. Donc elle engendre un paraboloïde hyperbolique.

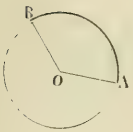
CONCOURS DE 1914 (*Suite*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours spéciaux.

Algèbre et Analyse.

I. — **2286**. Une chaîne AB placée sur un cylindre circulaire horizontal embrasse les $\frac{3}{8}$ de la circonférence d'une section droite; le coefficient de frottement a une valeur telle que, la chaîne étant sur le point de glisser, l'extrémité A soit juste au niveau de l'axe du cylindre.



Dans ces conditions, on démontre que ce coefficient de frottement x est racine de l'équation

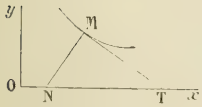
$$(1 - 2x - x^2)e^{\frac{3\pi x}{4}} - 2x\sqrt{2} = 0.$$

1° Montrer que cette équation a une racine et une seule répondant à la question.

2° Calculer cette racine à un centième près en prenant

$$\log e^{\frac{3\pi}{4}} = 1{,}0232823.$$

II. — **2287**. Quelle est la courbe plane pour laquelle la distance NT entre les points d'incidence de la normale et de la tangente avec l'axe Ox est constante : $NT = 2a$?



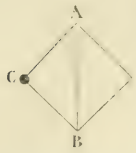
Montrer qu'en déplaçant cette courbe parallèlement à Ox on forme un système orthogonal.

Nota. — Il est facile de calculer l'intégrale à laquelle on parvient; mais cette opération est peu utile et il est commode d'étudier la courbe sur cette intégrale elle-même.

(*Durée : 4 heures.*)

Géométrie et Mécanique.

I. — Une plaque carrée homogène de côté a et de poids P est mobile autour d'un axe horizontal coïnci-



dant avec l'une, AB, de ses diagonales ; cette plaque étant placée horizontalement, on laisse tomber une bille homogène, de poids p, dont le centre décrit la verticale du sommet C et qui atteint ce sommet avec une vitesse v_0.

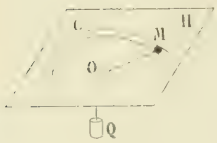
Les deux corps étant regardés comme parfaitement élastiques (ce serait à peu près le cas d'une petite balle pleine en caoutchouc et d'une plaque d'ivoire) quelle vitesse, v, prend la bille aussitôt après le choc ?

En déduire *a priori* la vitesse v' prise par le sommet C et la vitesse angulaire ω prise par la plaque.

Donner en particulier à P les valeurs $3p$, $6p$ et $12p$.

II. Il peut être utile d'introduire dans un mécanisme un cordon dont la tension demeure constante pendant le mouvement, bien que ce mouvement ne soit pas uniforme.

Traiter à cet égard le problème suivant :



Un coulisseau sphérique M, de poids P, considéré dans le calcul comme un point matériel, peut se mouvoir dans une coulisse courbe C installée sur une planchette horizontale H. Ce coulisseau est fixé à l'une des extrémités d'un cordon flexible, inextensible et de poids négligeable, qui traverse la planchette par un œil O ; le cordon supporte un poids Q par son autre extrémité.

L'œil O et la coulisse C sont polis ; de plus un dispositif permet au coulisseau M de rouler, de sorte que les frottements sont négligeables, de même que les autres résistances passives.

Le système étant lancé d'une certaine position initiale de manière que le poids Q se déplace verticalement, le point M ayant la vitesse initiale v_0 et la tension du cordon prenant, au moyen d'un autre dispositif, une valeur initiale T :

1° Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la courbe C pour que la tension T du cordon reste constante pendant le mouvement ;

2° Intégrer cette équation en supposant que $Q = P$, $T = \frac{P}{2}$ et que le brin OM soit normal à la coulisse pour la position initiale du coulisseau, puis indiquer la forme de la courbe obtenue.

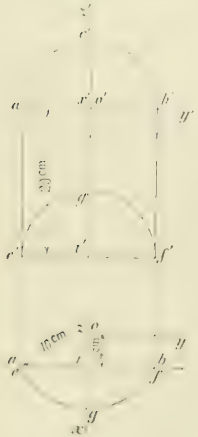
3° Le brin OM étant encore normal à la coulisse dans la position initiale du coulisseau, quelle serait *évidemment* la forme de la coulisse si l'on prenait $T = Q$ en laissant d'ailleurs P quelconque ?

4° Qu'est la courbe C lorsque l'on fait $v_0 = 0$ dans l'équation générale du 1° ?

(*Durée : 4 heures.*)

Épure de perspective cavalière.

Une tour faisant saillie sur le parement d'un mur vertical dont la trace horizontale est ab est limitée aux surfaces suivantes :

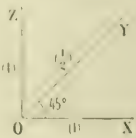


1° La partie extérieure au mur, et limitée en projection verticale au contour $a'b'f'g'e'a'$, d'un cylindre de révolution d'axe $(oz, o'z')$;

2° La partie extérieure au mur, et limitée en projection verticale au contour $a'c'b'a''$, de la demi-sphère de centre (o, o') et de même rayon que le cylindre précédent, et qui surmonte ce cylindre ;

3° La trompe cylindrique, limitée en projection verticale au contour $c'g'f'e'$, qui est engendrée par une génératrice horizontale parallèle à $(ef, e'f')$ s'appuyant sur la courbe gauche dont les projections sont l'arc de cercle egf de centre o et le demi-cercle $e'g'f'$ de centre i'.

A l'échelle du dessin, le rayon commun du cylindre d'axe $(oz, o'z')$ et de la sphère de centre (o, o') est de 10^{cm} ; la distance du centre (o, o') au parement du mur, de 4^{cm} ; la hauteur du rectangle d'occupation de la partie cylindrique de la tour sur le mur, de 20^{cm}.



Faisant correspondre au trièdre de référence $(oxyz, o'x'y'z')$ l'image OXYZ ci-contre sur laquelle OY est dirigé suivant la bissectrice de l'angle XOZ, le rapport de réduction le long de cet axe OY étant égal à $\frac{1}{2}$, construire la perspective cavalière de la tour en saillie.

On ne dessinera en trait noir que les lignes d'intersection ou de raccordement

de la tour et de la trompe avec le mur, la ligne d'intersection de la tour et de la trompe et le contour apparent de l'ensemble (les parties vues, en trait plein; les parties cachées, en trait interrompu). Les lignes de construction seront tracées à l'encre rouge.

Nota. — Prendre la direction du grand côté de la feuille pour celle de la verticale.

Durée : 3 heures.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2137. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad x\frac{dy}{dx} - (x+1)y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2° *Quelle relation y a-t-il entre les courbes intégrales de l'équation* (E) *et la courbe*

$$\text{(C)} \qquad y = \frac{-e^x}{x+1+\sqrt{x^2-1}}?$$

3° *Construire la courbe* (C).

4° *La courbe* (C) *coupe-t-elle la droite* $y = -\frac{3}{2}$?

(Certificat de mathématiques générales, Lyon, juin 1912.)

1. Posons $y = uv$, u et v étant deux fonctions de x dont la seconde peut être choisie arbitrairement. L'équation différentielle devient

$$x\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) - (x+1)uv = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}},$$

ou

$$\text{(1)} \qquad u\left[x\frac{dv}{dx} - (x+1)v\right] + xv\frac{du}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Déterminons la fonction v de façon que le coefficient de u soit nul ; nous avons

$$x\frac{dv}{dx} - (x+1)v = 0,$$

ou

$$\frac{dv}{v} = \frac{x-1}{x}dx = \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx,$$

ou, en intégrant,

$$\mathrm{L}v = x + \mathrm{L}x, \qquad \text{et} \qquad v = xe^x.$$

Il est inutile d'introduire une constante arbitraire puisqu'on peut particulariser la fonction v.

Remplaçons v par cette valeur dans l'équation (1) ; le coefficient de u est nul, et nous avons

$$x^2e^x\frac{du}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}},$$

et

$$du = \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = (\operatorname{sgn} x)\frac{\dfrac{dx}{x^3}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}. \quad (*)$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$u = +(\operatorname{sgn} x)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \mathrm{C} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \mathrm{C}.$$

(*) (sgn x) désigne le signe de x. On a, en effet,

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = (\operatorname{sgn} x)x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

On a, par suite, $y = uv = xe^x\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C\right) = e^x\sqrt{x^2-1} + Cxe^x$,

C désignant une constante arbitraire. Telle est l'intégrale générale de l'équation (E).

2. L'équation de la courbe C,

$$(2) \qquad y = \frac{-e^x}{x+1\sqrt{x^2-1}},$$

se déduit de l'équation différentielle (E) en y faisant $\frac{dy}{dx} = 0$. On en conclut que la courbe (C) est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à Ox aux courbes intégrales de l'équation (E).

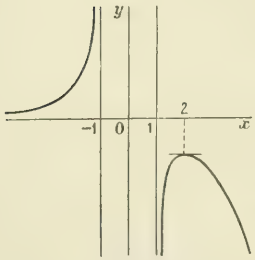
La fonction y définie par l'équation (2) est définie pour toutes les valeurs de x extérieures à l'intervalle $(-1, +1)$.

La dérivée de cette fonction s'écrit

$$y' = -\frac{e^x x(x-2)}{(x+1)^2(x-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit le signe de y' dans les intervalles $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$ et la variation de la fonction dans ces intervalles :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+2$		$+\infty$
y'		$+$				$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{e^2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\infty$



La courbe correspondante se construit alors sans difficulté. La branche infinie relative aux valeurs infinies positives de x est parabolique dans la direction Oy, car $\frac{y}{x}$ est infini pour $x = +\infty$.

3. Pour que la courbe rencontre la droite $y = -\frac{3}{2}$, il faut qu'on ait $\frac{e^2}{3\sqrt{3}} < \frac{3}{2}$. Or on a $e < 2{,}72$, $e^2 < 7{,}3984$. $\sqrt{3} > 1{,}732$, et $\frac{e^2}{3\sqrt{3}} < \frac{7{,}3984}{3 \times 1{,}732}$. On vérifie sans difficulté que le second membre est compris entre 1,42 et 1,43 ; on a donc $\frac{e^2}{3\sqrt{3}} < \frac{3}{2}$, et la courbe rencontre la droite $y = -\frac{3}{2}$ en deux points.

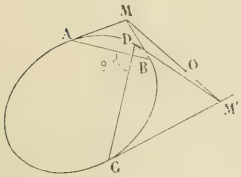
R. DUFOUR, école normale de Nancy.

Bonnes solutions par MM. Gaston Bétiker, 20e d'artillerie, à Poitiers ; G. Mouffletet, à Lyon ; L. Simon, à Fourmies ; L. Thiringer ; Ninin, lycée de Nancy.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2143. — *On donne une ellipse et un point O fixe. Au point M du plan on fait correspondre le point M′ tel que la droite MM′ passe par le point O et que les polaires des points M, M′ soient perpendiculaires. Etudier la correspondance entre les points M et M′.*

Nous rapporterons l'ellipse donnée à ses axes, et nous désignerons par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ son équation, par x_0, y_0 les coordonnées du point fixe donné aussi, O.



Rien ne distingue le point M du point M'; la correspondance entre les deux est involutive ; les formules qui donnent les coordonnées de M en fonction de celles de M' sont les mêmes que celles qui donnent les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

Désignons alors par α, β les coordonnées de M, par α', β' celles de M', et écrivons que les deux polaires sont rectangulaires ; nous aurons

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} = 0 :$$

d'autre part, les deux points sont en ligne droite avec le point O, et ceci donne

$$\frac{\alpha - x_0}{\alpha' - x_0} = \frac{\beta - y_0}{\beta' - y_0}.$$

Soit λ la valeur commune de ces rapports ; nous avons

$$\alpha = x_0 + \lambda(\alpha' - x_0),$$
$$\beta = y_0 + \lambda(\beta' - y_0),$$

et, en portant ces valeurs dans la première relation,

$$\frac{\alpha' x_0}{a^2} + \frac{\beta' y_0}{b^2} + \lambda\left[\frac{\alpha'(\alpha' - x_0)}{a^2} + \frac{\beta'(\beta' - y_0)}{b^2}\right] = 0.$$

Cette relation donne λ :
$$\lambda = -\frac{\frac{\alpha' x_0}{a^2} + \frac{\beta' y_0}{b^2}}{D'},$$

en appelant D' le dénominateur : $D' = \frac{\alpha(\alpha' - x_0)}{a^2} + \frac{\beta'(\beta' - y_0)}{b^2}$.

Nous déduisons de là

$$\alpha = \frac{x_0\left[\frac{\alpha'(\alpha' - x_0)}{a^2} + \frac{\beta'(\beta' - y_0)}{b^2}\right] - (\alpha' - x_0)\left(\frac{\alpha' x_0}{a^2} + \frac{\beta' y_0}{b^2}\right)}{D'},$$

$$\alpha = \beta' \frac{\beta' x_0 - \alpha' y_0}{b^2 D'};$$

de même,
$$\beta = \alpha' \frac{\alpha' y_0 - \beta' x_0}{a^2 D'}.$$

Ce sont les deux formules de transformation.

Les formules inverses sont de même

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = \beta \dfrac{\beta x_0 - \alpha y_0}{b^2 D}, \\[2ex] \beta' = \alpha \dfrac{\alpha y_0 - \beta x_0}{a^2 D}, \end{cases}$$

avec
$$D = \frac{\alpha(\alpha - x_0)}{a^2} + \frac{\beta(\beta - y_0)}{b^2}.$$

La transformation est donc une transformation birationnelle involutive du second ordre : à un point M correspond un point M' et un seul ; à une droite (D) correspond une conique (C') ; à une courbe d'ordre n, une courbe d'ordre $2n$.

Nous voyons en outre que le point M' est indéterminé quand le point M est au point (x_0, y_0) ou à l'origine des coordonnées ; ces deux résultats étaient évidents géométriquement. D'autre part, quand le point M se meut sur une droite passant au centre de l'ellipse, le point M' se meut aussi sur une autre droite passant en ce point. Enfin, quand le point M est à l'infini, le point M' décrit la conique $D' = 0$.

En mettant les coordonnées x', y' sous la forme

$$x' = \frac{A(x, y)}{D(x, y)}, \qquad y' = \frac{B(x, y)}{D(x, y)},$$

il est facile de constater que les trois coniques $A = 0$, $B = 0$, $D = 0$ se coupent au point O et au point C, centre de l'ellipse, où elles sont en outre tangentes (ou plutôt, elles ont deux points confondus communs en C). Ceci explique que la transformation soit birationnelle.

Géométriquement, les deux rayons CM et CM′ sont conjugués de deux directions rectangulaires dans l'ellipse ; ils forment donc deux faisceaux homographiques en involution. Alors si le rayon CM est fixe, le rayon CM′ est fixe aussi. Quand le point M décrit une droite (D), les deux faisceaux CM et OM sont homographiques à la série M, et comme le faisceau CM′ est homographique à CM, il en résulte que les deux faisceaux CM′ et OM′ sont homographiques. Le lieu de M′ est donc une conique qui passe aux points O et C. Toutes ces coniques ont d'ailleurs la même tangente au point C ; c'est le rayon CM′ conjugué de CO dans l'involution indiquée.

Si la conique donnée était une hyperbole, les calculs seraient aussi commodes, tout pareils, les raisonnements géométriques aussi.

Enfin, le cas de la parabole se traite de même aisément.

Solutions satisfaisantes : MM. G. Lach, à Douai ; A. Roussel, à Fournes-en Weppes ; L. Simon, à Fourmies ; L. Thiringer.

PHYSIQUE

2202. — 1. *Dans un tube de Torricelli ayant* 1^{cm^2} *de section et* $2^m,75$ *de hauteur au-dessus du mercure de la cuvette, on fait passer un volume* V *d'air humide à l'état hygrométrique* e *; ce volume est mesuré à la température* t *et sous la pression atmosphérique* P *correspondant à une hauteur* H *de mercure à* 0°.

On demande à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube et quel sera l'état hygrométrique de l'air contenu dans le tube.

La pression qui règne sur le mercure de la cuvette est la pression atmosphérique P *; la température du milieu ambiant est* t.

On supposera la dilatation du mercure dans le tube négligeable.

On représentera par F *la tension maximum de la vapeur d'eau à la température* t.

2. *On augmente ensuite la pression qui règne sur le mercure de la cuvette, jusqu'au moment précis où la vapeur d'eau devient saturante à la température* t.

On demande quelle sera l'augmentation de pression $P' - P$ *nécessaire et à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube.*

3. *On élève la température du milieu ambiant de* t *à* t' *en maintenant constante la pression* P′ *qui règne sur le mercure de la cuvette.*

On demande à quelle hauteur se fixera le niveau du mercure dans le tube et quel sera l'état hygrométrique de l'air contenu dans le tube.

On représentera par F′ *la tension maximum de la vapeur d'eau correspondant à la température* t' *; on négligera la dilatation du mercure et celle du verre.*

4. *Même problème que 3 en tenant compte de la dilatation du mercure ; on se contentera de poser les équations sans les résoudre.*

Application numérique :

$H = 75^{cm}$ *de mercure,*	$t = 12$ *degrés,*
$F = 10^{mm},4$	$e = 0,5$,
$V = 15^{m^3},07$,	$t' = 100$ *degrés.*

(*École des Mines de Saint-Étienne, 1913.*)

1. Appliquons la loi de Mariotte à la masse d'air humide introduite. Son volume initial est V et sa pression initiale est mesurée par la hauteur H de mercure. Si x désigne la hauteur à laquelle se fixe le niveau du mercure, le volume final est $275 - x$ et la pression finale est mesurée par la hauteur $H - x$ de mercure :

$$VH = (275 - x)(H - x),$$

ou, en remplaçant V et H par leurs valeurs,

$$15{,}07 \times 75 = (275 - x)(75 - x), \qquad x^2 - 350x + 75\,259{,}93 = 0, \qquad x = 175 \pm 105{,}5,$$

$$x = 69{,}5.$$

Le volume du gaz est $275 - x = 205{,}5$; la pression, $75 - x = 5{,}5$

La pression de la vapeur d'eau, en particulier, a diminué dans le même rapport que la pression totale, et comme l'état hygrométrique est proportionnel à cette pression, on a, en désignant par e' le nouvel état hygrométrique,

$$e' = \frac{5{,}5}{75} e = \frac{5{,}5}{150} = \frac{11}{300} = 0{,}037 \text{ environ.}$$

2. La vapeur d'eau devient saturante, c'est-à-dire prend la pression F, quand elle occupe un volume l' tel que $l'F = Vf$ ou $l' = Ve$.

Soit H' la hauteur de mercure correspondant à la pression P' et x' la hauteur à laquelle s'élève alors le mercure dans le tube. En appliquant encore la loi de Mariotte à l'air humide, on a

$$VH = Ve(H' - x'), \qquad H = e(H' - (275 - Ve)), \qquad 75 = \frac{1}{2}(H' - 267{,}465), \qquad H = 417{,}465,$$

$$H' - H = 342{,}465, \qquad x' = 267{,}465.$$

Autrement, le volume a dû devenir la moitié de ce qu'il était ; donc

$$l' = 7{,}535 \qquad \text{et} \qquad x' = 267{,}465.$$

En même temps, la pression de l'air a doublé et est devenue 150. Donc

$$H' = 150 + 267{,}465.$$

3. Si on élève la température de t à t', le mercure descend à une hauteur x' et la chambre à air prend une longueur $275 - x''$. Soit α le coefficient de dilatation des gaz. On aura

$$\frac{l'(H' - x')}{1 + \alpha t} = \frac{(275 - x'')(H' - x'')}{1 + \alpha t'}, \qquad \frac{7{,}535 \times 150}{273 + 12} = \frac{(275 - x')(417{,}465 - x')}{273 + 100}.$$

Les calculs effectués, on trouve

$$x''^2 - 692{,}46x'' + 113323{,}6 = 0,$$

$$x'' = 346{,}23 \pm 80{,}94, \qquad \text{donc} \qquad x = 265{,}29.$$

Le mercure a baissé de $267{,}465 - 265{,}29 = 2{,}17$.

La nouvelle longueur de la chambre à air est $l'' = 275 - 265{,}3 = 9{,}7$.

La nouvelle pression de l'air est $H' - x' = 417{,}465 - 265{,}29 = 152{,}175$.

La pression de la vapeur a toujours varié dans le même rapport que la pression totale ; elle est donc devenue $10{,}4 \times \frac{152{,}175}{150} = 10{,}55$.

Comme, à 100°, la tension maximum est 760, le nouvel état hygrométrique sera

$$\frac{10{,}55}{760} = 0{,}014 \text{ environ.}$$

4. Si l'on tient compte de la dilatation du mercure, il faudra, dans l'évaluation des pressions, rendre les hauteurs de mercure comparables en les ramenant à 0°. Si on désigne par m le coefficient de dilatation du mercure, l'équation d'équilibre prend la forme

$$\frac{l'\dfrac{H' - x'}{1 + mt}}{1 + \alpha t} = \frac{(275 - x'')\left(\dfrac{H'}{1 + mt} - \dfrac{x}{1 + mt'}\right)}{1 + \alpha t'}.$$

CHIMIE

2203. — *On fait brûler 1g d'acier à x % de carbone dans un volume limité d'oxygène pur en amorçant l'allumage électriquement. On absorbe le gaz carbonique résultant de l'oxydation du carbone dans une quantité connue (n^{cm3}) de solution alcaline* NaOH *placée dans le vase même où se fait la combustion. Les autres produits d'oxydation restent dans la coupelle où ont brûlé les copeaux d'acier.*

Une expérience préalable a montré que 32^{cm3} *d'une solution sulfurique à* $5^g,0406$ *de* SO^4H^2 *par litre saturaient exactement les* n^{cm3} *de la solution de soude.*

On constate qu'après combustion $30^{cm3},05$ *de la même solution sulfurique suffisent pour saturer l'excès de soude libre et transformer en bicarbonate tout le carbonate neutre qui s'est formé par union du gaz carbonique avec la soude.*

Les titrages par la solution sulfurique s'effectuent en présence de phénolphtaléine comme indicateur.

On demande la teneur de l'acier en carbone.

$$S = 32 ; \qquad O = 16 ; \qquad C = 12.$$

(École des Mines de Saint-Étienne, 1913.)

La réaction de l'acide sulfurique sur le carbonate neutre se formule

$$2CO^3Na^2 + SO^4H^2 = SO^4Na^2 + 2CO^2NaH.$$

Celle de l'acide sulfurique sur la quantité correspondante de soude non carbonatée serait

$$4NaOH + 2SO^4H^2 = 2SO^4Na^2 + 4H^2O.$$

La différence est donc d'une molécule d'acide sulfurique pour deux de gaz carbonique ; ou encore, une molécule d'acide sulfurique équivaut à deux de gaz carbonique.

Or entre les quantités d'acide sulfurique nécessaires pour neutraliser les n^{cm3} de soude suivant que cette soude est partiellement carbonatée ou non, il y a une différence de $32 - 30,05 = 1^{cm3},95$, soit un nombre de millimolécules d'acide égal à

$$1,95 \times \frac{5,0406}{98}.$$

A ce nombre correspond un nombre double de millimolécules de gaz carbonique et, par conséquent, un nombre double de milli-atomes de carbone, ce qui fait un poids

$$2 \times 1,95 \times \frac{5,0406}{98} \times 12 = 2,4 \text{ milligrammes.}$$

L'acier est donc à 0,24 % de carbone.

CONCOURS DE 1914 (*Suite.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre et Analyse.

1. **2288.** On considère en coordonnées cartésiennes rectangulaires la parabole $y^2 = 2px$, $(p > 0)$; soient A la grandeur de l'aire de cette parabole comprise entre l'axe Ox et l'ordonnée mM correspondant à $x = \alpha$, α, β, les coordonnées de M, ξ, η les coordonnées du centre de gravité G de l'aire A.

1° Parmi toutes les paraboles correspondant aux diverses valeurs de p et pour lesquelles l'aire OmM est égale à A donnée, trouver celle pour laquelle la distance $OG = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ est maximum ou minimum. On prendra β comme variable.

2° Quel est le lieu du centre de gravité G quand p varie ? Quelle est l'interprétation corrélative du maximum ou du minimum trouvé ?

3° Etudier en fonction de β, et représenter graphiquement la variation de l'aire a engendrée par la révolution de l'arc OM autour de Ox ; la courbe représentative a-t-elle des points d'inflexion ?

II. — **2289.** On donne l'équation

$$x^3 + 6x^2 - (\alpha - 12)x - (2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0.$$

Montrer qu'il existe au moins une valeur réelle de α pour laquelle l'équation a deux racines égales ; indiquer avec assez de précision un procédé aussi simple que possible pour calculer la valeur ou les valeurs de α qui correspondent aux racines égales de l'équation proposée.

Géométrie analytique.

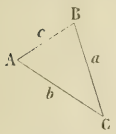
2290. — Etant donnée, en coordonnées polaires, l'équation

$$\rho = \frac{1}{1 + k\cos 3\omega}$$

dans laquelle le vecteur ρ est positif ou négatif et k est un nombre positif supérieur à l'unité :

1° Etudier aussi simplement que possible la courbe représentée par cette équation et en figurer toutes les branches avec leurs asymptotes.

2° Former l'équation à laquelle doit satisfaire k pour que ceux des sommets de cette courbe qui sont susceptibles d'être sur les asymptotes s'y trouvent effectivement.



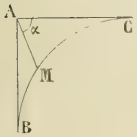
3° Indiquer de quelle manière sont situés les sommets par rapport aux asymptotes lorsque k croît de 1 à l'infini.

Calcul numérique.

2291. — Dans un triangle ABC, on donne $b = 32^m$, $c = 21^m$, $A = 55°$. Calculer B, C, a.

Mécanique.

2292. — On donne, dans un plan vertical, le quart de circonférence BMC de rayon R, inscrit dans l'angle droit BAC dont le côté AC est horizontal.



Quelle est, en tenant compte du frottement, la droite allant du sommet A de l'angle droit à un point M du quart de circonférence, qu'un point pesant doit suivre pour faire, sans vitesse initiale, le trajet AM dans le temps t le plus court ?

Quel est ce temps minimum ? Le comparer à la durée T de la chute libre le long de la verticale AB.

On déterminera la direction de AM par la tangente de l'angle $CAM = \alpha$ et on désignera par φ l'angle du frottement sur la droite AM.

La question de minimum devra être traitée par les élémentaires.

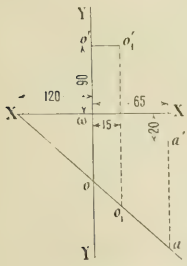
On fera les deux applications numériques suivantes :

1° $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$.

2° $\varphi = 0$ (droite parfaitement lisse).

Épure de Géométrie descriptive.

2293. — On considère trois points (o, o'), (o_1, o_1'), (a, a') dont les projections horizontales sont sur une même droite à 45° qui rencontre le petit axe XωX de la feuille à 120^{mm} à gauche du grand axe YωY et se dirige vers le côté droit inférieur de la feuille.



Les projections verticales de ces points se font :

o' sur le grand axe, avec $o'\omega = 90^{mm}$; o_1' à 15^{mm} à droite du grand axe à la même hauteur que o'.

a_1 à 65^{mm} à droite du grand axe et à 20^{mm} au-dessous du petit axe.

La droite indéfinie $(oa, o'a')$ tournant autour de la verticale du point (o, o') et la droite indéfinie $(o_1a, o_1'a')$ tournant autour de la verticale du point (o_1, o_1') engendrent chacune deux nappes d'un cône de révolution.

Déterminer l'intersection de ces deux cônes. Représenter la partie du solide opaque et plein formé par l'ensemble des deux cônes se pénétrant, comprise entre le plan horizontal passant par (a, a') et le plan horizontal symétrique de celui-ci par rapport à la ligne des sommets.

Les constructions (détermination d'un point quelconque et des points principaux de l'intersection avec leurs tangentes seront tracées à l'encre rouge en trait fin. Le solide demandé sera dessiné à l'encre noire : les parties vues, en trait plein ; les parties cachées, en pointillé.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1912-1913 ET 1913-1914

ALGÈBRE, ANALYSE, TRIGONOMÉTRIE ET CALCUL

Numéros des questions. — Pages

2021 Des relations

$$u_n = au_{n-1} + bv_{n-1}, \qquad v_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}$$

déduire u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0. . . . 70

2033 Etudier la série $u_n = \operatorname{tg}\left(a + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ 152

2134 Etudier la série

$$\frac{x}{3!} + \frac{x(1-x)}{4!} + \frac{x(1-x)(2-x)}{5!} + \frac{x(1-x)(2-x)(3-x)}{6!} + \dots$$

et calculer la somme 445

2123 Déterminer une série dont le terme général $u_n(x)$ est égal à la dérivée de la somme des n premiers termes. 393

2017 Etude des fonctions

$$y = \frac{x^2 - ax + a^2}{x - a}, \qquad Y = y + a, \qquad Z = \frac{aY}{x}.$$

Asymptotes des courbes correspondantes. . . 49

2036 Variation de la fonction $y = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 + \sin x}$

Déterminer A, B, C de façon que

$$y - \frac{A}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{B}{x - \frac{3\pi}{2}} - C$$

tende vers zéro pour $x = \frac{3\pi}{2}$ 142

2052 Développer en série $L\frac{1-x}{1+ax}$. 191

2053 Décomposer en éléments simples $\frac{1}{\cos 4t - \cos 4a}$ en posant $x = \cos t$ . . 193

2155 Etude de la fonction θ définie par

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1 + \theta x}.$$

Nature de la série $u_n = \theta(n)$. Calculer $\int_0^x \frac{x}{1+x^2}\,\theta(x)\,dx$ . . . 505

2080 Sur le développement de $\int_0^x \cos kz^2\,dz$ par rapport aux puissances ascendantes de x . . . 229

2081 Calculer $\int_0^x \frac{dx}{x^2 + a^2 x^2}$ et $\int_0^x \frac{f(x)\,dx}{x^2 + a^2 x^2}$,

$f(x)$ étant un polynome 262

2175 Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\cos x + 3}$ et $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\cos x + 3)^2}$ 548

2137 Intégrer $x\frac{dy}{dx} = (x + 1)y + \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. 611

Numéros des questions. — Pages

2184 Intégrer $\frac{dy}{dx} = y - mx$. Déterminer l'intégrale qui s'annule pour $x = 0$. Courbe correspondante 178

2011 Intégration des équations $xy' - xy + y^2 = 0$, $xy'' + 2xy' + y^2 = 0$. Propriétés des courbes intégrales 46

2020 Intégrer au moyen des séries

$$x^2y'' - 2xy' + 2 + x^2y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63$$

2035 Intégrer l'équation

$$\sin 2x\frac{dy}{dx} = (3 + 2\cos x - 2\sin x + \cos 2x)y + a\sin x + b\cos x + 6.$$

Déterminer a et b de façon que toutes les intégrales soient des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$ 140

2048 Intégrer $y' = 2y^2 + (1 - x^2)y^2 + e^x + \sin^2 x$ . . 228

2093 Intégrer $2\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5y = xe^x$. 322

2150 Intégrer $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y = \cos\sqrt{x}$). . . 603

2101 Intégrer au moyen des séries $y' = xy$. 377

2128 Intégrer au moyen des séries

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3\sin x.$$

Etude d'une intégrale particulière. 417

2135 Etant donnée l'équation

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + 4m(m - 1)y = 0,$$

montrer qu'elle admet comme intégrale $\frac{\cos[(2m+1)\operatorname{arc}\sin x]}{\sqrt{1 - x^2}}$. En déduire l'intégrale générale 447

2025 Sur une perpendiculaire à Ox au point P on prend des points M, M' tels que $\overline{PM}\cdot\overline{PM'} = a^2$; M décrivant une courbe (C), M' décrit une courbe (C'). Déterminer la courbe (C) de façon que les tangentes en M et M' forment avec MM' un triangle d'aire constante 76

2034 Déterminer des courbes telles que $\rho^2 - s^2 = a^2$, ρ rayon de courbure, s arc, a constante. . . 126

2049 Déterminer une courbe (C) telle que $NT = 2a$, N point de rencontre de la normale en M avec Ox, T point de rencontre de la tangente en M et de la parallèle à Oy menée par N. Calcul d'une aire. 229

2063 Etant donnée une courbe (C), $\rho = f(\omega)$, déterminer une courbe (D) telle que les tangentes aux points de (C) et (D) situés sur un même rayon vecteur fassent un angle constant. Cas particulier où (C) est un cercle, une spirale logarithmique. 245

6421 MN normale en un point M d'une courbe (C

Numéros des questions. — Pages.

limitée à Ox, OR vecteur équipollent à MN. Déterminer (C) de façon que R décrive une conique ayant O pour sommet, Ox pour axe . 498

2133 La normale à une courbe en un point M rencontre les axes en P et Q. On mène les vecteurs OP′, OQ′ équipollents à MP, MQ. Déterminer la courbe de façon que les tangentes aux lieux de P′ et Q′ soient parallèles. 571

2060 Résoudre
$27(12x^2 - 12ax + a^2)^2 + 1600x^2(x^2 - 2ax) = 0$,
sachant que cette équation a une racine double et que l'une des racines simples est le tiers de la racine double. 234

2078 Sur les équations du quatrième degré qui ont la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + b\lambda x + a\lambda^2 = 0$. . . . 270

2089 Condition pour qu'entre les racines d'une équation du sixième degré on ait
$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6$,
$x_1x_2x_3 = x_4x_5x_6$ 340

2112 α, β, γ étant les racines d'une équation donnée du troisième degré, former le polynome
$P(x) = \sum(\alpha - \beta)^2(x - \gamma)^2$;
propriétés de ce polynome 349

2185 Résoudre l'équation
$4x^3 \sin a + 6x^2 \sin 2a + 4x \sin 3a + \sin 4a = 0$
après avoir mis le premier membre sous la forme $\rho[(x+\lambda)^4 - (x+\mu)^4]$ 481

2147 Discuter la réalité des racines de l'équation
$xLx - xx_0 - x - y_0 = 0$
suivant la position du point (x_0, y_0) dans le plan 571

2007 Résoudre $\cos 2x + \cos x - 1 = \sin \frac{3x}{2}$ . . . 31

2073 Triangle ABC dans lequel $2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$. Variations de $\cos B + \cos C$. Déterminer A de façon que $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = k$. 177

2179 ABC triangle rectangle en A, $BC = a$. Sur la bissectrice de l'angle B on prend $BD = l$, on abaisse DE perpendiculaire sur AC et DP sur AB. On pose $x = \frac{B}{2}$. Étudier la variation de DE quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Déterminer x de façon que $\frac{DE}{DP} = k$ 511

2040 Calculer la longueur d'un arc de cercle connaissant la corde $AB = 31^m,30$ et la flèche $CM = 1^m,16$ 169

2074 Calculer les angles x compris entre 0 et douze droits vérifiant $\sin x = \frac{2}{3}$, puis les valeurs de $y = \frac{\sin \frac{x}{3}}{4 - \sqrt{8}}$ 179

2057 Connaissant $a = 50°10'30''$, $b = 40°0'10''$, $C = 121°36'20''$, calculer A, B, c par les formules $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \cot\frac{C}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$,
$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \cot\frac{C}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$.
$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$ . . . 203

2066 Résoudre un triangle connaissant les trois côtés. 230

2084 Calculer la racine positive de $\sin \pi x - x^4 = 0$. 282

2116 Étant donnée l'équation
$L\frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} = -20 + \frac{19500}{t + 273}$,
calculer les valeurs de x correspondant à diverses valeurs de t 458

2158 Calculer une table des valeurs de 10^{-t^2} pour les valeurs de t croissant de 0 à 1 par échelons de 0,1. En déduire les valeurs de $u = \int_0^t 10^{-t^2}dt$, et les variations de $y = \int_0^x e^{-x^2}dx$. 472

2189 Calculer les angles x, y, z compris entre $-90°$ et $+90°$ définis par
$\sin x = \frac{\sin a \cos b\sqrt{1-k^2\sin^2 b} + \sin b \cos a\sqrt{1-k^2\sin^2 a}}{1 - k^2\sin^2 a \sin^2 b}$
$\sin y = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b\sqrt{1-k^2\sin^2 a}\sqrt{1-k^2\sin^2 b}}{1 - k^2\sin^2 a \sin^2 b}$
$\sin z = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 a}\sqrt{1-k^2\sin^2 b} - k^2 \sin a \sin b \cos a \cos b}{1 - k^2\sin^2 a \sin^2 b}$
où on suppose $k = 0.31427$, $a = 123°48'10''$, $b = 52°10'20''$ 489

2167 Dans un triangle ABC on donne AB, AC et l'angle A et on considère l'arc de parabole BC ayant B pour sommet et BA pour axe. Calculer l'aire ABC, les angles de l'arc BC avec la corde BC 505

2180 On donne $a = 223$, $b = 283$, $c = 324$, $m = 830$, calculer à l'aide de la règle à calcul $r = \sqrt{\frac{abc}{m}}$,
$u = \sqrt{\frac{mbc}{a}}$, $v = \sqrt{\frac{mca}{b}}$, $w = \sqrt{\frac{mab}{c}}$,
$r^3, u^3, v^3, w^3, \frac{1}{r}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}$, puis x, y, z tels que
$\operatorname{tg} x = \frac{r}{a}$, $\operatorname{tg} y = \frac{r}{b}$, $\operatorname{tg} z = \frac{r}{c}$ 515

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

2027 Déterminer les coordonnées d'un point M du cercle qui passe par trois points A_0, A_1, A_2 en fonction du rapport anharmonique $(MA_0A_1A_2)$ 85

2000 O, A points fixes. A tout point M on fait correspondre le point M_1, intersection de AM et de la symétrique de OA par rapport à OM. M décrivant une ligne C, M_1 décrit une ligne C_1. Les tangentes à ces courbes aux points correspondants se coupent sur la perpendiculaire à OM_1 en O. Si C est une droite, C_1 est une parabole. 3

2008 Courbes intégrales de $x(x - yy') + 2y^2 = 0$. Propriétés diverses. 5

2016 A tout point M on fait correspondre le point M′ de OM tel que $OM + \frac{a^2}{OM'} = b$. Étude de la transformation. 9

2006 Enveloppe des droites qui partagent l'aire d'un rectangle dans un rapport donné 22

2012 Le sommet A d'un angle BAC se meut sur une droite D et ses côtés AB et AC passent par deux points fixes B et C. On prend sur AB les points D, E tels que $BD = CE = k$. Enveloppe de DE. 74

2090 Triangles isocèles dont l'un des côtés égaux est fixe. Lieu des centres des cercles inscrit et exin-

Numéros des questions		Pages.
	scrits. Lieu des points de contact de ces cercles avec les côtés	235
2095	Par un point d'inflexion O d'une courbe du troisième degré on mène une sécante OAB. Lieu des points de rencontre des tangentes en A et B.	272
2077	Exercices sur des triangles ABC dont les sommets sont définis par leurs affixes, racines d'une équation du troisième degré	289
2107	Propriété de la cycloïde	296
2094	Développée de la chaînette	323
2098	Cercle O; A, B, points de ce cercle. Lieu du point M tel que $MT = \lambda MA + \mu MB$, T étant le point de contact d'une tangente menée de M au cercle. Cas particuliers	342
2099	Enveloppe des cercles passant par un point fixe A et interceptant sur une droite fixe un segment BC vu de A sous un angle donné α. Lieu du centre	344
2103	Lieu des centres de similitude de deux cercles dont l'un a pour diamètre le petit axe d'une ellipse et dont l'autre, tangent au grand axe, a son centre sur l'ellipse	359
2108	Trajectoires orthogonales des courbes $x(x^2+y^2) = a(3x^2-y^2)$	385
2149	Trajectoires orthogonales des coniques $y^2 + xy + a^2 - \lambda y = 0$	661
2110	Enveloppe d'un cercle dont le centre décrit un cercle fixe (C) et qui est tangent à une tangente fixe à (C). Aire et arc	411
2114	Construire la courbe $r = \dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{5}}$	430
2126	OM, ON rayons variables rectangulaires d'un cercle, A point fixe de ce cercle. Lieu du point de rencontre de AN et de la tangente en M. Aire	457
2177	Points $A'(a, 0)$, $A'(-a, 0)$; droite BC $y - a = 0$. M point variable de BC $x = \lambda$, $y = a$. Les perpendiculaires en A et A' à MA et MA' se coupent en M'. Lieu de M', enveloppe de MM'.	508
2145	On projette un point M variable d'un cercle sur un diamètre fixe en P. Le lieu du symétrique de P par rapport à la tangente en M est une épicycloïde à deux rebroussements	586
2138	Cercle fixe de centre O, A point fixe du cercle, MOM' diamètre variable qui rencontre en P la tangente en A. Lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles PAM, PAM' et enveloppe de ces cercles. Enveloppe des bissectrices de l'angle APO. Lieu des centres de gravité et des orthocentres des triangles PAM, PAM'. Calcul d'une aire	586
2013	Exercices sur les normales issues d'un point à une parabole	27
2010	Coniques conjuguées par rapport à un triangle rectangle OAB et vues d'un point sous un angle droit. Exercices divers	36
2015	Exercices sur des paraboles bitangentes à une hyperbole, la corde des contacts passant par un point fixe. Calcul d'une aire	39
2019	Sur les côtés d'un triangle ABC comme bases on construit trois triangles isocèles semblables P_ABC, P_BCA, P_CAB. Les droites AP_A, BP_B, CP_C se coupent en un point P, qui décrit une conique Γ quand l'angle à la base varie. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés correspondants du triangle $P_AP_BP_C$ se coupent en un point Q de Γ. La droite PQ passe par un point fixe	51
2018	P, Q, points fixes d'une conique C; PP', QQ', cordes parallèles variables. Lieu du point de rencontre de PQ', P'Q. Enveloppe de P'Q'	75
2024	Exercices sur les parallélogrammes circonscrits à une ellipse et dont les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués	102, 128
2029	Lieu des foyers des paraboles tangentes à un cercle et à deux tangentes rectangulaires de ce cercle	116
2031	Exercices sur les normales à une parabole	124
2042	M, M', extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse; A, sommet du grand axe. Lieu de l'orthocentre et du cercle circonscrit au triangle AMM'	153
2071	Hyperbole équilatère (H) ayant pour sommet O et pour sommet $-a$, 0; parabole (P) ayant pour foyer O et pour directrice $x + a = 0$. Lieu du pôle S par rapport à (P) d'une tangente (T) à (H). Lieu du point de rencontre de (T) et OS	171
2050	Triangles circonscrits à une ellipse et conjugués à l'hyperbole d'Apollonius relative à un point P. Lieu des sommets, des centres des cercles inscrit, exinscrit, circonscrit	187
2051	PA, PB tangentes issues de P à une conique (C). Le cercle PAB rencontre la conique en C et D. Le pôle P' de CD par rapport à (C) est sur le cercle PAB. Relation entre les lieux décrits par P et P'	188
2054	Cercles $x^2 + y^2 - m^2x + 2my + 1 = 0$. La polaire d'un point par rapport à ces cercles enveloppe une conique. Discuter	195
2091	Conique de centre O et point P; AB et CD, cordes rectangulaires passant par P. Lieu des centres des coniques passant par O, A, B, C, D	237
2082	Enveloppe de la droite $\lambda^2 P + 2\lambda Q + R = 0$	264
2083	Le rayon de courbure en un point d'une parabole est double de la portion de normale comprise entre ce point et la directrice	281
2106	Exercices sur un faisceau ponctuel de coniques	294
2062	M, point d'une ellipse, MN normale, T milieu de MN, P, Q, R pieds des autres normales issues de T. Lieux divers relatifs au triangle PQR. Aires limitées par les courbes obtenues	299
2097	Les tangentes communes à une conique (C) et à un cercle de centre P sont tangentes à une conique qui a pour foyers les points de rencontre de (C) et de la polaire de P	341
2105	Une droite AB rencontre Ox en A et Oy en B. Connaissant le lieu (C) du milieu de AB, trouver l'enveloppe de AB. Cas particulier où (C) est une droite; AB enveloppe une parabole. Lieu du sommet et du foyer quand (C) passe par un point fixe	378
2104	Lieu de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit à un triangle qui a pour sommets un foyer d'une ellipse et les extrémités de deux diamètres conjugués	387
2124	Une conique variable touche en C et C' deux coniques fixes et en T et T' deux tangentes communes à ces coniques. Enveloppe des droites CC' et TT'	394
2125	Par un point P on mène deux sécantes PMM', PNN' également inclinées sur les axes d'une conique. Lieu du centre du cercle passant par les points M, M', N, N'	395
2109	Lieu du symétrique d'un point d'une ellipse par rapport au centre de courbure. Aire du lieu	408
2120	Les normales issues d'un point P à une ellipse rencontrent l'ellipse en quatre points (autres que les pieds). Lieu du point P pour que ces quatre points soient sur un cercle, et lieu du centre de ce cercle	454
2186	Exercices sur deux paraboles ayant O pour foyer commun et pour axe Ox	482

Numéros des questions — Pages.

2127 La tangente en un point M d'une ellipse rencontre le diamètre passant par le centre de courbure en M au point P. Lieu du point P . 546

2204 Par deux points fixes A, A' (AA' = $2a$) on fait passer un cercle variable de centre C ; un cercle de rayon a passe par le point C et son centre C' est sur la perpendiculaire à AA' en son milieu. Le lieu des points de rencontre des deux cercles est une courbe Γ. Propriétés de cette courbe. 553

2132 Soient y_1, y_2, y_3 les ordonnées des pieds des normales à la parabole $y^2 - 2x = 0$ issues d'un point M. Lieux de ce point quand on a

1° $\dfrac{\Sigma y_1^{13}}{\Sigma y_1^2 \Sigma y_1^{11}} = k$, 2° $\dfrac{\Sigma y_1^{15}}{\Sigma y_1^2 \Sigma y_1^{13}} = k$,

3° $\dfrac{\Sigma y_1^{20}}{\Sigma y_1^2 \Sigma y_1^{18}} = k$. 569

2143 Correspondance entre deux points M, M' tel que MM' passe par le centre d'une ellipse et que les polaires de M, M' soient perpendiculaires. . . 612

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

2028 Un cercle tourne autour d'une droite située dans son plan. Sa projection sur un plan est une ellipse. Lieu des foyers de cette ellipse 146

2113 Un plan P passant par une droite fixe D rencontre une droite Δ en un point M. Lieu engendré par la perpendiculaire menée par M à ce plan 351

2111 Discuter la surface $a^2z - y^2x - 4ax = 0$ . . 413

2136 Surface $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, droites de la surface, courbes de niveau, lignes de plus grande pente. Calcul d'un volume. 450

2163 Surface engendrée par les droites s'appuyant sur Oz et sur $x = a$, $z = 0$, et qui font un angle constant avec Ox. Sections par des plans $x = \lambda$. Lieu des asymptotes et des foyers de ces sections 497

2021 Quadriques passant par deux cercles tangents et situés dans des plans perpendiculaires. Lieu des centres. Les sphères de Monge sont orthogonales à une sphère fixe 63

2030 Quadriques passant par le cercle

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \qquad z = 0$$

et par l'axe des z. Lieu des pôles d'un plan fixe. Lieu des centres 119

2037 Equation de la surface réglée S qui admet les trois directrices

$$y = 0, \quad z = x\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad x = 0, \quad y^2 + z^2 + y = 0;$$

$$z = 0, \qquad x^2 - y^2 - y = 0.$$

Intersection de S et de la surface

$$z^2 - x^2 + y = 0.$$

Trouver toutes les quadriques ayant leurs axes parallèles aux axes de coordonnées et tangentes à l'intersection en quatre points 145

2043 Surfaces du troisième degré passant par trois cercles dont les plans sont parallèles. Exercices divers 209

2170 Exercices sur la surface $z = xy + x^3$. Génératrices. A chaque génératrice G on fait correspondre le plan P mené par la droite $y = b$, $z = c$ et parallèle à la symétrique de G par rapport au plan xOy. Le lieu du point de rencontre de G et P est une courbe C. Étude de cette courbe. 523

2151 D' conjuguée d'une droite D par rapport à une ellipsoïde ; excercices sur les droites D qui sont perpendiculaires au plan passant par D' et un point donné 603

MÉCANIQUE

2064 Un point M décrit une ellipse avec une accélération totale dirigée vers l'un des foyers. Calculer sa vitesse, et étudier l'hodographe. 247

2165 Un point se meut de façon que sa vitesse varie proportionnellement au rayon vecteur r, et que son accélération passe par le centre. Trajectoire et hodographe 501

2171 Courbes intégrales de l'équation

$$y - 2xy' + y^2y'^3 = 0.$$

Calcul d'aire. Mouvement d'un point sur deux des courbes 529

2146 Deux points M, M' décrivent respectivement deux droites d'un mouvement uniforme. Lieu de MM'. Cas où les droites sont dans un même plan. . 578

2022 Un point matériel de masse 1 décrit la spirale $r = a^\theta$ sous l'action d'une force centrale F. Déterminer cette force. Problème inverse . . 87

2038 Exercices sur une arbalète. 165

2072 Mouvement d'un point assujetti à rester sur Ox, attiré par un point de Oy proportionnellement à la distance. Cas où il y a frottement . . . 174

2056 Exercices sur le mouvement d'un point soumis à l'action de la force $X = -\dfrac{mk^2x}{x^2 + y^2 + a^2}$,

$$Y = -\frac{mk^2y}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad Z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 201$$

2044 Mouvement d'un point attiré par un point fixe en raison inverse du cube de la distance 215

2096 Cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, point M(x, y), point M'(x', y') conjugué de M tel que $x' = -x$. Lieu de M' quand M décrit le cercle, ou une droite On supposé le point M sollicité par la force MM'. Lignes de force et lignes de niveau 273

2085 Surfaces de niveau d'un champ où un point est soumis à l'action de la pesanteur et d'une force centrale de grandeur constante. 283

2092 Etudier le mouvement d'un point se déplaçant sur Ox et défini par l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 321$$

2102 Sur le mouvement d'une balle élastique qui rebondit sur une paroi verticale, puis sur une paroi horizontale 377

2156 Sur le cercle $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, $z = 0$ on prend les points A et B à la distance R du point O. Un point P du cercle est la projection du point M dont la cote est $z = PA + PB$. Étudier la courbe, lieu de M. Soit C le point $(-R, 0, 0)$; A, B, C sont les points d'appui sur le plan horizontal de trois pieds fixés aux sommets d'une lame triangulaire. Réactions de frottement. 467

2188 Mouvement circulaire défini par $s = RL(1 + \alpha t)$. Déterminer la force qui produit le mouvement. Travail. Application numérique. 487

2174 Mouvement d'un point soumis à l'action de la force $X = x$, $Y = y - 4x$. Exercices sur la trajectoire et l'hodographe 535

2055 Equilibre d'une table reposant sur un plan horizontal 199

2065 Equilibre d'un cerf-volant 249

2086 Equilibre d'un point assujetti à se déplacer sur un cercle. 305

2115 Sur le centre de gravité d'un fil enroulé sur un cercle 431

Numéros des questions. Pages.

2187 Equilibre d'une sphère reposant sur un plan incliné et retenue par un fil 486
2166 Equilibre de l'inverseur Peaucellier 503
2178 Equilibre avec frottement d'un système de trois barres SA, SB, SC formant un trièdre trirectangle. 509
2129 Equilibre d'un quadrilatère articulé. 541

ÉPURES

2039 Intersection d'une sphère et de deux paraboloïdes hyperboliques (Ecole Polytechnique, 1912) . . 65
2075 Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cône dont la base est une parabole horizontale (Ecole Centrale, 1912 181
2087 Intersection d'un tétraèdre et d'une sphère. Ombres Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1912 206
2170 Intersection d'une surface gauche de révolution à axe de front et d'un paraboloïde de révolution à axe de bout, ces deux surfaces étant circonscrites à une même sphère (Ecole Normale Supérieure, 1912 254
2117 Intersection de deux surfaces de révolution (Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1912) 306
2157 Intersection d'une surface gauche de révolution et d'une sphère (Ecole Polytechnique, 1913). . . 398
2181 Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et d'un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur horizontal. Ombres Ecole Centrale, 1913) 493
2198 Intersection de deux cylindres de révolution Ecole des Ponts et Chaussées, 1913) 516
2173 Solide de révolution engendré par une ellipse horizontale tournant autour d'un axe de front passant par son centre Ombres Ecole Normale Supérieure, 1913). 532
2205 Intersection d'un cône et d'un cylindre qui ont pour bases des contours convexes formés de cercles et de droites. Ombres Agrégation, 1913). 559
2201 Intersection d'un cône et d'un cylindre (Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1913 591

PHYSIQUE

2001 Exercice sur un faisceau de lumière monochromatique qui se réfléchit sur un miroir sphérique et rencontre un prisme 11
2046 Exercices sur les lentilles convergentes. . . . 224
2067 Exercices sur un système optique constitué par une lentille mince plan convexe dont la face plane est argentée 251
2041 Exercices sur un crown et deux flints 324
2172 Exercices sur un aimant et une boussole 581
2176 Exercices sur un solénoïde. 583
1852 Calculer la température d'une eau dans laquelle on fait passer de l'air sec. 106
2045 Exercices sur un volume d'air placé dans une bouteille 221
2139 Sur un mélange d'eau et d'alcool éthylique introduit dans un baromètre a mercure. 239
2068 Exercices sur un condensateur 253
2147 Intensité d'un champ électrique . 360
2148 Calculer la charge de deux sphères conductrices chargées d'électricité 361
2159 Exercices sur un condensateur 453
2190 Sur un baromètre normal 494
2182 Exercice de calorimétrie 558
2131 Exercice sur un aérostat sphérique 572
2202 Exercices sur un baromètre. 644

CHIMIE

Numéros des questions. Pages.

2047 Analyse d'une dolomie 227
2069 Analyse de gaz. 253
2076 Sur le projet d'une usine à acide sulfurique . . 309
2042 Déterminer la composition qualitative et quantitative d'un gaz. 328
2119 Sur l'analyse d'un mélange de gaz. 362
2122 Déterminer un volume de chlore et la chaleur de formation de l'ozone 462
2160 Analyse d'un mélange de gaz (azote, ammoniac et phosphure d'hydrogène) 475
2169 Analyse d'un mélange gazeux . . . 539
2183 Formuler des réactions 549
2131 Etablir la composition d'un résidu 574
2148 Déterminer le volume total d'un gaz. 580
2139 Composition d'une dissolution d'iode dans l'iodure de potassium. 593
2203 Evaluer la teneur de 1g d'acier en carbone. . . 616

NOTES ET COMMUNICATIONS

Sur la résolution d'un système d'équations récurrentes du premier degré, par M. H. Beghin. 57
Mesure des erreurs relatives à la règle à calcul, par MM. L. Zivy et A. Sainte Laguë. 113
Sur le développement des fonctions élémentaires en série entière, par M. V. Jamet. 441
Note sur les intégrales $\int f(x)\sin ax\,dx$ et $\int f(x)\cos ax\,dx$, par M. G. Morel. 444
Note sur le même sujet, par M. R. Dontot. 521
Sur l'équation de Bernoulli, par M. A. Charrasse. . . 577
Sur la trajectoire d'un point de la tangente à une courbe plane situé à une distance constante du point de contact, par M. Carette 58
Note sur les trajectoires sous un angle constant de droites ou de cercles, par M. R. Dontot 81
Note sur le même sujet. 139
Note sur les conchoïdes, par M. G. Vernières. . . . 115
Transformation d'une propriété tangentielle en propriété métrique, par M. R Dontot 137
Sur une famille de courbes, par M. Raymond Berr . . 161
Remarque sur cette note, par M. J. Haag 185
Sur la courbure des coniques, par M. G. Valiron. . . 33
Généralisation d'une propriété des coniques, par M. Carette 185
Sur le lieu des points équidistants de deux droites, par M. G. Fontené. 1
Sur le mouvement d'un point soumis à une force centrale, par M. G. Fontené 241, 266, 313
Note sur la ponctuation, par M. J. Caron. . . . 345, 369
Correspondance 113

BIBLIOGRAPHIE

Problèmes de mécanique et cours de cinématique, conférences faites en 1912 par M. Guichard, professeur à la Faculté des Sciences de Paris (librairie A. Hermann). 496
Cours complet de mathématiques spéciales : 1. Algèbre et Analyse, par M. J. Haag, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont (Gauthier-Villars) 496
Le Hasard, par Emile Borel (Félix Alcan) 520
Henri Poincaré, l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique, par Vito Volterra, J. Hadamard, P. Langevin, P. Boutroux (Félix Alcan) 520
Leçons de mathématiques spéciales, par M. E. Blutel (Hachette 600

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences Mathématiques.

1912. . . 289.
1913. . . 329, 553, 579.

Concours d'admission des agents des postes aux cours de l'Université.

1912. . . . 231, 578.

Certificats de Mathématiques générales.

Toulouse (1910). . . . 126.
Lyon (1912). . . . 170, 184, 450, 612.
Rennes (1912). . . 240.
Clermont (1912 . . . 298.
Nancy (1912). . . 540.
Grenoble 1912 . . . 429.

ÉCOLES

École Normale Supérieure et Bourses de Licence.

1912. . . . 209, 215, 221, 224, 227, 228, 229, 254.
1913. . . . 278, 522, 529, 532, 535, 538, 581, 583.
1914 . . . 566, 585

École Polytechnique.

1912. . . 65, 140, 142, 145, 165, 169, 324, 328.
1913. 257, 398, 465, 467, 472, 473, 475.
1914. . . 563.

École Centrale.

1912. . 171, 174, 177, 179, 181, 309.
1913. . . . 284, 493, 508, 509, 511, 515, 548, 549.
1914. . . . 594.

École Nationale Supérieure des Mines de Paris

Places réservées aux Sous-Ingénieurs et Contrôleurs.

1912. . . . 20, 321, 322, 323.

Cours préparatoires.

1912. . . . 245, 247, 249, 250, 251, 253.
1913. . . . 276, 497, 498, 501, 503, 505, 533.
1914. . . . 561.

École Nationale des Mines de Saint-Étienne.

1910 . . . . 158, 541, 572.
1912 . . . . 109, 306, 360, 361, 430, 431, 458
1913 . . . 311, 591, 614, 616.
1914 . . . . 598.

École des Ponts et Chaussées.

Cours spéciaux.

1912 . . . . 44, 575, 577.
1913 . 296.
1914 . . . . 609.

Cours préparatoires.

1912 . . . . 206, 259, 262, 263, 281, 282, 283, 305.
1913 . . . . 310, 516.
1914 . . . 616.

École Navale.

1912 . . . 191, 193, 195, 199, 201, 203, 205, 239.
1913 . . . . 287, 478, 481, 482, 486, 487, 489, 491.
1914 . 574.

Ecole professionnelle supérieure des Postes et Télégraphes (2e section).

1912 . . . . 232, 601, 603.

École supérieure d'Aéronautique.

1913 549

École spéciale des Travaux Publics, du Bâtiment et de l'Industrie.

Cours techniques supérieurs (1re année).

1913 (Deuxième session . . . 550.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École Polytechnique.

1912 . . . . 12, 42, 67, 90.
1913 . . . . 332, 354, 384, 400, 421.

École Centrale.

1912 . . . 52, 78, 108, 128.
1913 . . . . 364, 389, 413, 437, 463.

NOMS DES AUTEURS

A., 585.
BARISIEN (E. N.), 32, 56, 80, 128, 136, 160, 191, 208, 239, 240, 341, 389, 392, 416, 458, 552.
BEGHIN (H.), 57.
BERR (Raymond), 161.
BETBÉZE-CULI, 537.
BLUTEL (E.), 600.
BOREL (Emile), 520.
BOYER (A.), 12, 39.
CARETTE (M.), 5, 58, 185.
CARON (J.), 345, 360.
CHARRASSE (A.), 577.
COURTOIS (André), 76, 106, 251, 284.
D. (A.), 87, 149, 193, 203.
DARMON (A.), 191.
DELATTRE (Pierre), 581.
DEPERROIS (G.), 276.
DION (Emile), 538, 550.
DONTOT (R.), 5, 81, 137, 521.
DUFOUR (R.), 612.
DUFRESNE (R.), 50.
DUPONT (A.), 76.
ESTEBEN (G.), 234.
F. (A.), 454.
F. (M.), 190.
FITTE (J.), 407.
FONTENE (G.), 1, 241, 265, 313, 541.
FORISSIER (Auguste), 221.
FROBERT (H.), 323, 359, 360, 377.
GÉRARD, 52, 78, 364.
GIRONNET (Marcel), 549.
GAEDECKE (Werner), 32, 80, 305, 464, 496.
GUICHARD, 496.
H. (E.), 32, 102, 152, 264, 410, 454, 496, 520.
HAAG (J.), 185, 496.
HUMERY (R.), 72.
JABLONSKI, 78, 108, 128, 389.
JACQUIER, 11.
JAMET (V.), 441.
L. (P.), 174, 177, 181, 509, 511, 515, 516.
LACH (G.), 193, 215, 282, 324, 359, 496, 539, 540, 604.
LEBEL (J.), 507.
LE BRAS (J.), 74.
LHERMITTE (J.), 558.
MACE DE LÉPINAY (A.), 42, 62, 65, 89, 170, 450, 477.
MALLOIZEL, 130, 413, 437, 463.
MANEN (R.), 32, 136, 184, 322, 359, 368, 416, 464, 586.
MARESCALCHI, 456.
MARGAND (François), 532.
MASSING (Camille), 31.
MONTAUT (L.), 70.
MOREL (Georges), 444.
MOURRET (Jean), 73, 102, 123, 124, 139, 160, 190, 208, 340, 342, 360, 385, 394, 397, 407.
NAUCELLE (L.), 123, 126, 235, 237, 263, 271, 343, 440, 548, 603.
NICOLESCO (J.-G.), 70.
NININ, 453.
NYEGAARD (J.), 106.
D'OCAGNE (M.), 113.
P. (G.), 552.
P. (P.), 507.
PETITJEAN, 520.
RÈME (E.), 118, 369.
ROI (Maurice), 477.
ROUSSEAU (A.), 112, 215, 296, 359, 378, 455.
ROUX (M.), 49, 52, 78, 413, 591.
ROY (Gaston), 329, 344, 462.
S. (C.), 386, 413.
SAINTE-LAGUË (A.), 27, 113.
SERGESCU (Petre), 481.
SIMON (L.), 195, 570.
SINGIER (Gaston), 264.
SIRE (Louis), 70, 123.
TOPIN, 475, 583.
ULLMANN (Marcel), 262, 283, 306.
VALIRON (G.), 33.
VERNIERES (C.), 115.
ZIVY (L.), 113.

QA
1
R486
année 23-
24

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

Revue de mathématiques
spéciales